الجهد الكهربائي : Electric Potential

الجهد الكهربائي هو مقدار الشغل المبذول لتحريك الشحنة ، أما فرق الجهد بين نقطتين فهو مقدار التغير في طاقة الوضع مقسوم على قيمة الشحنة .

$$V = \frac{W_{ab}}{q} = \frac{U_a}{q} - \frac{U_b}{q} = V_a - V_b$$

يُقاس فرق الجهد بين نقطتين بوحدة (J/C) والتي سميت فيما بعد بالفولت تقديراً لمجهودات العالم الفيزيائي الايطالي ألساندرو فولت .

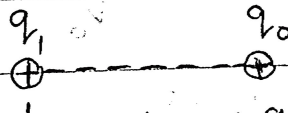
حيث :

$$1\,Volt = \frac{1J}{1C} = \frac{\text{جول}}{\text{كولوم}}$$

- **ملاحظة :** عندما نتكلم عن "الجهد الكهربائي" عند نقطة معينة فإن المقصود دائماً هو "فرق الجهد الكهربائي" بين هذه النقطة ونقطة أخرى الجهد فيها يكون صفراً .

- **الجهد الكهربائي لشحنة نقطية :**

يمكن حساب الجهد الكهربائي لنقطة معينة تبعد مسافة (d) عن شحنة نقطية (q_1) فإذا كانت الشحنة (q_0) موضوعة في النقطة المراد قياس فرق الجهد عندها .



فإن طاقة الوضع لهذه الشحنة تكون :

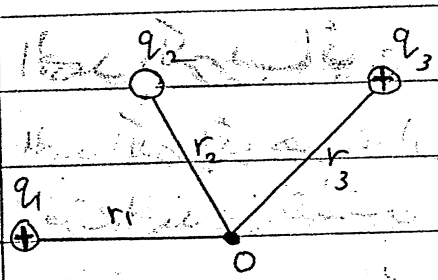
$$U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_1 q_0}{r} \quad (Joule).$$

وبالقسمة على الشحنة (q_0) نحصل على :

$$V_{ab} = \frac{U_a}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_1}{r} \quad (Volt).$$

وبهذا يمكن حساب الجهد الكلي لأي نقطة تقع بأبعاد مختلفة من شحنات كهربائية .

(2)



$$V_T = V_{01} + V_{02} + V_{03}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon}\left[\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right]$$

ولهذا يعتبر الجهد الكهربائي كمية "غير متجهة" [قياسية].

الجهد الكهربائي والمجال الكهربائي:

Electrical Potential and Electrical Field

إذا اعتبرنا أن الشحنة (q_0) قد تحركت من النقطة (A) إلى النقطة (B) مسافة مقدارها (d) تحت تأثير قوة مقدارها (F) ناتجة عن المجال الكهربائي.

أي:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

ولكن:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

فيكون الشغل المبذول إذا كانت القوة منتظمة وفي نفس اتجاه المسافة:

$$W = q E d$$

أي أن المعادلة: $\left(\frac{W_{A\to B}}{q_0} = V_B - V_A\right)$ يمكن كتابتها كالتالي:

$$W = q_0 (V_B - V_A) = q_0 E d$$

أو:

$$V_B - V_A = E d$$

ومن المعادلة الأخيرة يمكن أن نستنتج وحدة أخرى للمجال الكهربائي وهي (V/m)، حيث:

$$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

* $1\ eV = 1.6\times10^{-19}\ C\cdot V = 1.6\times10^{-19}\ J$

ولكن عندما تكون القوة غير منتظمة "أي ناتجة عن مجال كهربائي غير منتظم".

