

« إيجاد المجال الكهربائي لتوزيع شحني متصل »

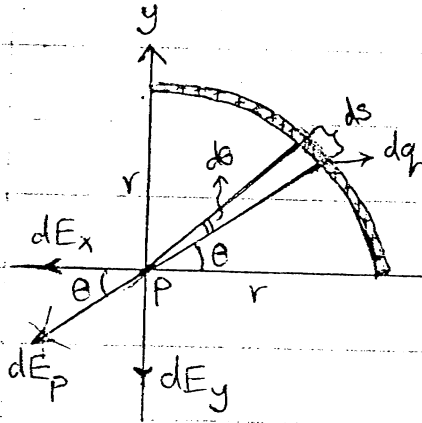
تمرين ① : سلك منحنى على شكل ربع دائرة نصف قطرها (r)

يحمل شحنة كهربائية (q) موزعة توزيع منتظم

أوجد محصلة المجال الكهربائي في نقطة (P) التي

تمثل مركز الدائرة كما في الشكل الموضح أدناه .

• الحل :



فأخذ جزء من السلك طوله

(ds) يحتوي على جزء من الشحنة

قيمتها (dq) وأن هذه الشحنة

بدلالة الشحنة الكلية (q)

ونصف قطر ربع الدائرة تكون :

$$\lambda = \frac{q}{S} = \frac{dq}{ds} \Rightarrow \lambda = \frac{q}{\left(\frac{2\pi r}{4}\right)} = \frac{dq}{ds}$$

$$\lambda = \frac{2q}{\pi r} = \frac{dq}{ds}$$

$$dq = \frac{2q}{\pi r} ds \rightarrow (1)$$

وبذلك يكون المجال الكهربائي الجزئي لهذا

الجزء من الشحنة عند النقطة (P) يساوي :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \quad (N/C) \rightarrow (2)$$

بتعويض (1) في (2) نجد أن ،

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q}{\pi r^3} ds \rightarrow (3)$$

وبدلالة جزء من الزاوية (dθ) فإن جزء من القوس (ds) يكون

$$ds = r d\theta$$

كالتالي :

(13)

وبذلك تكون المغادرة (3) على الصورة التالية :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q}{\pi r^2} \cdot r d\theta$$

أي أن ،

$$dE = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 r^2} d\theta$$

يحلل هذا المجال (dE) إلى مركبتين إحداثيتين على المحور السيني (dE_x) والثانية على المحور الصاري

$$dE_x = dE \cos \theta \quad (dE_y) \text{ أي أن ،}$$

$$= \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 r^2} \cos \theta d\theta$$

أي أن ،

$$E_x = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 r^2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta$$

$$E_x = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 r^2} \left[\sin \theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$\therefore E_x = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 r^2}$$

وكذلك المركبة التي على المحور الصاري

$$dE_y = dE \sin \theta$$

تكون :

$$= \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 r^2} \sin \theta d\theta$$

أي أن ،

$$E_y = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 r^2} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta$$

وبالتالي ،

$$\therefore E_y = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 r^2}$$

وعليه فإن المحصلة لقوة هذا المجال

$$E_p = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

الكراني عند النقطة (P) يكون :

$$E_p = \frac{\sqrt{2} q}{2\pi^2\epsilon_0 r^2}$$

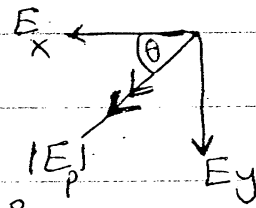
(N/C)

(14)

