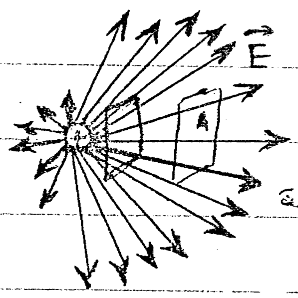
الفيض الكهربائي :- Electric Flux

نفترض أنه هناك شحنة كهربائية موجبة على شكل نقطة بحيث يخرج منها خطوط قوة المجال الكهربائي.

فلو أخذنا لوحاً مساحته (A) وحركناه عمودياً عكس اتجاه خطوط قوة هذا المجال. ماذا تلاحظ؟



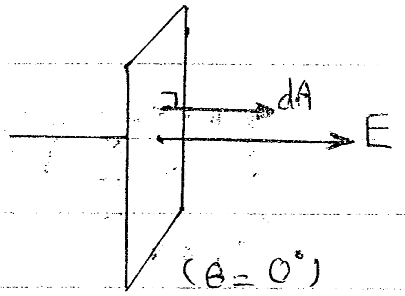
نلاحظ أنه كلما اقتربنا من مصدر الشحنة النقطية هناك زيادة في عدد خطوط المجال على وحدة المساحة وكلما ابتعدنا تقل هذه الخطوط.

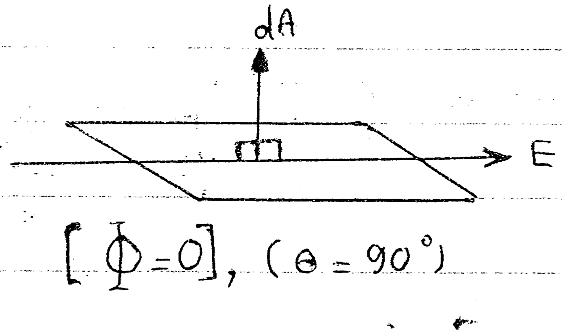
وعليه، يمكن تعريف الفيض الكهربائي لمساحة ما بأنه:

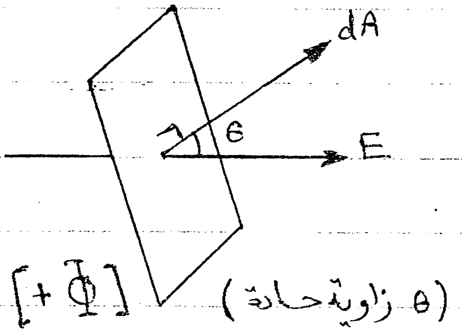
"هو قياس لعدد خطوط المجال الكهربائي التي تخترق سطحاً ما"

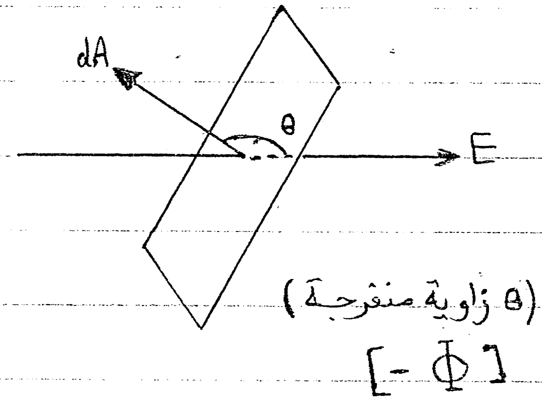
ويرمز له بالرمز (Φ).

- عندما يكون اتجاه المجال الكهربائي في نفس اتجاه المساحة أي أن خطوط المجال تخترق عمودياً المساحة فإن الفيض الكهربائي خلال هذه المساحة يكون أكبر ما يمكن ($\theta = 0^\circ$).
- وعندما يكون اتجاه المجال الكهربائي عمودياً على اتجاه المساحة أي عندما يكون المجال موازياً لمستوى المساحة، فإن الفيض الكهربائي يساوي صفراً ($\theta = 90^\circ$).
- أما إذا كان اتجاه المساحة يصنع زاوية مقدارها (θ) مع خطوط المجال فإن الفيض الكهربائي في هذه الحالة يكون عدد خطوط المجال المارة خلال المساحة، حيث أن الفيض الكهربائي يكون موجب عندما تكون الزاوية التي يصنعها المجال الكهربائي مع متجه المساحة زاوية حادة.
- ويكون الفيض الكهربائي سالباً عندما تكون الزاوية التي يصنعها المجال الكهربائي مع متجه المساحة زاوية منفرجة.