وأردنا أن نجد الشغل اللازم (dW) لنقل الشحنة (q_0) مسافة صغيرة (dr) بواسطة قوة معاكسة للمجال الكهربائي، أي قوة مقدارها ($-q_0\vec{E}$) فإن الشغل المبذول يكون:

$$dW = -q\vec{E}.d\vec{r}$$

وإذا أردنا إيجاد الشغل المبذول لنقل الشحنة (q_0) من النقطة (A) إلى النقطة (B) فإن المعادلة الأخيرة تصبح:

$$W_{A\to B} = \int dW = -q_0\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$$

أو:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$$

وإذا كانت النقطة (A) في ما لانهاية، فإن:

$$V = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$$

وهي العلاقة العامة بين الجهد الكهربائي (V) والمجال الكهربائي ($\vec{E}$).

يمكن كتابتها في صورة تفاضلية كالآتي:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

حيث $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$ و $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$، $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$ التفاضل الجزئي لـ (V) بالنسبة لـ (x) و (y) و (z) على التوالي، و ($\hat{i}$) و ($\hat{j}$) و ($\hat{k}$) وحدات المتجه ($\vec{E}$) في المحاور (x)، (y) و (z).

والمعادلة الأخيرة عادة تكتب في صورة مختصرة كالآتي:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

حيث $(\vec{\nabla}V)$ تسمى تدرج (V) (the gradient of V)

الجهد الناتج عن شحنة نقطية:

Potential due to a point charge

إذا رجعنا إلى العلاقة العامة بين (V) ، $(\vec{E})$ في المعادلة:

$$V = -\int_A^B \vec{E}\,.\,d\vec{r}$$

وعوضنا عن $(\vec{E})$ من المعادلة:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,.\,\frac{q}{r^2}$$

نجد أن:

$$V = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^r \frac{q}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{q}{r}\right]_\infty^r$$

أو:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,.\,\frac{q}{r}$$

أي أن:

الجهد الكهربائي عند أي نقطة تبعد مسافة (r) عن (q) يكون متساوياً وهذا يعني أن الجهد الكهربائي على سطح كرة مركزها الشحنة ونصف قطرها (r) يكون متساوياً، وهو ما نقول عنه أنه سطح متساوي الجهد (equipotential surface) ولنقل شحنة على هذا السطح فإننا لا نحتاج لبذل أي شغل وذلك مثل ما تنقل جسماً على سطح أفقي أملس، فإن الشغل المبذول يكون صفراً. أي أن فرق الجهد بين أي نقطتين على السطح المتساوي الجهد يساوي صفراً.

ولإيجاد الجهد الكهربائي الناتج عن عدة شحنات كهربائية عند نقطة تبعد (r_1) عن (q_1) و (r_2) عن (q_2) و ... (r_n) عن (q_n)،

فإننا نجمع جمعاً جبرياً الجهد الكهربائي الناتج عن كل شحنة كالآتي:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3}{r_3} + \cdots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_n}{r_n}$$

أو:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \cdots + \frac{q_n}{r_n}\right)$$

أو اختصاراً:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

أما إذا كانت الشحنة مستمرة (Continuous charge) كالشحنة على سلك أو صفيحة، فإن إشارة الجمع (Σ) تتحول إلى إشارة تكامل كالآتي:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$

حيث: (dq) شحنة صغيرة جداً،

(r) بعد هذه الشحنة عن النقطة التي يُراد إيجاد الجهد عندها.

تمارين ١٢

- تمرين ① : إذا كان مقدار فرق الجهد بين نقطتين (1.2kV)، تبعد النقطة الأولى (35 cm) وتبعد الثانية (42cm) من شحنة مقدارها (q). أوجد مقدار (q) ؟.

- الحل :

$$V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$1.2\times10^3 = \frac{9\times10^9}{10^{-2}}\,q\left(\frac{1}{35} - \frac{1}{42}\right)$$

$$\therefore q = 0.28\ \mu C.$$

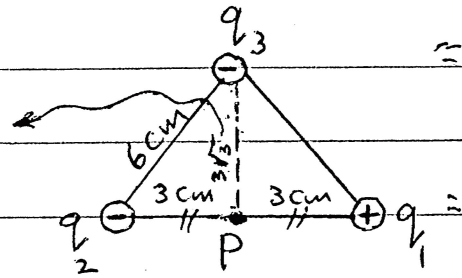
- تمرين ② : ثلاث شحنات نقطية موضوعة على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه (6 cm) كالذي في الشكل التالي :

فإذا كانت : $q_1 = 8\mu C,\ q_2 = -4\mu C,\ q_3 = -12\mu C$

أوجد : الجهد عند النقطة (p) الواقعة في منتصف المسافة بين (q_1) و (q_2).

