(14)

• الحل :

أ). $\because \sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{90 \times 10^{-9}}{4(3.14)(30 \times 10^{-3})^2}$

$= 7.96 \times 10^{-6}\ C/m^2$

ب). نرسم سطحاً جاوسياً نصف قطره أقل من نصف قطر القشرة الكروية ومتمركز معها، وباستخدام قانون جاوس:

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$

واضح أن المجال الكهربائي يساوي صفراً، لأن السطح الجاوسي لا يحتوي على شحنة كهربائية، أي أن داخل القشرة يكون: $(E = 0)$.

ج). عند سطح الكرة يكون السطح الجاوسي هو نفسه سطح القشرة الكروية، وباستخدام قانون جاوس:

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$

$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_{in}}{r^2}$

$\therefore E = 9 \times 10^9 \frac{90 \times 10^{-9}}{(30 \times 10^{-3})^2} = 9 \times 10^5 \frac{N}{C}$

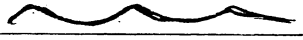
د). لإيجاد المجال الكهربائي خارج سطح الكرة نرسم سطحاً جاوسياً قطره أكبر من قطر القشرة، أي في هذه الحالة $(r = 50mm)$، وباستخدام قانون جاوس:

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$

$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{in}}{r^2}$

$\therefore E = 9 \times 10^9 \frac{90 \times 10^{-9}}{(50 \times 10^{-3})^2} = 3.24 \times 10^5\ N/C$.

← نلاحظ في (ج) و (د) أن المجال الكهربائي الناتج عن القشرة الكروية هو نفسه المجال الناتج عن شحنة متمركزة في نقطة والمجال الناتج عن كرة معدنية :



• مثال (2) : شحنة نقطية مقدارها $(+2Q)$ في مركز قشرة كروية معدنية عليها شحنة مقدارها $(-5Q)$.
فإذا كان نصف قطر القشرة الداخلي (a) والخارجي (b) ، أوجد :

أ- الشحنة على السطح الداخلي للقشرة .

ب- الشحنة على السطح الخارجي للقشرة .

ج- المجال الكهربائي عند : i) $r<a$

ii) $b>r>a$

iii) $r>b$

• الحل :

أ. الشحنة المستحثة على السطح الداخلي للقشرة تساوي الشحنة $(+2Q)$ ولكن تخالفها في الإشارة ، أي أن الشحنة على السطح الداخلي للقشرة $(-2Q)$.

ب. الباقي من الشحنة $(-5Q)$ يكون على السطح الخارجي ، أي أن الشحنة على السطح الخارجي للقشرة يكون $(-3Q)$.

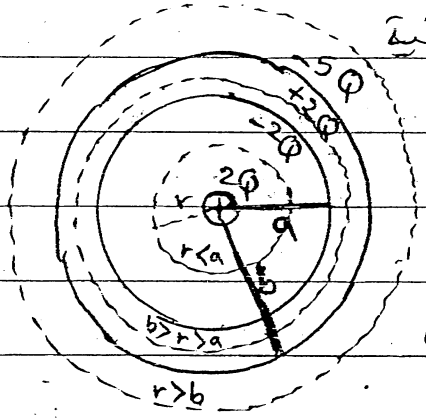
ج. لإيجاد المجال الكهربائي عند $(r<a)$ ، نرسم سطحاً جاوسياً يكون عبارة عن كرة مركزها الشحنة $(+2Q)$ ونصف قطرها (r) كما في الشكل ، وباستخدام قانون جاوس :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_{in}}{r^2} \; ; \; Q_{in} = 2Q$$

$$\therefore E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

د. المجال الكهربائي في وسط القشرة المعدنية يكون صفراً، لأنه لو رسمنا سطحاً جاوسياً بحيث يكون نصف قطره $(a < r < b)$ فإن السطح يحتوي على شحنتين كهربائيتين مجموعهما صفر، وهما الشحنتان $(+2Q)$ و $(-2Q)$.

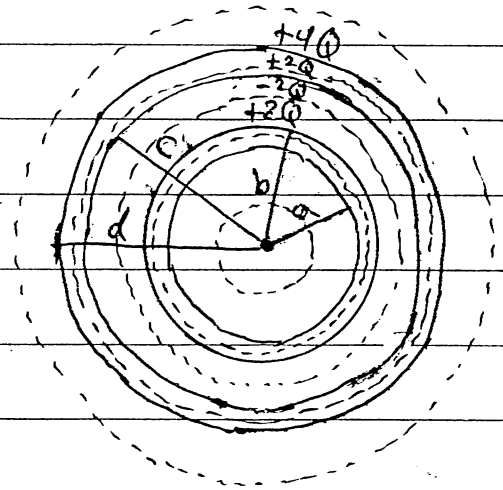


هـ. نرسم سطحاً جاوسياً نصف قطره $(r > b)$، وباستخدام قانون جاوس:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\Phi_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{+2Q - 5Q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(-3Q)}{r^2}$$

