كلية الهندسة
ENGINEERING

المكثف والسعة : Capacitor and Capacitance

← تعتبر المكثفات من الأجهزة التي تستخدم في تخزين الشحنة الكهربية ، ويمكن اعتبار أي موصلين كهربائيين عليهما شحنتان كهربائيتان متساويتان في المقدار ومختلفتان في الإشارة (q) يفصل بينهما عازل كهربائي على أنهما مكثف .

وللمكثف سعة تعرّف على أنها النسبة بين الشحنة (q) وفرق الجهد بين السطحين (V) ، أي أن :

$$C = \frac{q}{V}$$

حيث أن السعة (C) تعتمد فقط على الشكل الهندسي للمكثف ، والمسافة بين سطحيه ، ونوع العازل الكهربائي بينهما .

← واضح أن وحدات السعة هي $\left[\frac{\text{وحدات شحنة}}{\text{وحدات جهد}}\right]$ ، أي $\left(\frac{C}{V}\right)$ ، وتسمى هذه الوحدة بالفاراد " Farad " ، أي أن :

$$1\ \text{Farad} = \frac{1\ \text{Coulomb}}{1\ \text{Volt}}$$

أو :

$$1\ F = 1\ \frac{C}{V}$$

← والمكثف يمكن أن يكون ثابت السعة ، فيرمز له في الدارة الكهربائية بالشكل $(-||-)$ ، أما إذا كان متغير السعة فإنه يُرمز له بالشكل $(-\not||-)$.

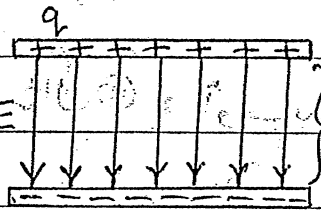
← وحدة الفاراد وحدة كبيرة جداً ، ولذلك فإن المهندسين يفضّلون استخدام الوحدات التالية :

$$1\ \mu F = 10^{-6}\ F$$
$$1\ nF = 10^{-9}\ F$$
$$1\ pF = 10^{-12}\ F$$

- مثال: احسب سعة مكثف عليه شحنة مقدارها ($5\mu C$) إذا كان فرق الجهد بين لوحيه ($2kV$).
- الحل: $\therefore C = \frac{q}{V} = \frac{5\times10^{-6}}{2\times10^{3}} = 2.5\times10^{-9}\,F = 2.5\,nF$

المكثف المتوازي اللوحين: Parallel Plate Capacitor

يتكون المكثف المتوازي اللوحين كما في الشكل المقابل من لوحين معدنيين متوازيين لهما في العادة نفس المساحة (A)، ويبعدهما مسافة (d). يُشحن المكثف بوساطة توصيله بمصدر كهربائي منتظم - كبطارية مثلاً - ثم فصله عن المصدر، فيكون على أحد اللوحين شحنة مقدارها (q) وعلى الآخر ($-q$).



أن المجال الكهربائي بين اللوحين يُعطى بالعلاقة: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

وبالتعويض عن (E) في العلاقة $V = Ed$

نجد أن: $V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$

وبالتعويض عن (V) في العلاقة: $C = \frac{q}{V}$ حيث ($q = \sigma A$)

نجد أن: $C = \frac{\sigma A}{(\sigma/\epsilon_0)d} \Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$

نرى أن سعة المكثف تعتمد فقط على مساحة المكثف (A) وعلى المسافة بين لوحيه (d) أي على شكله الهندسي، وعلى الوسط العازل بين اللوحين وفي هذا الحالة الفراغ (ϵ_0).

- مثال (1): مكثف مساحة لوحه ($1\,m^2$) والمسافة بين لوحيه ($2\,cm$) وعليه شحنة مقدارها ($4.43\times10^{-7}\,C$)، فإذا كان فرق الجهد بين اللوحين ($10^3 V$)، احسب مقدار مساحية الفراغ.