- الحل :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_n \frac{q_n}{r_n}$$



$$\therefore V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right)$$

$$\therefore V_p = \frac{9\times10^9\times10^{-6}}{3\times10^{-2}}\left(8 - 4 - \frac{12}{\sqrt{3}}\right) = -8.7\times10^5\ V$$

$\sqrt{6^2-3^2}$

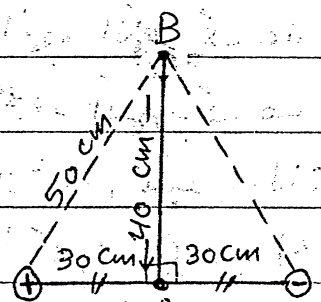
$36-9$

$\sqrt{27}$

$3\sqrt{3}$ cm

• تمرين ③ : في الشكل الآتي ، أوجد الجهد الكهربائي عند النقطتين (A) ، (B) .

• الحل :



$$V = k\frac{q}{r}$$

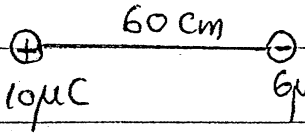
$$V_A = V_{10} + V_{-6}$$

$$V_A = \frac{9\times10^{9}\times10^{-6}}{30\times10^{-2}}\left[10 - 6\right] = 1.2\times10^{5}\,V$$

$$V_B = \frac{9\times10^{9}\times10^{-6}}{50\times10^{-2}}\left[10 - 6\right] = 0.72\times10^{5}\,V$$

• تمرين ④ : في الشكل ، عند أي مسافة بين النقطتين يكون الجهد الكهربائي صفراً ؟

• الحل : نفرض أن النقطة التي يكون فيها الجهد الكهربائي صفراً تبعد مسافة (x) عن الشحنة (10 μC) ، أي تبعد مسافة (60 − x) عن الشحنة (−6μC) فيكون :



$$V_{10} + V_{-6} = 0$$

$$\frac{9\times10^{9}\times10^{-6}}{10^{-2}}\left[\frac{10}{x} - \frac{6}{(60-x)}\right] = 0$$

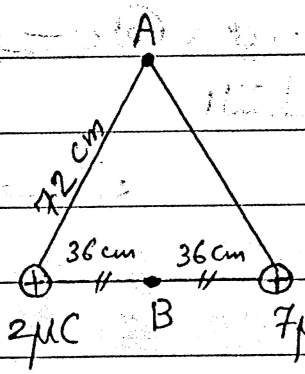
$$\frac{10}{x} = \frac{6}{60-x} \Rightarrow 6x = 10(6-x)$$

$$6x + 10x = 60$$

$$x = \frac{60}{16} = 37.5\,cm$$

كمنك الهندسة ENGINEERING

• تمرين (5) : في الشكل، أوجد:



أ. الجهد الكهربائي عند (A).

ب. الجهد الكهربائي عند (B).

ج. الشغل المبذول لنقل شحنة مقدارها $(-4\,\mu C)$ من (A) إلى (B).