$$\tan \theta = \frac{E_y}{E_x} = 1$$

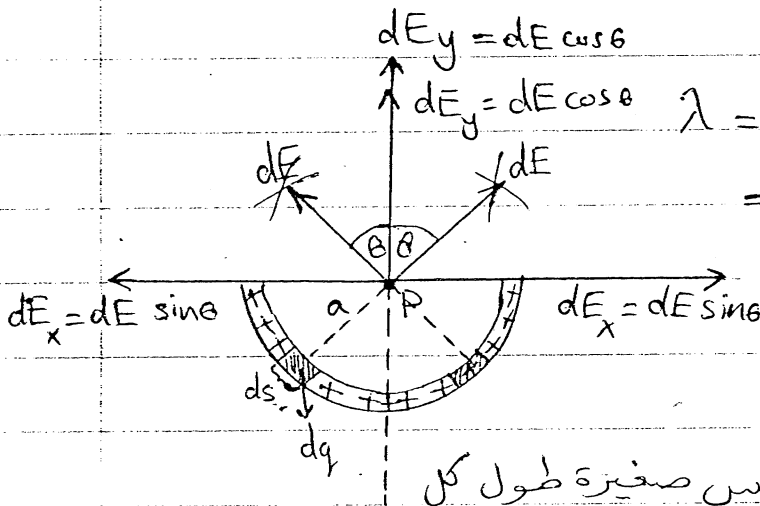
$$\theta = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

$$\therefore |E| = \frac{\sqrt{2} q}{2 \pi^2 \epsilon_0 r^2} \quad \angle 225^\circ$$



واتجاهها

تمرين (2) : في الشكل ، أوجد المجال الكهربائي لنصف الحلقة التي في الشكل عند مركزها ، إذا كان نصف قطرها (a) ، وعليها شحنة كثافتها الطولية (λ).



$$\text{الحل : } \lambda = \frac{q}{S_q} = \frac{dq}{ds}$$

$$= \frac{q}{(\frac{2\pi a}{2})} = \frac{dq}{ds}$$

$$dq = \lambda ds$$

$$= \frac{q}{\pi a} ds$$

نقسم نصف الحلقة إلى أقواس صغيرة طول كل

منها (ds) كما في الشكل ، ويكون على كل (ds) شحنة كهربائية

مقدارها (λ ds) ، فيكون المجال الناتج عنها :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda ds}{a^2} ; dq = \lambda ds$$

ونلاحظ من القائل أن المركبة الأفقية للمجال تتلاشى ، أي (E_x = 0)

أما المركبة العمودية (dE_y) فهي :

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda ds}{a^2} \cos \theta ; ds = a d\theta$$

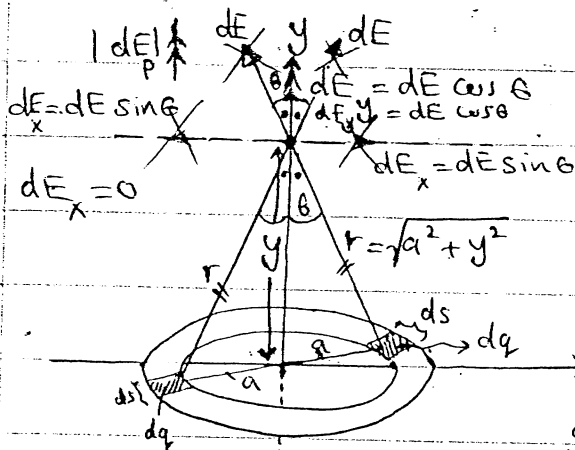
$$E_y = \int dE_y = \int dE \cos \theta$$

$$E_y = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \quad \text{أي أن:}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\sin\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} [1 - (-1)]$$

$$|E| = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

تمرين ③: في الشكل، حلقة رقيقة قطرها (2a) موزعة عليها شحنة مقدارها (q) بانتظام. أوجد المجال الكهربائي عند نقطة على محورها تبعد مسافة (y) من مركزها.



تقسم الحلقة إلى أقواس صغيرة طول كل منها (ds)، و (ds) تبعد مسافة (r) عن نقطة المجال (P)، وكل قوس صغير عليه شحنة كثافتها الطولية (λ) بحيث:

$$\lambda = \frac{q}{s} = \frac{dq}{ds}$$

$$\lambda = \frac{q}{2\pi a} = \frac{dq}{ds} \Rightarrow dq = \lambda ds$$

فيكون المجال الناتج عن (ds):

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{(a^2 + y^2)}$$

ومن القائل نرى أن المركبة الأفقية تتلاشى، بينما المركبة العمودية:

$$dE_y = dE \cos\theta \quad ; \quad \cos\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

(16)

تكاصل ($\oint ds$) هو محيط الحلقة أي $(2\pi a)$ ،

$$\int dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \oint ds$$

$$E_y = E_p = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} (2\pi a)$$

ولكن $\lambda = \frac{q}{2\pi a} = \frac{q}{2\pi a}$ ←

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q y}{2\pi a (a^2 + y^2)^{3/2}} (2\pi a)$$

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y q}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

* لاحظ أنه في مركز الحلقة يكون المجال صفراً .