- الحل :

$$C = \frac{q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\epsilon_0 = \frac{qd}{VA} = \frac{(4.43 \times 10^{-7})(2 \times 10^{-2})}{(10^3)(1)}$$

$$\therefore \epsilon_0 = 8.86 \times 10^{-12} \ C^2/N.m^2$$

وهذه طريقة عملية لإيجاد مقدار السماحية

- مثال ② : أوجد مساحة مكثف متوازي اللوحين إذا كانت سعته (1 F) والمسافة بين اللوحين (6 mm).

- الحل :

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow A = \frac{Cd}{\epsilon_0}$$

$$A = \frac{1 \times 6 \times 10^{-3}}{8.85 \times 10^{-12}} = 6.78 \times 10^8 \ m^2$$

$$\therefore A = 6.78 \times 10^8 \ m^2$$

وهي مساحة كبيرة جدًا، مما يعني أن الفاراد وحدة كبيرة جدًا.

- مثال ③ : مكثف متوازي اللوحين سعته (30 nF) وعليه شحنة مقدارها (6 μC)، فإذا كانت المسافة بين اللوحين (0.5 mm) أوجد :

أ. فرق الجهد بين اللوحين

ب. المجال الكهربائي بين اللوحين

ج. كثافة الشحنة السطحية على كل لوح

- الحل : أ.

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow V = \frac{q}{C} = \frac{6 \times 10^{-6}}{30 \times 10^{-9}} = 200 V.$$

ب.

$$F = \frac{V}{d} = \frac{200}{0.5 \times 10^{-3}} = 0.4 \times 10^6 \ V/m$$

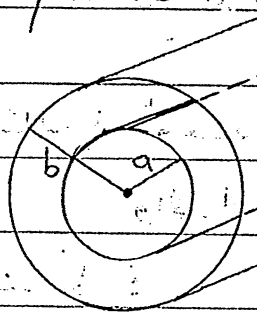
$$\therefore C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow A = \frac{Cd}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{(30\times10^{-9})(0.5\times10^{-3})}{8.85\times10^{-12}}$$

$$\therefore A = 1.7\ m^2$$

$$q = \sigma A \Rightarrow \sigma = \frac{q}{A} = \frac{6\times10^{-6}}{1.7} = 3.53\times10^{-6}\ C/m^2$$

المكثف الإسطواني Cylindrical Capacitor



يتكون المكثف الإسطواني من اسطوانتين معدنيتين طولهما (l) متحدتي المحور كما في الشكل المقابل، نصف قطر الاسطوانة الداخلية (a) والخارجية (b)، على الاسطوانة الداخلية شحنة كلية (+q) والخارجية (−q).

يمكن حساب سعة المكثف كالآتي:

يمكن إيجاد (E) من قانون جاوس:

$$\oint E\cdot dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{r}$$

حيث أن فرق الجهد:

$$V_b - V_a = -\int_a^b E\cdot dr$$

$$= \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r}dr = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\ln r\right]_a^b$$

$$V_b - V_a = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\ln b - \ln a\right] = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$V_a - V_b = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

وعليه فإن السعة تكون:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\lambda l}{\left[\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]}$$

$$\therefore C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

ومرة أخرى نرى أن سعة المكثف تعتمد فقط على الشكل الهندسي للمكثف وعلى الوسط العازل.

- مثال: أوجد سعة مكثف اسطواني قطره الداخلي (34 cm) والخارجي (58 cm) وطوله (20 cm).
- الحل:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad ; \quad b = \frac{58}{2} \times 10^{-2} = 29 \times 10^{-2}\ m$$

$$a = \frac{34}{2} \times 10^{-2} = 17 \times 10^{-2}\ m$$

$$\therefore C = \frac{2 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 20 \times 10^{-2}}{\ln\left(\frac{29}{17}\right)}$$

$$\therefore C = 20.82 \times 10^{-12}\ F = 20.82\ pF.$$

المكثف الكروي: Spherical Capacitor

أي مكثف عبارة عن سطحين، وفي هذه الحالة نعتبر أن الكرة مكثف نصف قطره (R) وذلك بفرض وجودها داخل كرة نصف

قطرها ما لانهاية حيث يكون الجهد صفراً . وقد وجدنا أن الجهد على سطح الكرة سواء كانت موصلة أو غير موصلة يُعطى بالعلاقة :

$$V_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}$$

فيكون الفرق في الجهد بين سطحي المكثف :

$$V_R - V_\infty = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} - 0$$

حيث (q) الشحنة على سطح الكرة ، ومن العلاقة :

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{q/(4\pi\epsilon_0)R}$$

أو :

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

أي أن سعة المكثف الكروي تعتمد على نصف قطره .