⇐ ويمكن أن نلخص ماسبق كالآتي :

حيث أن : $\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$

حيث : ($\vec{E}$) المجال الكهربائي التي يمر خلال المساحة ($d\vec{A}$) .

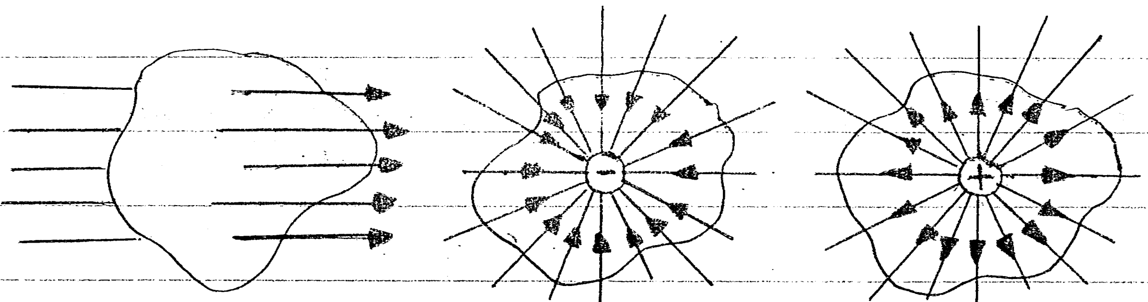
- ووحدات (Φ) هي وحدات مجال مضروبة في وحدات مساحة .

أي : $(\frac{N}{C} \cdot m^2)$.

⇐ أما إذا كانت المساحة مغلقة [أي سطح مغلق] ، فإن عدد الخطوط الداخلة تساوي عدد الخطوط الخارجة ، وإذا اعتبرنا أن إشارة الخطوط الداخلة سالبة وإشارة الخطوط الخارجة موجبة فإن الفيض الكهربائي يكون في هذه الحالة صفراً .

- وإذا كان السطح المغلق نفسه يحتوي على شحنة موجبة فإن خطوط المجال تكون خارجة منه ويُقال عن (Φ) أنها موجبة .

والعكس إذا كان السطح يحتوي على شحنة سالبة ، فإن خطوط المجال تكون داخلة إلى السطح ، ويُقال عن (Φ) في هذه الحالة أنها سالبة .



$[\Phi = zero]$ $[-\Phi]$ $[+\Phi]$

- ولإيجاد الفيض الكهربائي لسطح مغلق فإننا نكامل:

$$\Phi = \oint E \cdot dA$$

أي أننا نقسم السطح إلى مساحات صغيرة جدًا مساحة كل منها (dA) ونجد حاصل الضرب القياسي لـ $(E \cdot dA)$ لكل حالة، ثم نجمع جمعاً جبرياً. إشارة التكامل $\oint$ تعني أن التكامل يكون على السطح المغلق.

- مثال ①: وُضع مربع مساحته $(0.3\ m^2)$ في مجال كهربائي منتظم شدته $(400\ N/C)$. أوجد الفيض الكهربائي خلاله إذا كانت الزاوية بين المجال ومتجه المساحة:

أ) $0°$ ج) $90°$ هـ) $180°$

ب) $45°$ د) $120°$

- الحل: أ)

$$\Phi = E A \cos\theta$$

$$= (400)(0.3)\cos(0) = 120\ \frac{N}{C}.m^2$$

ب) $\Phi = (400)(0.3)\cos(45) = 84.85\ \frac{N}{C}.m^2$

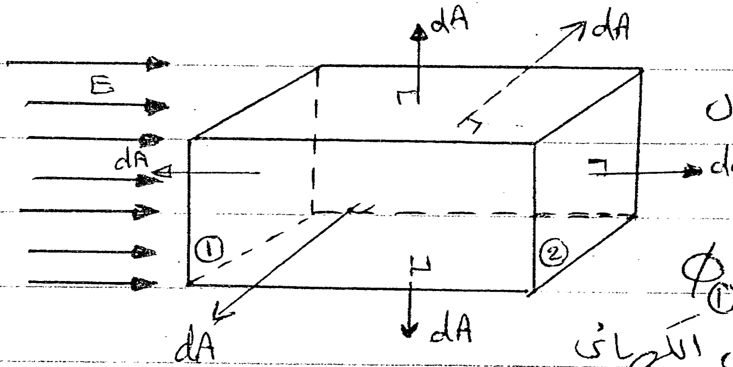
ج) $\Phi = (400)(0.3)\cos(90) = Zero$

د) $\Phi = (400)(0.3)\cos(120) = -60\ \frac{N}{C}.m^2$

هـ) $\Phi = (400)(0.3)\cos(180) = -120\ \frac{N}{C}.m^2$

• مثال 2 : وُضع متوازي مستطيلات أبعاده $(0.5, 0.5, 2)\,m$ في مجال كهربائي منتظم كما في الشكل. أوجد الفيض الكهربائي خلال أسطح متوازي المستطيلات.

• الحل :



الفيض الكهربائي خلال الوجه ① :

$$\phi_{①} = \int E \cdot dA$$

وحيث أن اتجاه المجال الكهربائي في نفس اتجاه المساحة [متجه المساحة يكون عمودياً على المساحة واتجاهه يكون دائماً خارج السطح المغلق] فإن :

$$\phi_{①} = EA\cos\theta = E(0.5)^2\cos 0 = 0.25\,E\ (\frac{N}{C}.m^2)$$

ولكن الفيض الكهربائي خلال الوجه ② يساوي سالب مقدار الفيض خلال الوجه ① ، حيث أن الزاوية بين المجال الكهربائي واتجاه المساحة تساوي (180°) ، أي أن :

$$\phi_{②} = EA\cos\theta = E(0.5)^2\cos\pi = -0.25\,E\ (\frac{N}{C}.m^2)$$

بالنسبة لأوجه متوازي المستطيلات الأربع الباقية ، نلاحظ أن المجال الكهربائي عمودياً على متجه المساحة وبالتالي فإن الفيض الكهربائي خلال هذه الأسطح يساوي صفراً ، وذلك لأن :

$$\phi = E \cdot dA = E\,dA\cos 90^\circ = \text{Zero}$$

وإذا جمعنا الفيض خلال جميع الأسطح ، فإن المجموع يكون :

$$\Phi = \phi_{①} + \phi_{②} + \phi_{\text{لبقية الأوجه}}$$
$$= 0.25E - 0.25E + 0 = \text{Zero}.$$

وهي نتيجة لا يجب أن نستغربها ، فقد ذكرنا أن السطح المغلق

الذي لا يحتوي على شحنة تكون عدد خطوط المجال الداخلة فيه تساوي عدد خطوط المجال الخارجة منه ، ويكون الفيض خلاله يساوي صفراً .

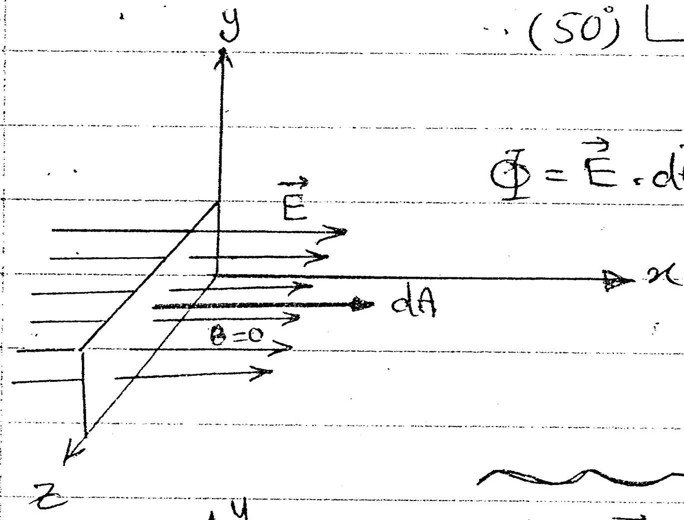
- مثال (3) : مجال كهربائي منتظم شدته $(8\times10^4\ N/C)$ في الاتجاه الموجب للمحور (x) ، أوجد الفيض الكهربائي خلال مستطيل أبعاده $(15\ cm)$ و $(25\ cm)$ في الحالات الآتية :