* لاحظ أيضاً أنه عندما تكون نقطة المجال بعيدة جداً ، أي أن

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y q}{y^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{y^2} : \text{فإن } (y \gg a)$$

← أي أن :

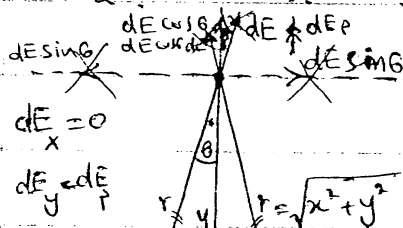
الشحنة التي على الحلقة تبدو وكأنها في مركز الحلقة .

• تمرين (4) : قرص دائري نصف قطره (a) عليه شحنة سطحية

كثافتها السطحية (σ) . أوجد المجال الكهربائي عند

نقطة على محوره .

• الحل :



لإيجاد المجال الكهربائي عند النقطة (P)

التي تبعد مسافة (y) عن مركز القرص ،

نقسم القرص إلى حلقات صغيرة ، نصف

قطر كل منها (x) وسماكتها (dx) ، فيكون مقدار الشحنة على كل

حلقة ،

$$dq = \sigma (2\pi x dx)$$

ويكون المجال الناتج (dE) عن الحلقة الواحدة :

(17)

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(2\pi x dx)}{(x^2 + y^2)}$$

ومن قائل المسألة نلاحظ أن المركبة الأفقية للمجال تتلشى،
وتبقى فقط المركبة العمودية (dE_y) ، أي أن:

$$dE_y = dE \cos \theta \Rightarrow E_y = \int dE_y = \int dE \cos \theta = E_p$$

$$\cos \theta = y/r$$

وبالتعويض عن (dE) :

$$E_p = E_y = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

$$= \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

$$= \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right]_0^a$$

$$= \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(a^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{1}{(0 + y^2)^{1/2}} \right]$$

$$= \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{(a^2 + y^2)^{1/2}} \right]$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{y}{y} - \frac{y}{(a^2 + y^2)^{1/2}} \right]$$

$$|E_p| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{y}{(a^2 + y^2)^{1/2}} \right]$$

وعندما تكون $(y \gg a)$ ، أي أن النقطة المراد إيجاد المجال الكهربائي

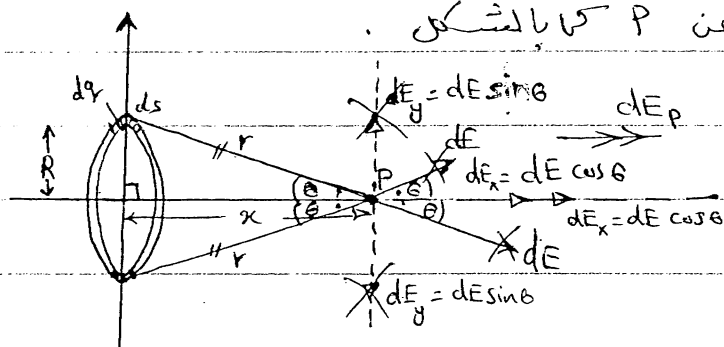
عندها قريبة جدًا من القرص تكون:

$$E_p = E_y = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



(18)

تمرین (5): أوجد E عن P كما بالشكل .



$$dE_y = 0$$

$$dE_p = dE_x$$

$$dE = k \frac{dq}{r^2} ; \lambda = \frac{q}{s} = \frac{dq}{ds}$$

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R} = \frac{dq}{ds}$$

$$\Rightarrow dq = \frac{q}{2\pi R} ds$$

$$dE = k \frac{q}{2\pi R} \frac{1}{r^2} ds ; r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$dE_y = 0 ; dE_x = dE \cos \theta = dE_p ; \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\therefore \int dE_p = \int dE_x = k \frac{q}{2\pi R} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \int ds$$

$$E_p = E_x = k \frac{q}{2\pi R} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} (2\pi R)$$

$$\therefore E_p = k \frac{qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