- مثال (1) : أوجد سعة مكثف كروي قطره (30 cm) إذا كانت عليه شحنة كهربائية مقدارها (3.4 μC) .

- الحل :

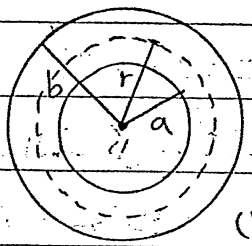
$$R = \frac{30}{2}\times10^{-2} = 15\times10^{-2}\,m$$

$$\therefore C = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$= 4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times15\times10^{-2}$$

$$\therefore C \doteq 16.67\times10^{-12}\,F = 16.67\,pF$$

- مثال (2) : مكثف مكوّن من قشرتين كرويتين متحدتين في المركز . فإذا كان نصف قطر القشرة الداخلية (a) والخارجية (b) ، أوجد سعة المكثف .



- الحل : لإيجاد سعة المكثف ، علينا أن نجد (V) ولكي نجد (V) يجب أن نجد (E) من قانون جاوس .

فنرسم سطحاً جاوسياً كما في الشكل ، نصف قطره (r) بحيث تكون ($a < r < b$) . وباستخدام قانون جاوس :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

← ونجد فرق الجهد (V) من العلاقة:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r}\right]_a^b$$

$$= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{b} + \frac{1}{a}\right] = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

$$V_b - V_a = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

$$V_a - V_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

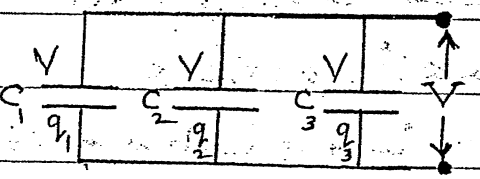
← ولإيجاد سعة المكثف نستخدم المعادلة:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)\right]} = \frac{4\pi\epsilon_0 \times ab}{(b-a)}$$

توصيل المكثفات على التوالي وعلى التوازي:

Capacitors in Parallel and in Series

* إذا وصلنا المكثفات (C_1)، (C_2) و (C_3) كما في الشكل المقابل، فإنها تكون موصلة على التوازي.



في هذه الحالة يكون فرق الجهد بين ألواحها واحداً، أي أن فرق الجهد

لكل مكثف يكون (V)، بينما تكون الشحنة على المكثف (C_1) هي (q_1)، وعلى المكثف (C_2) هي (q_2)، و ...

ولإيجاد السعة المكافئة [أي السعة الكلية لهذه المكثفات]، فإننا نستخدم المعادلة:

$$C = \frac{q}{V}$$

- للمكثف الأول: $C_1 = \frac{q_1}{V_T}$
- للمكثف الثاني: $C_2 = \frac{q_2}{V_T}$
- للمكثف الثالث: $C_3 = \frac{q_3}{V_T}$

$$\therefore V_T = V_1 = V_2 = V_3$$

$$\because q_T = q_1 + q_2 + q_3$$

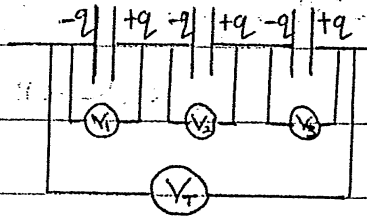
$$C_T V_T = C_1 V_T + C_2 V_T + C_3 V_T$$

$$C_T \cancel{V_T} = \cancel{V_T} (C_1 + C_2 + C_3)$$

$$\therefore C_T = C_1 + C_2 + C_3$$

أي أن السعة المكافئة للمكثفات الموصلة على التوازي هي مجموع السعات للمكثفات، فإذا كانت ($C_1 = 1\mu F$)، ($C_2 = 2\mu F$) و ($C_3 = 3\mu F$) فإن السعة المكافئة تساوي: ($6\mu F$).