• الحل:

(أ

$$\therefore V = k\frac{q}{r}$$

$$V_A = V_2 + V_7$$

$$\therefore V_A = \frac{9\times10^9\times10^{-6}}{72\times10^{-2}}(2+7) = 1.125\times10^5\ V.$$

(ب

$$V_B = \frac{9\times10^9\times10^{-6}}{36\times10^{-2}}(2+7) = 2.25\times10^5\ V.$$

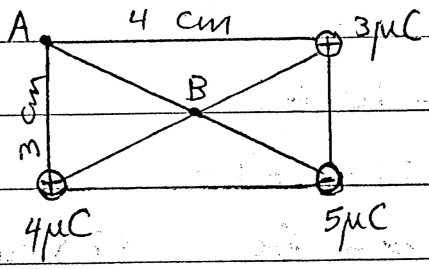
(ج

$$\therefore W_{A\to B} = q_o(V_B - V_A)$$

$$= -4\times10^{-6}(2.25 - 1.125)\times10^5$$

$$\therefore W_{A\to B} = -0.45\ J$$

• تمرين (6) : في الشكل، أوجد:



أ. الجهد عند النقطة (A).

ب. الجهد عند النقطة (B).

ج. الشغل اللازم لإحضار شحنة مقدارها $(2\,\mu C)$ من ما لانهاية إلى النقطة (A).

د. الشغل المبذول لنقل الشحنة $(2\,\mu C)$ من (A) إلى (B).

• الحل:

$\because V = K\frac{q}{r}$

أ) $V_A = \frac{9\times10^9\times10^{-6}}{10^{-2}}\left[\frac{3}{4}+\frac{4}{3}-\frac{5}{5}\right] = 9.75\times10^5\ V$

ب) $V_B = \frac{9\times10^9\times10^{-6}}{2.5\times10^{-2}}\left[3+4-5\right] = 7.2\times10^5\ V$

ج) باستخدام المعادلة:

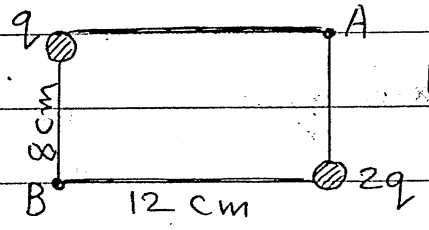
$W = q_o(V_A - V_\infty)$

$= 2\times10^{-6}(9.75\times10^5 - 0) = 1.95\ J$

د) $W = q_o(V_B - V_A)$

$= 2\times10^{-6}(7.2 - 9.75)\times10^5 = -0.51\ J$

• مرسن ⊕ : في الشكل، إذا كان الشغل المبذول لنقل شحنة مقدارها $(5\mu C)$ من النقطة (A) إلى النقطة (B) هو $(4\times10^{-12}J)$.



أوجد (q).

• الحل:

$\because V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\cdot\frac{q}{r}$

$V = V_q + V_{2q}$

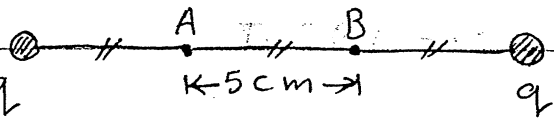
$V_A = \frac{9\times10^9\times q}{10^{-2}}\left[\frac{1}{12}+\frac{2}{8}\right] = 3\times10^{11}\ q$

$V_B = \frac{9\times10^9\times q}{10^{-2}}\left[\frac{1}{8}+\frac{2}{12}\right] = 2.625\times10^{11}\ q$

$W = q_o(V_B - V_A) \Rightarrow 4\times10^{-12} = 5\times10^{-6}\left[2.625-3\right]\times10^{11}\ q$

$\therefore q = -2.13 \times 10^{-17}\ C$

- تمرين (8) : في الشكل ، إذا كان الشغل اللازم لنقل شحنة مقدارها $(3\mu C)$ من النقطة (B) إلى النقطة (A) هو $(1.2 \times 10^{20}\ eV)$. أوجد (q) ؟



- الحل :

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$V_A = \frac{9\times10^9 \times q}{10^{-2}}\left[\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right] = 4.5 \times 10^{11}\ q.$$

$$V_B = \frac{9\times10^9 \times q}{10^{-2}}\left[\frac{2}{10} + \frac{1}{5}\right] = 3.6 \times 10^{11}\ q.$$