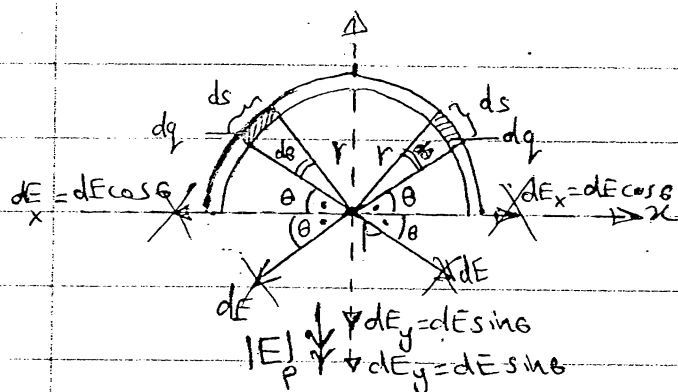
تمرین (6): سلك منحني على شكل نصف دائرة نصف قطرها (r)

يحمل شحنة كهربائية (q) موزعة توزيعاً منتظماً. أوجد

محصلة المجال الكهربائي في نقطة (P) التي تمثل مركز الدائرة

(19)

كما بالشكل .



$$dE = k \frac{dq}{r^2}$$

$$\lambda = \frac{q}{s} = \frac{dq}{ds}$$

$$\lambda = \frac{q}{\left(\frac{2\pi r}{2}\right)} = \frac{dq}{ds}$$

$$dq = \frac{q}{\pi r} ds$$

$$= \frac{q}{\pi r} (r d\theta)$$

$$\therefore dq = \frac{q}{\pi} d\theta$$

$$dE_x = 0$$

$$dE_y = dE \sin \theta = dE_p$$

$$\int dE_y = k \frac{q}{\pi r^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

$$E_y = E_p = k \frac{q}{\pi r^2} [-\cos \theta]_0^\pi$$

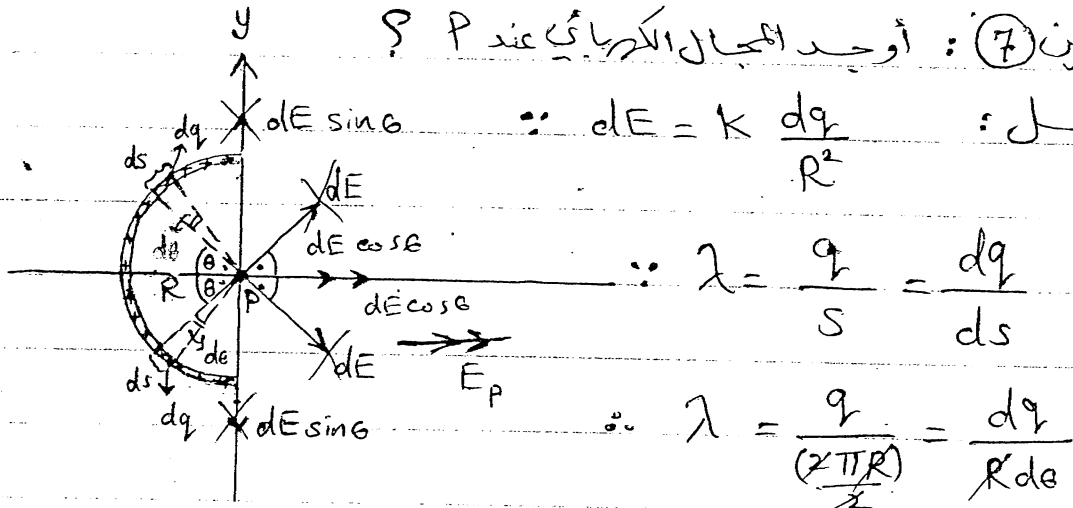
$$= k \frac{q}{\pi r^2} (-\cos \pi + \cos 0)$$

$$\therefore E_p = 2k \frac{q}{\pi r^2} = \frac{1}{2} \frac{2q}{\pi r^2} \frac{1}{\pi \epsilon_0}$$