* أما إذا وصّلت المكثفات كما في الشكل المقابل فإنها تكون موصّلة على التوالي. وفي هذه الحالة يكون فرق الجهد ليس واحداً؛ فيكون فرق الجهد على المكثف (C_1) هو (V_1) وعلى (C_2) هو (V_2)، و ...، ولكن الشحنات التي على المكثفات تكون متساوية.



ولإيجاد السعة الكلية نستخدم المعادلة: $C = \frac{q}{V} \Rightarrow V = \frac{q}{C}$

فيكون: $V_1 = \frac{q_T}{C_1}$ ، $V_2 = \frac{q_T}{C_2}$ ، $V_3 = \frac{q_T}{C_3}$

$$q_T = q_1 = q_2 = q_3$$

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3$$

$$\frac{q_T}{C_T} = \frac{q_T}{C_1} + \frac{q_T}{C_2} + \frac{q_T}{C_3}$$

$$\frac{q_T}{C_T} = \frac{q_T}{T}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

أي أن مقلوب السعة المكافئة يساوي مجموع مقلوب السعة لكل مكثف،

فإذا كانت: $(C_1 = 1\mu F)$ ، $(C_2 = 2\mu F)$ و $(C_3 = 3\mu F)$ فإن:

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{6} \Rightarrow C_T = \frac{6}{11}\ \mu F$$

- مثال ①: إذا وُصلت المكثفات $(C_1 = 1\mu F)$ ، $(C_2 = 6\mu F)$ و $(C_3 = 3\mu F)$ على التوازي وكان فرق الجهد $(180V)$، أوجد السعة الكلية، وأوجد الشحنة على كل مكثف.

- الحل:

$$C_T = C_1 + C_2 + C_3 = 1 + 6 + 3 = 10\ \mu F$$

$$q_T = C_T V_T = (10)(180) = 18 \times 10^2\ \mu C.$$

$$q_1 = C_1 V_T = (1)(180) = 180\ \mu C.$$

$$q_2 = C_2 V_T = (6)(180) = 1080\ \mu C.$$

$$q_3 = C_3 V_T = (3)(180) = 540\ \mu C.$$

شبكة الهندسة ENGINEERING

- مثال ②: إذا وصلت المكثفات $(C_1 = 1\mu F)$، $(C_2 = 6\mu F)$ و $(C_3 = 3\mu F)$ على التوالي، وكان فرق الجهد الكلي $(180V)$، أوجد السعة الكلية، وأوجد فرق الجهد عبر كل مكثف.

- الحل:

$$\therefore \frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{6+1+2}{6} = \frac{9}{6}$$

$$\therefore C_T = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 0.667\ \mu F$$

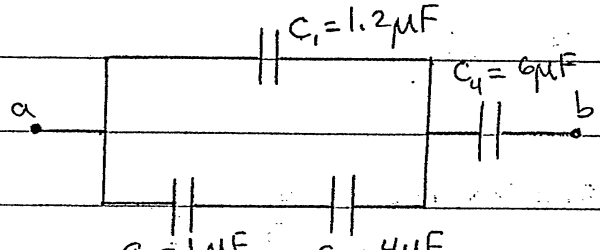
$$q_T = C_T V_T = \frac{2}{3}(180) = 120\ \mu C$$