أ - عندما يكون المستطيل في المستوى (yz) .

ب - عندما يكون المستطيل في المستوى (xz) .

ج - عندما يكون متجه مساحة المستطيل يصنع زاوية مع المحور (x) مقدارها (50°) .

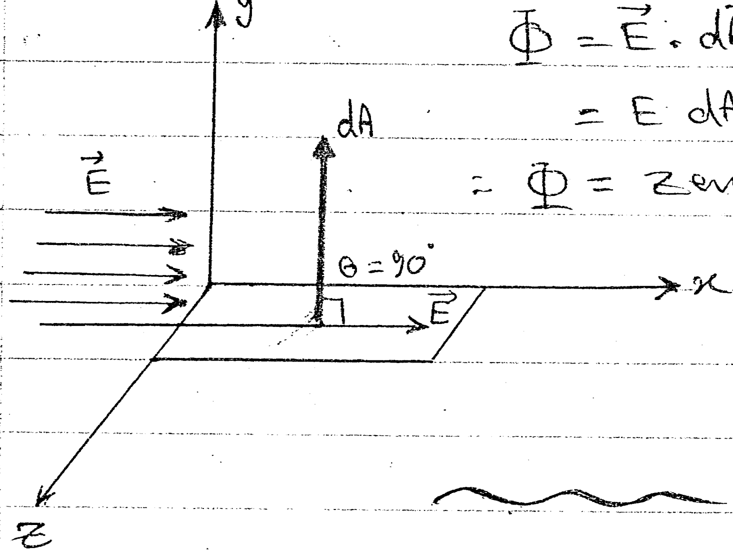
- الحل :



أ - $\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A} = EA\cos\theta \ , \theta=0$