$$\therefore E_p = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 r^2}$$

تمرين ⑦: أوجد المجال الكهربائي عند P ؟

الحل: $\therefore dE = k \frac{dq}{R^2}$



$$\therefore \lambda = \frac{q}{s} = \frac{dq}{ds}$$

$$\therefore \lambda = \frac{q}{\frac{(\pi R)}{2}} = \frac{dq}{R d\theta}$$

$$\Rightarrow dq = \frac{q}{\pi} d\theta$$

$$\therefore dE = k \frac{q}{\pi R^2} d\theta$$

$$dE_y = 0$$

$$\int dE_x = \int dE_P = \int dE \cos \theta = k \frac{q}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta$$

$$E_x = E_P = k \frac{q}{\pi R^2} \left[\sin \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = k \frac{q}{\pi R^2} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore E_P = 2k \frac{q}{\pi R^2}$$

تمرين ⑧: سلك مشحون بشحنة موجبة

موزعة بانتظام. نرسم هذا

الشكل. أوجد المجال

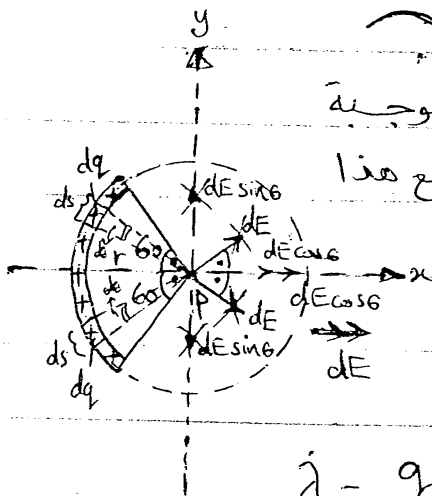
الكهربائي عند النقطة (P) ؟

الحل: $dE = k \frac{dq}{r^2}$

$$\lambda = \frac{q}{s} = \frac{dq}{ds} \Rightarrow dq = \lambda ds$$

$$dE = k \frac{\lambda ds}{r^2}$$

$$dE_y = 0, \quad dE_x = dE \cos \theta = dE_P$$

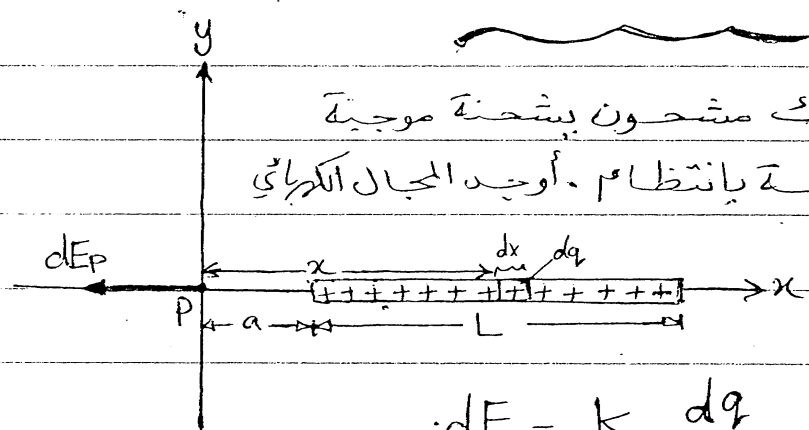


(21)

$$\int dE_x = \int dE_P = \frac{k 2\lambda r}{r^2} \int_0^{60} \cos \theta d\theta$$

$$E_x = E_P = \frac{2k\lambda}{r} [\sin \theta]_0^{60} = \frac{2k\lambda}{r} (\sin 60 - \sin 0)$$

$$\therefore \frac{E}{P} = \frac{k\lambda}{r} \frac{\sqrt{3}}{2} = k \frac{\sqrt{3}\lambda}{r}$$



تمرين ٩: سلك مشحون بيشحنة موجبة
موزعة بانتظام. أوجد المجال الكهربائي

عند النقطة P؟

الحل:

$$dE = k \frac{dq}{x^2}; dq = \lambda dx$$

$$\int dE_P = \int_a^{a+L} k \frac{\lambda dx}{x^2}$$

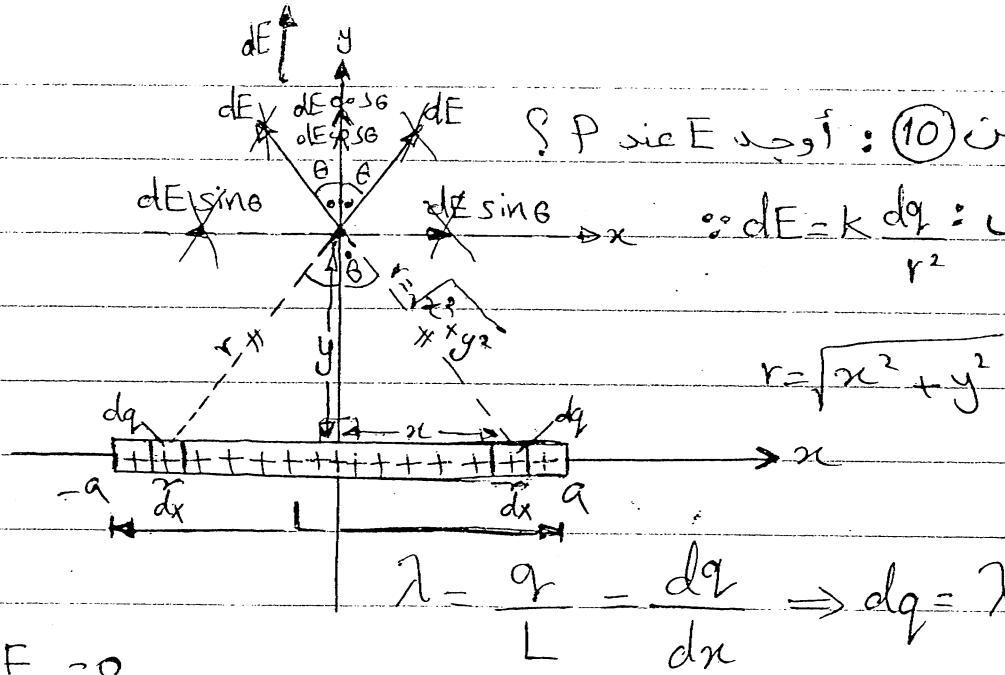
$$E_P = k\lambda \int_a^{a+L} \frac{dx}{x^2}$$

$$= k\lambda \int_a^{a+L} x^{-2} dx$$

$$= K\lambda \left[-\frac{1}{x} \right]_a^{a+L}$$

$$E_P = K\lambda \left[-\frac{1}{a+L} + \frac{1}{a} \right] = k\lambda \left(\frac{-a + a+L}{a(a+L)} \right)$$

$$E_P = k \frac{\lambda L}{a(a+L)}; \lambda = \frac{q}{L} \Rightarrow E_P = k \frac{qK}{La(a+L)}$$



تمرین (10): آوجد E في P ؟

الحل: $dE = k \frac{dq}{r^2}$

$$dE_x = 0$$

$$dE_y = dE \cos \theta = dE_P ; \cos \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= k \frac{\lambda}{(x^2 + y^2)^{3/2}} y dx$$

$$\int dE_P = \int k \frac{\lambda y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

$$\therefore E_P = k \lambda y \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = k \lambda y \left\{ \frac{1}{y^2} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right]_{-a}^a \right\}$$

$$= k \frac{\lambda}{y} \left[\frac{a}{(a^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{a}{(a^2 + y^2)^{1/2}} \right]$$

$$= k \frac{\lambda}{y} \frac{2a}{(a^2 + y^2)^{1/2}} ; \lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2a}$$

$$\therefore E_P = k \frac{Q}{2ay (a^2 + y^2)^{1/2}} = k \frac{Q}{(a^2 + y^2)^{1/2}}$$

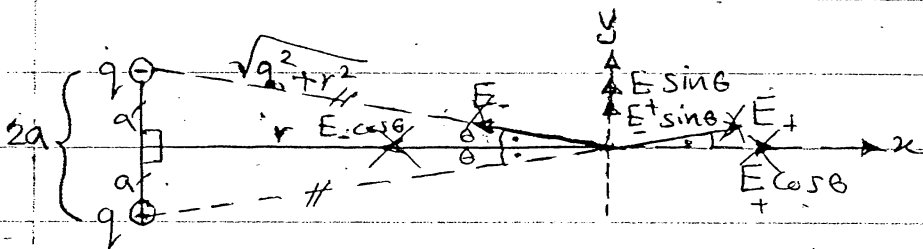
ثنائي القطب في مجال كهربائي (A Dipole in an Electric Field)

يتكون ثنائي القطب الكهربائي (Electric Dipole) من شحنتين متساويتين في المقدار ومختلفتين في الإشارة ($\pm q$) بينها مسافة صغيرة جداً ($2a$) مقارنة بالمسافة التي يُرار عندها المجال الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب «بعد نقطة المجال».