- **تمرين ③**: قشرتان كرويتان معدنيتان متحدتا المركز كما في الشكل، على الكرة الداخلية شحنة مقدارها $(+2Q)$ وعلى الخارجية شحنة مقدارها $(+4Q)$، أوجد المجال الكهربائي عند:



أ- $r < a$

ب- $b > r > a$

ج- $c > r > b$

د- $d > r > c$

هـ- $r > d$

- **الحل:**

لإيجاد المجال الكهربائي في كل حالة نرسم أسطحاً جاوسية، وهي عبارة عن كرات متحدة المركز مع القشرتين وأنصاف أقطارها (r)، ونستخدم قانون جاوس:

أ) عند $(r<a)$:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{\Phi_{in}}{\epsilon_0}$$

وذلك لعدم وجود شحنة داخل السطح الجاوسي $\Leftarrow (E=0)$

ب) عند $(b>r>a)$:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{\Phi_{in}}{\epsilon_0}$$

وذلك لعدم وجود شحنة داخل سطح جاوس $\Leftarrow (E=0)$.

ج) عند $(c>r>b)$:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{\Phi_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{+2\Phi}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\Phi}{r^2}$$

د) عند $(d>r>c)$:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{\Phi_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{+2\Phi - 2\Phi}{\epsilon_0} \Rightarrow E = 0$$

وذلك لأن مجموع الشحنات داخل السطح الجاوسي يساوي صفراً .

هـ) عند $(r>d)$:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{\Phi_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{+2\Phi - 2\Phi + 2\Phi + 4\Phi}{\epsilon_0} = \frac{+6\Phi}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{6\Phi}{r^2}$$

- تمرين ④ : تحمل كرة غير موصلة نصف قطرها (a) شحنة مقدارها (Φ) موزعة داخلها بانتظام. أوجد المجال الكهربائي عند :

أ. $r < a$ « أي داخل الكرة »

ب. $r = a$ « أي على سطح الكرة »

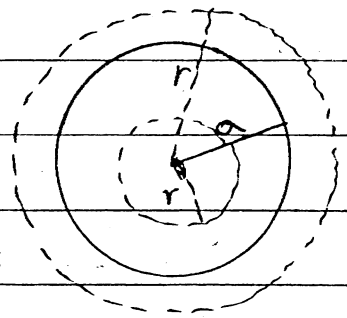
ج. $r > a$ « أي خارج الكرة »

• **الحل:**

أ) لإيجاد المجال الكهربائي عند ($r < a$) نرسم سطحاً جاوسياً كروياً متحد المركز مع الكرة كما في الشكل، وباستخدام قانون جاوس:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

في هذه الحالة يحتوي السطح الجاوسي على جزء من الشحنة الكلية وليس الشحنة كلها، ومقدار هذا الجزء أي Q_{in} يساوي الكثافة الحجمية (ρ) مضروباً في حجم السطح الجاوسي، أو:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\int \rho \, dV}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int dV$$

أو:

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\epsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

أو:

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

أي أن: المجال الكهربائي يتناسب طردياً مع المسافة. ويمكن كتابة المعادلة السابقة بدلالة الشحنة الكلية (Q) إذا علمنا أن: $Q = \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)\rho$

$$\rho = \frac{Q}{\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)}$$

وبالتعويض عن (ρ):

$$E = \frac{[Q/(\frac{4}{3}\pi a^3)]\, r}{3\epsilon_0}$$

أو:

$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3}$$

ب) ولإيجاد المجال الكهربائي عند سطح الكرة ($r=a$) يكون السطح الجاوسي هو نفسه سطح الكرة، والشحنة التي يحتويها السطح الجاوسي هي الشحنة الكلية (Q)، وباستخدام قانون جاوس:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi a^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{a^2}$$

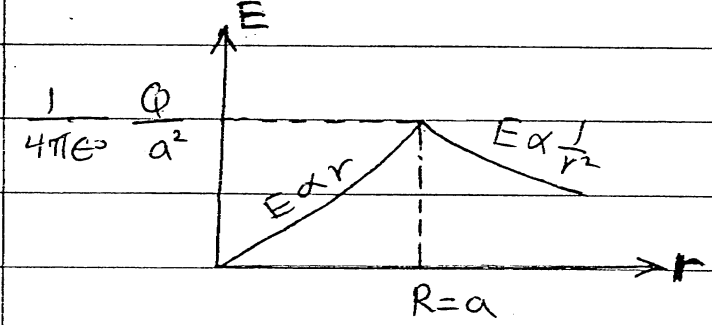
أي أن: المجال الكهربائي يبدو وكأنه ناتج عن شحنة (Q) موجودة في مركز الكرة.