$= (8\times10^4)(15\times25)\times10^{-4}\cos 0$

$\Phi = 3\times10^3\ \frac{N}{C}.m^2$

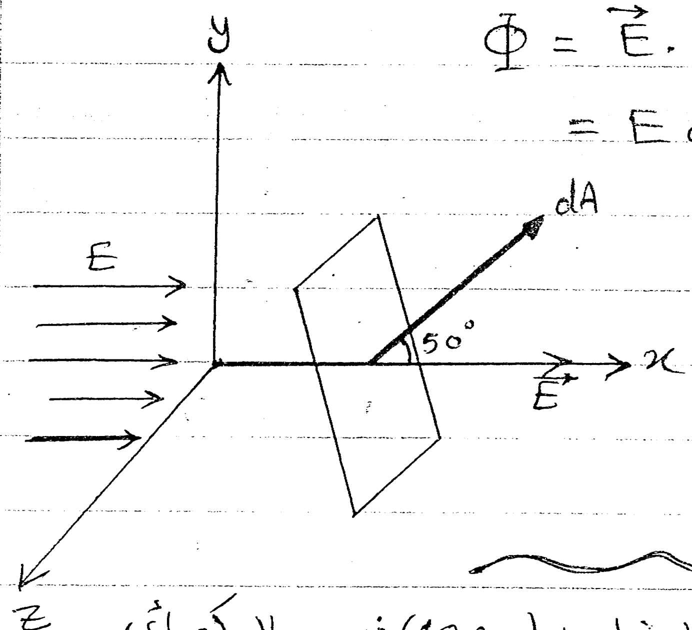


ب - $\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A}$

$= E\ dA\cos\theta \ ; \theta=90^\circ$

$\therefore \Phi = \text{Zero} \ , \cos 90 = 0$

ج-



$$\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

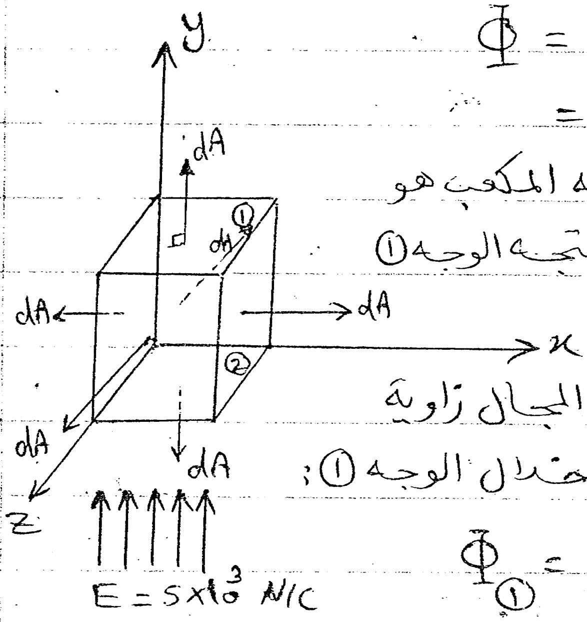
$$= E\,dA\cos\theta \quad ; \quad \theta = 50^\circ$$

$$\Phi = (8\times10^{4})(15\times25)\times10^{-4}\cos 50$$

$$= 1.93\times10^{3}\ \frac{N}{C}\cdot m^2$$

• مثال ④ : وُضع مكعب طول ضلعه (10 cm) في مجال كهربائي شدته (5×10^{3} N/C) في الاتجاه الموجب للمحور (y) كما في الشكل. أوجد الفيض الكهربائي خلال أوجهه الستة.

• الحل:



$$\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$= E\,dA\cos\theta$$

اتجاه مساحة كل وجه من أوجه المكعب هو العمودي الخارج من السطح، فمتجه الوجه ① يصنع مع المجال زاوية مقدارها (0°)، بينما الوجه ② يصنع مع المجال زاوية مقدارها (180°)، فيكون الفيض خلال الوجه ①:

$$\Phi_{①} = 5\times10^{3}\times(0.1)^2\cos 0$$

$$= 50\ \frac{N}{C}\cdot m^2$$

$$\Phi_{②} = 5\times10^{3}\times(0.1)^2\cos\pi$$

$$= -50\ \frac{N}{C}\cdot m^2$$

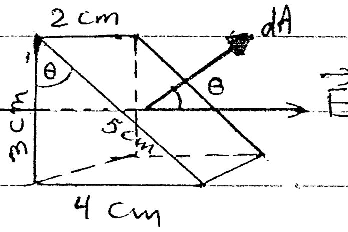
أما أوجه المكعب الأخرى فإن متجه مساحاتها يصنع مع المجال زاوية مقدارها (90°)، فيكون الفيض خلال أوجهها صفراً ($\cos 90 = 0$).

فيكون الفيض الكهربائي الكلي خلال المكعب: $\Phi = 50 - 50 + 0 = \text{Zero}$

وقد كنا نستطيع أن نعرف الاجابة مسبقاً، حيث أن الفيض الكهربائي لأي سطح مغلق يساوي دائماً صفراً، إذا كان لا يحتوي شحنات.

- مثال (5): أوجد الفيض الكهربائي خلال السطح المغلق الذي بالشكل إذا كانت شدة المجال $(2.5\times10^{4}\ N/C)$.