ويعرف عزم ثنائي القطب (dipole moment) $(\vec{P})$ على أنه حاصل ضرب

أي من مقدار الشحنتين والمسافة بينهما، أي أن: $\vec{P} = 2a q$
وعزم ثنائي القطب $(\vec{P})$ كمية فيزيائية متجهة، واتجاهها من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة ووحداتها: (m.C).

مثال ①: أوجد المجال الكهربائي الناشئ عن ثنائي القطب الكهربائي عند نقطة تقع على المصنف العمودي للمسافة بين الشحنتين؟



الحل:

المجال الكهربائي الناتج عن الشحنة $(+q)$:

$$E_+ = k \frac{q}{(a^2 + r^2)}$$

المجال الكهربائي الناتج عن الشحنة $(-q)$:

$$E_- = k \frac{q}{(a^2 + r^2)}$$

وهما متساويتان في المقدار، واتجاههما كما بالشكل

أعده. ومحصلة المجالين هو الجمع الاتجاهي لهما:

نلاحظ أن المركبتين الأفقيتين متلاشيان، بينما المركبتان العموديتان يعززان بعضهما بعضاً، ومجموعهما يساوي:

$$E_x = 0, \quad E_y = E_+ \sin \theta + E_- \sin \theta$$

$$E_y = E_p = 2 E \sin \theta = 2 k \frac{q}{(a^2 + r^2)} \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

(24)

$$E_y = E_p = K \frac{2a q}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad P = 2a q$$

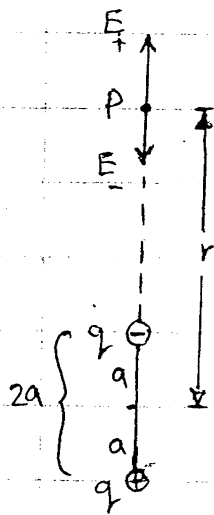
$$E_y = E_p = K \frac{P}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad r \gg a$$

$$E_p = K \frac{P}{(0 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = K \frac{P}{r^3}$$

مثال ②: أوجد المجال الكهربائي لنشائي القطب عند نقطة على محوره تبعد

مسافة (r) من منتصفه ؟

الحل :



$$E_- = K \frac{q}{(r-a)^2}$$

$$E_+ = K \frac{q}{(r+a)^2}$$

$$|E_p| = |E_- - E_+|$$

$$= \left[K \frac{q}{(r-a)^2} - K \frac{q}{(r+a)^2} \right]$$

$$= Kq \left[\frac{1}{(r-a)^2} - \frac{1}{(r+a)^2} \right]$$

$$= Kq \left[\frac{(r+a)^2 - (r-a)^2}{(r-a)^2 (r+a)^2} \right]$$

$$= Kq \left[\frac{r^2 + 2ra + a^2 - r^2 + 2ra - a^2}{(r^2 - a^2)^2} \right]$$

$$= Kq \frac{4ra}{(r^2 - a^2)^2}; \quad P = (2a)q$$

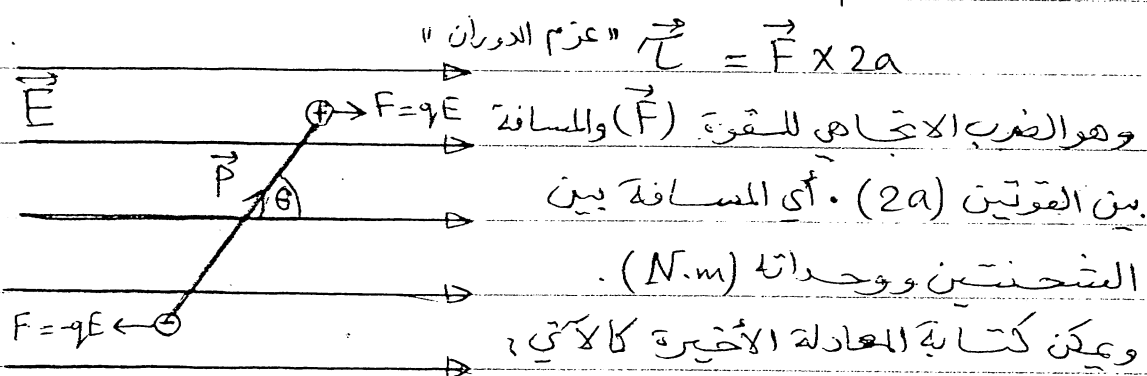
$$= K \frac{2rP}{(r^2 - a^2)^2}; \quad r \gg a$$