ج) ولإيجاد المجال الكهربائي خارج الكرة ($r>a$) نرسم سطحاً جاوسياً نصف قطره (r)، ولكن نلاحظ أن السطح الجاوسي يحتوي على الشحنة الكلية (Q)، وباستخدام قانون جاوس:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$$

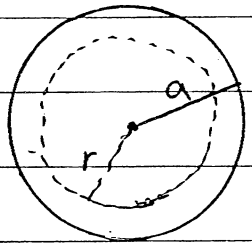
مرة أخرى يبدو المجال وكأنه ناتج عن شحنة (Q) في مركز الكرة، وإذا رسمنا العلاقة بيانياً كما في الشكل التالي نلاحظ أن المجال الكهربائي يزداد خطياً كلما ابتعدنا عن مركز الكرة حتى يصل مداه عند السطح، وعند السطح يبدأ المجال في النقصان ($E \propto \frac{1}{r^2}$) حتى يتلاشى في ما لانهاية.



- مثال (5): كرة غير موصلة نصف قطرها (a) عليها شحنة كثافتها الحجمية تُعطى بالعلاقة $(\rho = Br)$، حيث (B) مقدار ثابت. أوجد المجال الكهربائي عند:

أ- $r < a$.

ب- $r > a$.



- الحل:

أ) لإيجاد المجال الكهربائي عند $(r < a)$، أي داخل الكرة، نرسم سطحاً جاوسياً كروياً نصف قطره (r) ومتمركز مع الكرة كما في الشكل، وباستخدام قانون جاوس:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\Phi_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, dV = \frac{B}{\epsilon_0} \int r \, dV$$

وبالنسبة للكرة يُعطى (dV) بالعلاقة التالية:

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

وبالتعويض عن (dV):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{B}{\epsilon_0} \int r^3 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{B}{\epsilon_0} \left[\int_{r=0}^{r} r^3 dr\right]\left[\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta\right]\left[\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi\right]$$

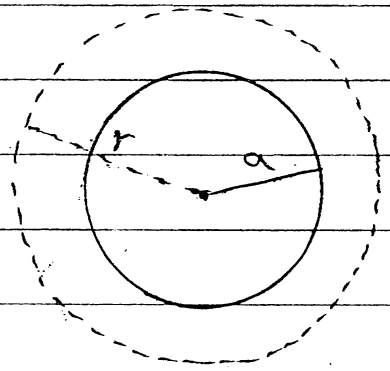
$$E(4\pi r^2) = \frac{B}{\epsilon_0} \left(\frac{r^4}{4}\right)\left(-\cos\pi + \cos 0\right)(2\pi)$$

($-\cos\pi$: $\pi \to -1$، فالقيمة $+1$؛ $\cos 0 = 1$)

$$E(4\pi r^2) = \frac{B}{\epsilon_0} \left(\frac{r^4}{4}\right)(2)(2\pi)$$

$$E = \frac{B r^2}{4\epsilon_0}$$

ب). ولإيجاد المجال الكهربائي خارج الكرة، أي عند $(r>a)$
نرسم سطحاً جاوسياً كروياً نصف قطره (r) بحيث
يكون $(r>a)$ كما في الشكل، وباستخدام
قانون جاوس:



$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{B}{\epsilon_0}\oint r\,dV$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{B}{\epsilon_0}\int r^3 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{B}{\epsilon_0}\left[\int_{r=0}^{a} r^3\,dr\right]\left[\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta\right]\left[\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi\right]$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{B}{\epsilon_0}\left(\frac{a^4}{4}\right)(2)(2\pi)$$

$$E = \frac{B}{4\epsilon_0}\left(\frac{a^4}{r^2}\right)$$

- تمرين (6): إسطوانة طويلة غير موصلة نصف قطرها (a) تحمل شحنة كثافتها الحجمية (ρ). أوجد المجال الكهربائي داخل وخارج الإسطوانة.
- الحل: لإيجاد المجال الكهربائي داخل الإسطوانة نرسم سطحاً جاوسياً إسطوانياً متحد المحور مع الاسطوانة وطوله (l) بحيث يكون نصف قطره (r) أصغر من (a)، وباستخدام قانون جاوس:

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E(2\pi r l) = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho\, dV = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho\,\pi r^2 l)$$

$$\therefore E = \frac{\rho}{2\epsilon_0}(r)$$

ولإيجاد المجال الكهربائي خارج الاسطوانة يكون طول السطح الجاوسي الاسطواني (l) ونصف قطره (r) بحيث $(r>a)$، وباستخدام قانون جاوس؛

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

$$E(2\pi r l) = \frac{\rho}{\epsilon_0}(\pi a^2 l)$$

$$\therefore E = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(\frac{a^2}{r}\right)$$