- الحل:



الفيض الكهربائي خلال السطح الذي أبعاده $(2cm\times3cm)$:

$$\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA\cos\theta \ ;\ \theta=\pi$$
$$= 2.5\times\cancel{10^{4}}\times2\times3\times\cancel{10^{-4}}\cos\pi$$
$$= -15\ \frac{N}{C}\cdot m^2$$

والفيض الكهربائي خلال السطح المائل الذي أبعاده $(2cm\times5cm)$:

$$\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA\cos\theta \ ;\ \cos\theta=\frac{3}{5}$$
$$= 2.5\times\cancel{10^{4}}\times2\times\cancel{5}\times\cancel{10^{-4}}\left(\frac{3}{\cancel{5}}\right)$$
$$= 15\ \frac{N}{C}\cdot m^2$$

أما الفيض الكهربائي خلال الأوجه الباقية يكون صفراً، لأن المجال الكهربائي عمودي على متجه المساحة. فيكون الفيض الكهربائي الكلي خلال الأسطح: $\Phi = -15+15+0 = Zero$

وهي نتيجة متوقعة حيث أن السطح مغلق ولا يحتوي شحنة، فيكون الفيض الكهربائي الداخل يساوي الفيض الكهربائي الخارج.

قانون جاوس : Gauss's Law

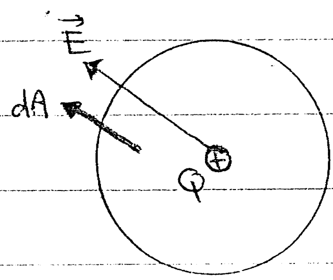
العلاقة بين الفيض الكهربائي خلال سطح مغلق والشحنة التي يحتويها هذا السطح هي قانون جاوس. فإذا وضعنا شحنة نقطية موجبة (+Q) في مركز كرة افتراضية (2R) فإن الفيض الكهربائي خلال سطح الكرة يُعطى بالعلاقة:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

حيث ($\vec{E}$) المجال الكهربائي الناتج عن الشحنة (Q) عند سطح الكرة وهو: $\left[\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{R^2}\right]$ ،

واتجاهه عند كل نقطة على السطح يكون موازياً لمتجه المساحة عند تلك النقطة، فتكتب المعادلة الأخيرة كالتالي:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\oint\frac{dA}{R^2}$$



والتكامل على السطح الكروي يعطي المساحة السطحية للكرة، أي ($4\pi R^2$)، فتكون:

$$\Phi = \frac{Q}{\cancel{4\pi}\epsilon_0}\cdot\frac{\cancel{4\pi R^2}}{\cancel{R^2}}$$

أو:

$$\Phi = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

فنلاحظ أن الفيض الكهربائي لا يعتمد على قطر الكرة، وهو في الحقيقة لا يعتمد حتى على شكل السطح المغلق، سواء كان هذا الشكل منتظماً أو غير منتظم، وإنما يعتمد فقط على مقدار الشحنة التي بداخله، ولا يعتمد على موضع الشحنة داخل السطح.

وإذا احتوى السطح المغلق - والذي سنسميه من الآن فصاعداً "بسطح جاوس" (Gaussian Surface) على أكثر من شحنة فإن

(Q_{in}) تمثل الشحنة الصافية (net charge)، فمثلاً إذا احتوى السطح المغلق على الشحنات النقطية التالية ($-3\mu C$) و ($5\mu C$) و ($10\mu C$) و ($-20\mu C$)، فإن (Q_{in}) تساوي:

$$(-20 + 10 + 5 - 3)\mu C = -8\mu C$$

وعليه فإنه من الملائم أن نكتب المعادلة كالتالي:

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{in}$$

حيث: ($\sum$) المجموع الجبري للشحنات داخل السطح الجاوسي،

⇐ أما إذا كانت الشحنة متصلة (Continuous) فإن:

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, dV$$

حيث: (ρ) الكثافة الحجمية للشحنة الموجودة على الحجم (V) والتي يحتويها السطح الجاوسي.

المعادلات التالية: $\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{in} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, dV$

هي قانون جاوس، والتي عند تطبيقها يجب مراعاة التالي:

1. يكون الفيض الكهربائي صفراً، إذا كان المجموع الجبري للشحنات داخل السطح الجاوسي يساوي صفراً.
2. يعتمد التكامل على مجموع الشحنات داخل السطح الجاوسي، وليس على موضعها.
3. الشحنات خارج السطح الجاوسي لا تؤثر في نتيجة التكامل.