$$V_1 = \frac{q_T}{C_1} = \frac{120}{1} = 120\ V.$$

$$V_2 = \frac{q_T}{C_2} = \frac{120}{6} = 20\ V.$$

$$V_3 = \frac{q_T}{C_3} = \frac{120}{3} = 40V.$$

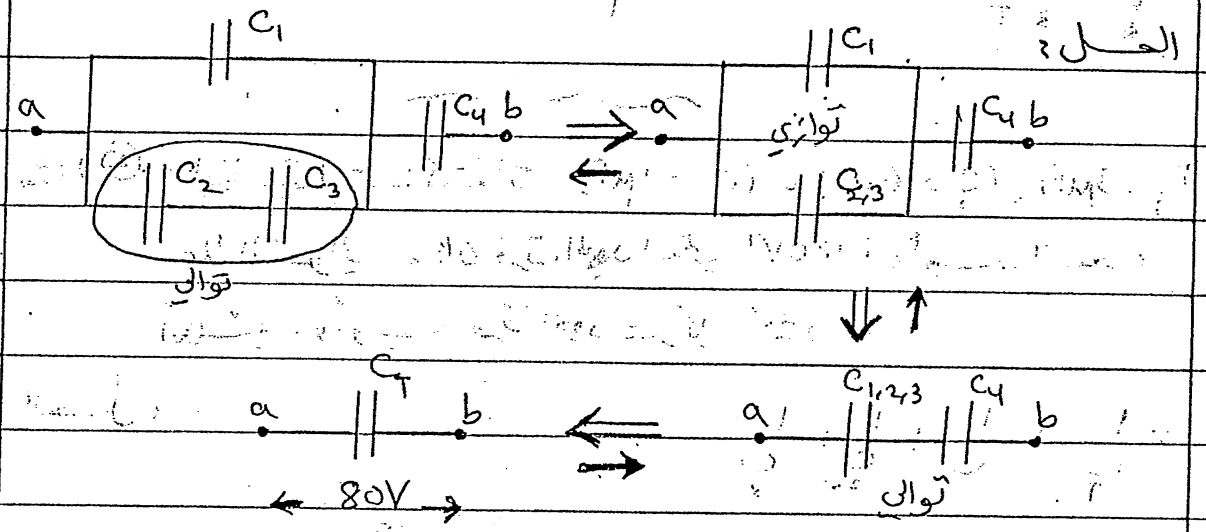
- مثال ③: في الشكل، إذا كان فرق الجهد بين النقطتين (a) و(b) هو $(80V)$، أوجد:



P- السعة الكلية المكافئة.

ب. فرق الجهد والشحنة على كل مكثف.

الحل:



$$C_{2,3} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{(1)(4)}{1+4} = \frac{4}{5} = 0.8\ \mu F.$$

$$C_{1,2,3} = C_1 + C_{2,3} = 1.2 + 0.8 = 2\ \mu F$$

$$C_T = \frac{(C_{123})(C_4)}{C_{123} + C_4} = \frac{(2)(6)}{2+6} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5\ \mu F.$$

$$q_T = C_T V_T = (1.5)(80) = 120\ \mu C = q_{1,2,3} = q_4$$

$$V_4 = \frac{q_T}{C_4} = \frac{120}{6} = 20\ V$$

$$V_{1,2,3} = \frac{q_T}{C_{1,2,3}} = \frac{120}{2} = 60\ V = V_{2,3} = V_1$$

$$q_1 = C_1 V_{1,2,3} = (1.2)(60) = 72\ \mu C$$

$$q_{2,3} = C_{2,3} V_{1,2,3} = (0.8)(60) = 48\ \mu C = q_2 = q_3$$

$$V_2 = \frac{q_{2,3}}{C_2} = \frac{48}{1} = 48\ V.$$

$$V_3 = \frac{q_{2,3}}{C_3} = \frac{48}{4} = 12\ V.$$

ENGINEERING

الطاقة الكهربائية المختزنة في المكثف :

Electric Energy Stored in Capacitor

عندما تشحن نضيدة مكثفاً ، فإن النضيدة تبذل شغلاً لتنقل الشحنة من أحد لوحي المكثف إلى اللوح الآخر . والشغل المبذول لنقل شحنة (dq) بين لوحي مكثف فرق الجهد بينهما (V) وسعته (C) هو :

$$dW = V\,dq \quad ; \quad V = \frac{q}{C}$$

$$\int dW = \int_0^q \frac{q}{C}\,dq$$

$$W = \frac{1}{C}\,\frac{q^2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{C}$$

الشغل المبذول (W) عبارة عن طاقة مختزنة نرمز لها بالرمز (U) ،

أي أن :

$$W = U = \frac{q^2}{2C} = \frac{C^2V^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

وفي حالة المكثف المتوازي اللوحين حيث :

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \frac{A}{d}\right)V^2$$

فإذا عرّفنا كثافة الطاقة (energy density) على أنها الطاقة لكل وحدة حجم ، ونرمز لها بالرمز (u) ، فإن :

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad}$$

حيث (Ad) الحجم المحصور بين لوحي المكثف.