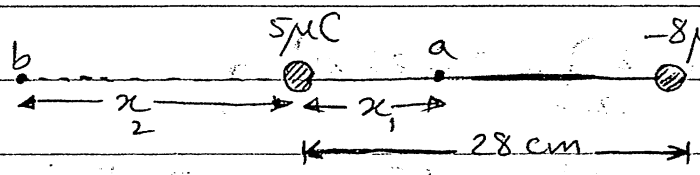
$$W = q\,(V_A - V_B)$$

$$(1.2\times10^{20})(1.6\times10^{-19}) = 3\times10^{-6}\,(4.5-3.6)\times10^{11}\,q$$

$$19.2 = 2.7 \times 10^{5}\,q$$

$$q = 7.11 \times 10^{-5}\ C.$$

- تمرين (9) : في الشكل ، أوجد المسافة (x_1) ، (x_2) حتى يكون الجهد عند النقطتين (a) ، (b) يساوي صفراً .



• الحل:

$$V_5 + V_{-8} = 0 \quad , \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$V_a = \frac{9\times10^9 \times 10^{-6}}{10^{-2}}\left[\frac{5}{x_1} - \frac{8}{(28-x_1)}\right] = 0$$

$$\frac{5}{x_1} = \frac{8}{28-x_1} \Rightarrow 8x_1 = 140 - 5x_1$$

$$8x_1 + 5x_1 = 140$$

$$13x_1 = 140$$

$$x_1 = \frac{140}{13} = 10.77cm$$

$$V_b = \frac{9\times10^9 \times 10^{-6}}{10^{-2}}\left[\frac{5}{x_2} - \frac{8}{(28+x_2)}\right] = 0$$

$$\frac{5}{x_2} = \frac{8}{28+x_2} \Rightarrow 8x_2 = 140 + 5x_2$$

$$8x_2 - 5x_2 = 140$$

$$3x_2 = 140$$

$$x_2 = \frac{140}{3} = 46.7cm$$

• تمرين (10) : إذا كان الجهد الناتج عن مجموعة من الشحنات عند نقطة معينة هو $V = -4x^3 - 2xy^2 + 3z^3$

أوجد مقدار القوة على شحنة مقدارها $(2\mu C)$ وضعت عند النقطة $(2, -1, 1)$

• الحل:

$$\vec{E} = -\nabla\vec{V} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$= -\left[(12x^2 - 2y^2)\hat{i} + (-4xy)\hat{j} + (9z^2)\hat{k}\right]$$

$$= -\left\{\left[12(2)^2 - 2(-1)^2\right]\hat{i} + \left[-4(2)(-1)\right]\hat{j} + 9(1)^2\hat{k}\right\}$$

$$= -\left[46\hat{i} + 8\hat{j} + 9\hat{k}\right] = -46\hat{i} - 8\hat{j} - 9\hat{k}$$

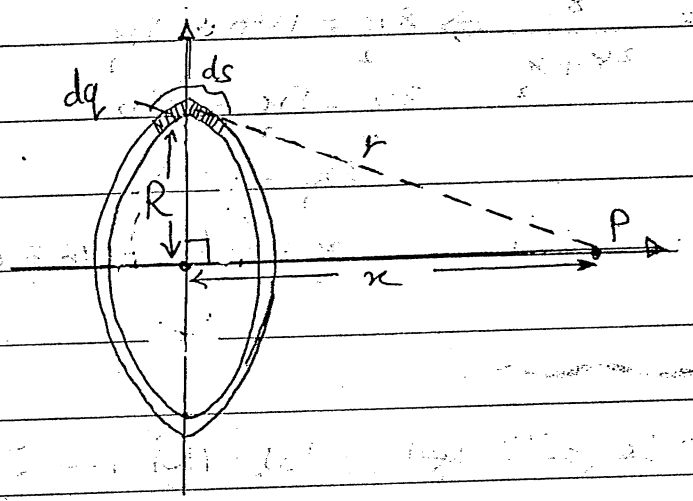
$$\because \vec{E} = -46\,\hat{i} - 8\,\hat{j} - 9\,\hat{k}$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{(-46)^2 + (-8)^2 + (-9)^2} = 47.55 \text{ V/m}$$

$$\therefore \vec{F} = q|\vec{E}| = 2\times10^{-6} \times 47.55$$

$$\therefore F = 95.1 \times 10^{-6} \text{ N}$$

- تمرين (11) : أوجد معادلة حساب الجهد الكهربائي على بعد معين من مركز حلقة مشحونة بشحنة (q) في نقطة تقع على المحور العمودي على مستوى الحلقة " أنظر للشكل التالي "