كما أنه يجب أن نلاحظ أن قانون جاوس يكون مفيداً فقط إذا كان السطح الجاوسي متماثلاً مثل الكرة والاسطوانة اللانهائية والصفيحة اللانهائية لأنه سيكون من السهل إيجاد التكامل في مثل هذه الحالات.

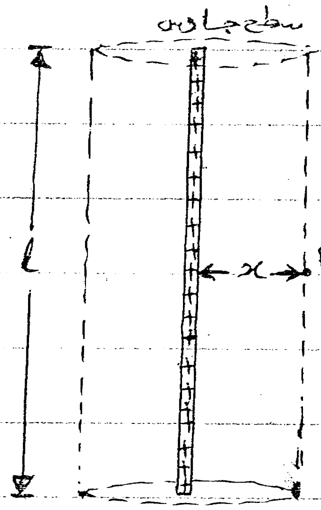
مثال ①: أوجد الفيض الكهربائي خلال سطح كروي قطره (40 cm) في مركزه شحنة مقدارها (3.54 nC)؟

الحل:

$$\Phi = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{3.54 \times 10^{-9}}{8.85 \times 10^{-12}} = 400 \ \frac{N}{C} \cdot m^2$$

ولا يعتمد على الشكل الهندسي للسطح المغلق.

- مثال ②: أوجد المجال الكهربائي لسلك طويل عليه شحنة طولية منتظمة كثافتها (λ) عند نقطة تبعد مسافة (x) عن السلك ؟



- الحل:

لاحظ أن هذه المسألة قد تم حلها سابقاً. ولكننا - ولوجود تماثل هندسي - سنحل المسألة باستخدام قانون جاوس وذلك برسم سطح جاوس افتراضي حول السلك كما في الشكل، وهو عبارة عن اسطوانة قطرها ($2x$) وطولها (l)، ومحورها ينطبق على السلك. وباستخدام قانون جاوس:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_1 \vec{E} \cdot d\vec{A} + \oint_2 \vec{E} \cdot d\vec{A} + \oint_3 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

حيث التكامل الأول على السطح الجانبي للإسطوانة، والتكامل الثاني على السطح العلوي للإسطوانة، والتكامل الثالث على السطح السفلي للإسطوانة، و (λl) مقدار الشحنة الكلية التي يحتويها السطح الجاوسي.

في التكامل الأول، يكون اتجاه المجال الكهربائي ومتجه المساحة عند كل نقطة على السطح هو نفس الاتجاه، أي أن الزاوية بين المتجهين ($\vec{E}$) و ($d\vec{A}$) تكون صفراً. أما متجه المساحة للسطح العلوي والسفلي فإنه عمودي على المجال الكهربائي، أي أن الزاوية بين المتجهين (90°)، وعليه فإن:

$$(2\pi x l)E + 0 + 0 = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

أو:

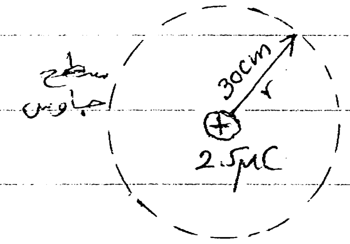
$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{x}$$

وهو المجال الكلي الناتج عن السلك، والذي

وجدناه بصعوبة في المسألة المحلولة سابقاً ، لاحظ أن المجال لا يعتمد على طول الإسطوانة التخيلية .

- مثال ③ : باستخدام قانون جاوس ، أوجد المجال الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية مقدارها $(2.5\mu C)$ عند نقطة تبعد عنها مسافة $(30\ cm)$ ؟

- الحل : لإيجاد المجال الكهربائي ، نرسم سطحاً جاوسياً بحيث يكون كرة مركزها الشحنة ونصف قطرها $(30\ cm)$ كما في الشكل ، وباستخدام



قانون جاوس : $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$

والتكامل على (dA) يعطي المساحة السطحية للكرة وهو $(4\pi r^2)$

أي أن : $E(4\pi r^2) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$

أو : $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_{in}}{r^2}$

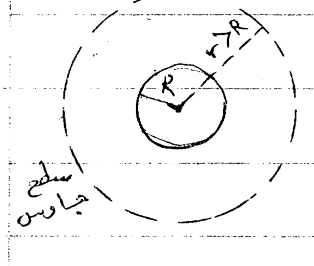
وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها سابقاً ، وبالتعويض :

$$E = 9\times10^{9}\ \frac{2.5\times10^{-6}}{(30\times10^{-2})^2} = 2.5\times10^{5}\ N/C$$