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}(\epsilon_0 A/d)V^2}{Ad} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2 \; ; \; \frac{V}{d} = E$$

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

أي أن: كثافة الطاقة المخزنة تتناسب طردياً مع مربع المجال الكهربائي، ونلاحظ أن وحدتها (J/m^3)

- مثال ①: أوجد الطاقة المخزنة في مكثف عليه شحنة مقدارها ($3.4\mu C$) إذا كان فرق الجهد بين لوحيه ($50V$).
- الحل:

$$U = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}(3.4\times10^{-6})(50) = 85\times10^{-6}\ J.$$

- مثال ②: أوجد الطاقة المخزنة في مكثف مساحة لوحه ($280\ cm^2$) والمسافة بين لوحيه ($9mm$) إذا كان فرق الجهد بين لوحيه (10^2V)
- الحل:

$$\therefore U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \frac{A}{d}\right)V^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(8.85\times10^{-12}\times\frac{280\times10^{-4}}{9\times10^{-3}}\right)(10^2)^2$$

$$\therefore \quad U = 1.377\times10^{-7}\ J.$$

- مثال ③: إذا كانت المسافة بين لوحي مكثف متوازي اللوحين ($8mm$)، وفرق الجهد بين اللوحين ($800V$)، أوجد كثافة الطاقة المخزنة في المكثف.
- الحل:

$$\therefore u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2$$

$$u = \frac{1}{2} \times 8.85 \times 10^{-12} \times \left(\frac{800}{8 \times 10^{-3}}\right)^2$$

$$\therefore u = 4.425 \times 10^{-2} \ J/m^3$$

ثابت العازل الكهربائي : Dielectric Constant

عندما يكون بين لوحي المكثف فراغ، فإن فرق الجهد بين اللوحين يكون (V_0) وسعته (C_0). فإذا أدخلنا عازلاً كهربائياً بين اللوحين فإن فرق الجهد بين اللوحين يصبح (V) وسعته (C).

وتكون (V) أصغر من (V_0)، وتكون سعة المكثف في الحالة الأولى:

$$C_0 = \frac{q}{V_0}$$ (في حالة عدم وجود العازل)

وفي الحالة الثانية:

$$C = \frac{q}{V}$$ (في حالة وجود العازل)

← وتُعرّف النسبة بين السعتين في الحالتين بثابت العازل، ويُرمز له بالرمز (k)، أي أن:

$$K = \frac{C}{C_0} = \frac{q/V}{q/V_0} = \frac{V_0}{V}$$

والثابت (K) يحتوي على جميع صفات العازل الكهربائية والجدول الآتي يُعطي ثابت العازل لبعض المواد المعروفة. ونلاحظ أن (k) ليس لها وحدات وهي دائماً أكبر من الواحد الصحيح لأن (C) دائماً أكبر من (C_0) و(V_0) دائماً أكبر من (V).

المادة	ثابت العازل (k)	المادة	ثابت العازل (k)
الفراغ	1	جيرمانيوم	16
الهواء	1.00054	جلسرين	42
ميكا	3-6	ماء	80
زجاج	5-10		

ولإيجاد علاقة بين ثابت العازل (K) وثابت السماحية للفراغ (ε₀) يمكن أن نعتبر المكثف المتوازي اللوحين حيث:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$ [حالة عدم وجود العازل]

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$ [حالة وجود العازل]

فتكون:

$$K = \frac{C}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

أو:

$$\epsilon = K \epsilon_0$$

حيث: (ε) ثابت السماحية للعازل الكهربائي.