- الحل :

نأخذ مقطع صغير من الحلقة وليكن (ds) بحيث تكون شحنته (dq) وبهذا سوف يتولد منها جزء من الجهد مقداره (dV) عند النقطة (P) :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} \quad ; \quad r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$\therefore dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

ولإيجاد الجهد الكلي عند النقطة (P) نوجد التكامل للطرفين :

$$V = \int dV = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

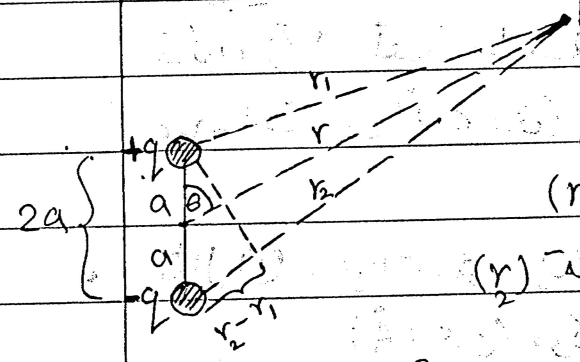
فإذا كانت $(R << x)$، فإن:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x}$$

على أساس عندما تكون النقطة (P) بعيدة عن الحلقة، تمثل الحلقة في هذه الحالة وكأنها شحنة نقطية.

الجهد الناتج عن ثنائي القطب: Potential due to a dipole

لإيجاد الجهد الكهربائي الناتج عن شحنتي ثنائي القطب عند النقطة (P) التي تبعد مسافة (r) من مركزه كما بالشكل المقابل حيث تبعد الشحنة $(+q)$ مسافة (r_1) من النقطة (P) والشحنة $(-q)$ مسافة (r_2) من النقطة (P)، نستخدم العلاقة:



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{2} \frac{q_i}{r_i}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right) \longrightarrow (*)$$

وهو الجهد الكهربائي عند النقطة (P) الناتج عن ثنائي القطب "بالضبط".

← لإيجاد علاقة تقريبية "وهمية جداً من الواقع إذا كانت $r >> a$"

ندرس الشكل أعلاه هندسياً، نلاحظ أن الزاوية (θ) تقريباً تساوي الزاوية التي رأسها $(-q)$ فيكون:

$$\cos\theta = \frac{r_2 - r_1}{2a}$$

$r_2 - r_1 = 2a\cos\theta$

ونرى أيضاً أن: $(r_1 = r_2 = r)$ تقريباً، مما يعني أن: $(r_1 r_2 = r^2)$

- وبالتعويض في المعادلة (*) عن $(r_2 - r_1)$ و $(r_1 r_2)$ نحصل على:

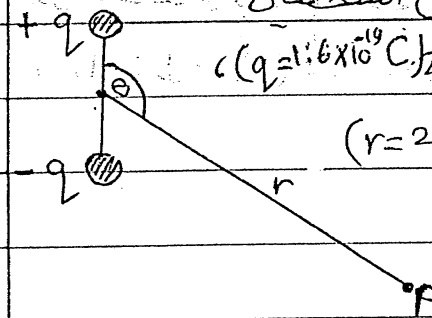
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2a}{r^2}\cos\theta$$

وحيث أن: $P = (2aq)$ عزم ثنائي القطب

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{P}{r^2}\cos\theta$$

⇐ من المعادلة الأخيرة نلاحظ أنه عندما تكون $(\theta = 90^\circ)$ فإن (V) تساوي صفراً، أي أن الجهد الكهربائي عند أي نقطة على السطح الذي ينصف المسافة بين الشحنتين عمودياً يساوي صفراً. بينما تكون (V) أعلى ما يمكن عندما تكون $(\theta = 0^\circ)$ وأصغر ما يمكن عندما تكون $(\theta = 180^\circ)$.