$$E = K \frac{2qP}{r^3}$$

$$= K \frac{2P}{r^3}$$

ثنائي القطب في مجال كهربائي : A Dipole in an Electric Field

عندما يوضع ثنائي القطب في مجال كهربائي منتظم ($\vec{E}$) بحيث يصنع عزم ثنائي القطب مع اتجاه المجال زاوية مقدارها (θ)، فإن المجال الكهربائي سيؤثر على الشحنة ($+q$) بقوة مقدارها ($\vec{F} = q\vec{E}$)، وعلى الشحنة ($-q$) بقوة مقدارها ($\vec{F} = -q\vec{E}$)، أي أن القوتين متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه، وحيث أن خط تأثير القوة ليس واحداً، فإن عزم القوتين الكهربائيتين يُعطى بالعلاقة:



$$\vec{T} = q\vec{E} \times 2a = (2aq)E \sin\theta$$

حيث أن ($\vec{P} = 2aq$) فإن:

والتي يمكن إعادة كتابتها كحاصل ضرب اتجاهي بين المتجهين ($\vec{P}$) و ($\vec{E}$) كالآتي:

$$\vec{T} = \vec{P} \times \vec{E}$$

وواضح أن عزم القوة يكون أكبر ما يمكن عندما تكون ($\theta = 90^\circ$)، أي أن:

$$T = PE \sin 90^\circ = PE$$

وأصغر ما يمكن عندما يكون ($\theta = 270^\circ$) أي أن:

$$T = PE \sin 270^\circ = -PE$$

ويكون عزم القوة صفراً عندما تكون $(\theta = 0)$.

فإذا أزلحت القوة الكهربائية ثنائي القطب لإزاحة زاوية $(-d\theta)$

فإن الشغل المبذول يكون:

$$dW = \tau (-d\theta)$$

ويكون الشغل المبذول الكلي لإزاحة القطب من زاوية ابتدائية (θ_0) إلى

زاوية نهائية (θ) :

$$W = \int dW = - \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta$$

$$W = - \int_{\theta_0}^{\theta} PE \sin \theta d\theta = - PE [-\cos \theta]_{\theta_0}^{\theta} \\ = PE (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

فإذا كانت الزاوية $(\theta_0 = 90^\circ)$ فإن المعادلة الأخيرة تصبح:

$$W = PE \cos \theta$$

أي أن: الشغل المبذول هو الضرب العددي للمتجهين $(\vec{P})$ و $(\vec{E})$ أو:

$$W = \vec{P} \cdot \vec{E}$$

ووجود هذا الشغل يعني أن هناك طاقة وضع U مخزنة في النظام

المكون من ثنائي القطب والمجال الكهربائي مقدارها يساوي الشغل

المبذول، أي أن:

$$U = \vec{P} \cdot \vec{E}$$

• مثال: وُضع ثنائي قطب شحنته $(\pm 2.5 \mu C)$ والمسافة بين الشحنتين

(0.1 mm) في مجال كهربائي شدته $(4 \times 10^{10} \text{ N/C})$ بحيث يصنع

ثنائي القطب مع المجال زاوية مقدارها (50°) . أوجد مقدار طاقة

الوضع المخزنة في النظام.

$$U = \vec{P} \cdot \vec{E}$$

• الحل:

$$= (2aq) E \cos \theta$$

$$= (0.1 \times 10^{-3}) (2.5 \times 10^6) (4 \times 10^{10}) \cos 50^\circ$$

$$\therefore U = 6.427 \text{ J}$$