ولها نفس وحدات (ε₀) ← $[C^2/N.m^2]$

$$\left[K = \frac{C}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{E_0}{E} = \frac{U_0}{U} = \frac{u_0}{u}\right] \geq 1$$

* سبب انخفاض الفرق في الجهد الكهربائي بين لوحي المكثف بسبب وجود العازل الكهربائي:

وقبل أن نبدأ في توضيح ذلك نصنّف العازل إلى نوعين:

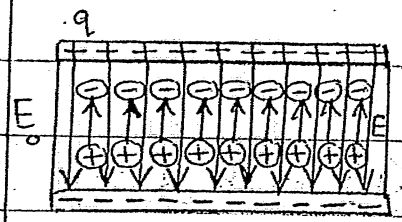
أ. عازل قطبي (polar): والذي تتكون مادته من جزيئات تمتلك عزوماً قطبية دائمة تكون اتجاهاتها عشوائية في غياب المجال الكهربائي.

ب. عازل غير قطبي (non-polar): مادة العازل لا تمتلك عزوماً قطبية، ولكن المجال الكهربائي يزيح الأيونات الموجبة والسالبة إلى اتجاهين متضادين، فتصبح المادة مستقطبة (polarized)، وتتكون ثنائيات قطبية.

← والآن لمعرفة السبب في انخفاض فرق الجهد بسبب وجود العازل الكهربائي: فعندما توضع المادة العازلة «سواء كانت قطبية أو غير قطبية» في مجال كهربائي، فإن القوة الناتجة عن المجال

"تصفف" الأقطاب حتى تصبح في اتجاه المجال كما في الشكل

فتتراكم الشحنات الموجبة عند سطح العازل مقابلة للوح المكثف السالب، وتتراكم الشحنات السالبة عند سطح العازل مقابلة للوح المكثف الموجب، وينتج عن تراكم الشحنات على سطحي العازل مجال كهربائي (E) مضاد لاتجاه المجال الأصلي (E_o) مما يسبب في نقص المجال الكهربائي الكلّي الذي يسبب بدوره في نقص الجهد الكهربائي، أي أن ($V < V_o$).



- مثال: (مكثف متوازي اللوحين مساحة لوحه ($400\ cm^2$) والمسافة بين لوحيه ($6\ mm$)، أدخلنا عازلاً له ثابت مقداره (1.7)، فإذا كانت الشحنة على المكثف ($0.2\ \mu C$)، أوجد:

أ- سعة المكثف الابتدائية، والطاقة المخزنة.

ب- سعة المكثف بعد إدخال العازل، والطاقة المخزنة.

- الحل:

أ) $C_o = \epsilon_o \frac{A}{d} = (8.85\times10^{-12})\frac{400\times10^{-4}}{6\times10^{-3}} = 59\times10^{-12}\ F.$

$U_o = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_o} = \frac{1}{2}\frac{(0.2\times10^{-6})^2}{59\times10^{-12}} = 3.39\times10^{-4}\ J.$

ب) $C = kC_o = (1.7)(59\times10^{-12}) = 100.3\times10^{-12}\ F$

$U = \frac{U_o}{K} = \frac{3.39\times10^{-4}}{1.7} = 2\times10^{-4}\ J.$

ENGINEERING

العازل الكهربائي وقانون جاوس :

Dielectric and Gauss's Law

العلاقة بين المجال الكهربائي والكثافة السطحية للمكثف المتوازي اللوحين في حالة وجود فراغ بين اللوحين باستخدام قانون جاوس:

$$\therefore E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \; ; \; \sigma = \frac{q}{A}$$

$$\therefore E_0 = \frac{q}{A\epsilon_0}$$

حيث: (E_0) المجال الكهربائي في حالة عدم وجود العازل و (q) الشحنة الحرة (free charge) على المكثف.