- مثال ④ : كرة معدنية نصف قطرها (R) عليها شحنة مقدارها (q) . أوجد المجال الكهربائي عند :

(أ) $r>R$ (ب) $r=R$ (ج) $r<R$

- الحل :



(أ) نرسم سطحاً جاوسياً على شكل كرة لها نفس مركز الكرة المعدنية ، ونصف قطرها (r) بحيث يكون

$(r > R)$ كما في الشكل السابق، ومن قانون جاوس:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

أو:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

(ب) عند سطح الكرة، أو $(r = R)$ يكون سطح جاوس هو نفسه سطح الكرة، وبالتالي تكون:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2}$$

(ج) في هذه الحالة يكون قطر السطح الجاوسي أصغر من قطر الكرة المعدنية، وحيث أن كل الشحنة على الجسم المعدني تكون على السطح، فإن السطح الجاوسي لا يحتوي على أي شحنة، وبالتالي تكون $(E = 0)$. أي أن: المجال الكهربائي داخل الكرة $(r < R)$ يكون صفراً.

الموصلات: Conductors

الموصلات الكهربائية الجيدة هي التي تكون إلكتروناتها حرة الحركة، وعندما تكون الإلكترونات قد استقرت في الموصل المعزول وأصبحت في حالة اتزان كهربائي فإنه يمكن أن نستنتج الآتي:

(أ) المجال الكهربائي داخل الموصل يكون صفراً.

نفرض العكس، أي نفرض أن $(E \neq 0)$ داخل الموصل، أي أنه توجد قوة كهربائية، وبالتالي فإن الإلكترونات ستتحرك تحت تأثير المجال، ولكن الإلكترونات في حالة اتزان مما يعني أن المجال الكهربائي داخل الموصل لابد أن يكون صفراً.

(ب) الشحنة تكون كلها مستقرة على سطح الموصل.

لو وجدت شحنة داخل الموصل، فإن مجالاً كهربائياً سينتج عنها، ولكن المجال الكهربائي داخل الموصل يساوي صفراً، ما يعني عدم

وجود أي شحنة داخل الموصل.

ج) المجال الكهربائي عمودي على سطح الموصل.

لو لم يكن المجال عمودياً على سطح الموصل لكانت له مركبة مماسية للسطح تجعل الإلكترونات تتحرك، ولكن سبق أن فرضنا أن الإلكترونات في حالة توازن، مما يعني أن المجال لابد أن يكون عمودياً على السطح ومقداره قريباً من السطح يكون $\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)$ حيث (σ) كثافة الشحنة السطحية.

د) - الشحنة المستحثة (induced charge) على الموصل تساوي عكس الشحنة المؤثرة فإذا وضعنا شحنة $(+Q)$ داخل فجوة في موصل كما في الشكل، وأخذنا سطحاً جاوسياً واستخدمنا قانون جاوس:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{in}$$

ولكن $(\vec{E})$ داخل الموصل تساوي صفراً، مما يعني أن $(Q_{in} = 0)$ أي أن: $Q_{in} = 0 = +Q + Q_{induced}$

أي أن: $+Q = -Q_{induced}$

أي أن شحنة مستحثة ستتولد على السطح الداخلي للموصل نتيجة الشحنة المؤثرة، وتكون مساوية في المقدار للشحنة المؤثرة، ولكن تخالفها في الإشارة.

- تمرين ①: قشرة كروية رقيقة (60 mm) عليها شحنة مقدارها (90 nC). أوجد:

أ - كثافة الشحنة السطحية.

ب - المجال الكهربائي داخل الكرة.

ج - المجال الكهربائي عند سطح الكرة.

د - المجال الكهربائي عند (r=50 mm)، أي خارج الكرة.