- **مثال ①**: في الشكل، إذا كانت المسافة بين الشحنتين $(0.53\,\text{Å})$، وكان مقدار كل شحنة $(q = 1.6\times10^{-19}\,C)$، أوجد الجهد عند النقطة (P) إذا كانت $(r = 2mm)$ و $(\theta = 153^\circ)$.



- **الحل**:

حيث أن: $(r = 2\times10^{-3}\,m)$ وهي كبيرة جداً بالقياس للمسافة بين الشحنتين $(0.53\times10^{-10}\,m)$ فإننا نعتبر أن الشحنتين عبارة عن ثنائي القطب عزمه:

$$P = (2a)(q) = (0.53\times10^{-10})(1.6\times10^{-19})$$

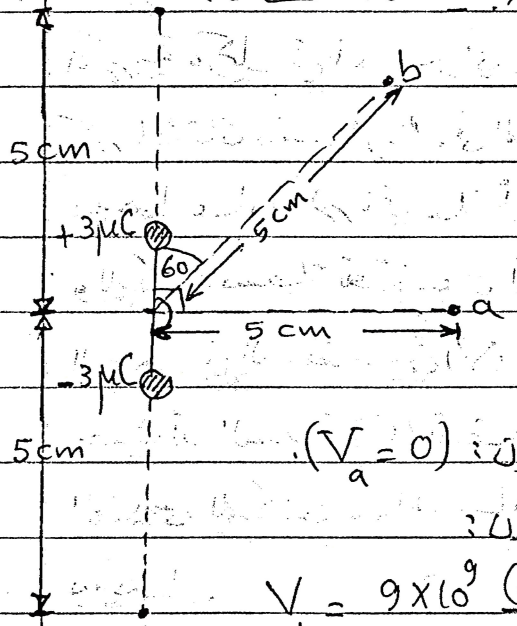
وعليه، يمكننا أن نستخدم المعادلة:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{P}{r^2}\cos\theta$$

$$\therefore V_P = 9\times10^9\,\frac{0.53\times10^{-10}\times1.6\times10^{-19}}{(2\times10^{-3})^2} = -1.7\times10^{-14}\,V$$

عنك الهندسة ENGINEERING

• مثال ② : في الشكل، ثنائي قطب ($q = \pm 3\,\mu C$) والمسافة بين قطبيه ($0.02\ mm$). أوجد الجهد الكهربائي عند النقاط : c ، (b) ، (a) و (d).



• الحل : $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{P}{r^2} \cos\theta$

حيث : $P = (2a)(q)$ ، وحيث $(2a)$ المسافة بين القطبين.

- الجهد عند النقطة (a) ، $(\theta = 90^\circ)$ ، فتكون : $(V_a = 0)$.
- الجهد عند النقطة (b) ، $(\theta = 60^\circ)$ ، فتكون :

$$V_b = \frac{9\times10^9\ (0.02\times10^{-3})(3\times10^{-6})}{(5\times10^{-2})^2} \cos 60$$

$$\therefore V_b = 1.08\times10^2\ V$$

- الجهد عند النقطة (c) ، $(\theta = 0^\circ)$ ، فتكون :

$$V_c = \frac{9\times10^9\ (0.02\times10^{-3})(3\times10^{-6})}{(5\times10^{-2})^2} \cos 0$$

$$\therefore V_c = 2.16\times10^2\ V$$

- الجهد عند النقطة (d) ، $(\theta = 180^\circ)$ ، فتكون :

$$V_d = \frac{9\times10^9\ (0.02\times10^{-3})(3\times10^{-6})}{(5\times10^{-2})^2} \cos 180$$

$$\therefore V_d = -2.16\times10^2\ V$$