وعند إدخال عازل له ثابت (k) بين اللوحين فإن شحنة مستحثة (q') (induced charge) ستتكون على العازل، وتكون إشارتها مخالفة لإشارة الشحنة الحرة. فإذا استخدمنا قانون جاوس، فإن الشحنة التي يحتويها سطح جاوس في حالة وجود العازل تكون:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q - q'}{\epsilon_0}$$

أو:

$$E = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A} \longrightarrow \circledast$$

حيث:

(E) المجال الكهربائي في حالة وجود العازل. ولكن:

$$K = \frac{C}{C_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{E_0}{E}$$

ومن المعادلة الأخيرة تكون العلاقة بين المجال الكهربائي في وجود العازل (E) والمجال الكهربائي في عدم وجود العازل (E_0):

$$E = \frac{E_0}{k}$$

وبالتعويض عن (E) في $\circledast$ نحصل على:

$$\frac{E_0}{k} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

وبالتعويض عن: $\left[F_\circ = \frac{q}{\epsilon_\circ A}\right]$

$$\frac{q}{k\epsilon_\circ A} = \frac{q}{\epsilon_\circ A} - \frac{q'}{\epsilon_\circ A}$$

أو:

$$\frac{q}{k} = q - q' \Rightarrow q' = q - \frac{q}{k}$$

$$\therefore q' = q\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

← والمعادلة الأخيرة هي العلاقة بين الشحنة الحرة (q) والشحنة المستحثة (q') وثابت العازل (k)، وواضح عن هذه العلاقة أن (q') دائماً أصغر من (q) حيث أن ($k \geq 1$)، وتكون (q') صفراً عندما تكون (k) تساوي (1)، أي في وجود فراغ بين اللوحين.

فإذا عوّضنا عن (q') في قانون جاوس في حالة وجود العازل، أي في المعادلة:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q - q'}{\epsilon_\circ} = \frac{q}{\epsilon_\circ} - \frac{q'}{\epsilon_\circ}$$

$$= \frac{q}{\epsilon_\circ} - \frac{q}{\epsilon_\circ}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

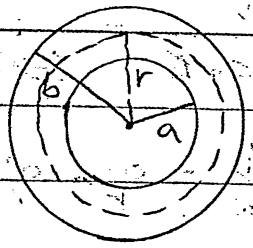
$$= \frac{q}{\epsilon_\circ}\left[1 - 1 + \frac{1}{k}\right]$$

$$\therefore \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{k\epsilon_\circ}$$ (فيكون قانون جاوس في وجود العازل)

• مثال ①: مكثف مكوّن من قشرتين كرويتين لهما نفس المركز، فإذا كان نصف قطر القشرة الداخلية (a) والخارجية (b)، أوجد سعة المكثف إذا كان بين القشرتين عازل له ثابت مقداره (k).

• الحل:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{q}{K\epsilon_0}$$



$$E = \frac{1}{4\pi K\epsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$$

ونجد فرق الجهد من المعادلة:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$= -\frac{q}{4\pi K\epsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= -\frac{q}{4\pi K\epsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_a^b = -\frac{q}{4\pi K\epsilon_0}\left[\frac{-1}{b}+\frac{1}{a}\right]$$

$$V_b - V_a = -\frac{q}{4\pi K\epsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right] = -\frac{q}{4\pi K\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

$$V_a - V_b = \frac{q}{4\pi K\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

فتكون سعة المكثف:

$$C = \frac{q}{V_a - V_b} = \frac{q}{\left[\frac{q}{4\pi K\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)\right]}$$

$$\therefore C = 4\pi K\epsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

• مثال (2): مكثف متوازي اللوحين مساحته $(400\,cm^2)$ والمسافة بين اللوحين $(4.5\,mm)$، فإذا كان فرق الجهد في وجود الفراغ $(180V)$ وفي وجود العازل $(90V)$، أوجد:

أ) ثابت العازل. ب) المجال الكهربائي في وجود الفراغ، وفي وجود العازل.

ج) سماحية العازل. د) كثافة الطاقة المخزنة في وجود الفراغ، وفي وجود العازل.

ENGINEERING

• الحل:

أ) $K = \frac{V_0}{V} = \frac{180}{90} = 2$

ب) $\epsilon = K\epsilon_0 = 2(8.85\times10^{-12}) = 17.7\times10^{-12}\ C^2/N.m^2$

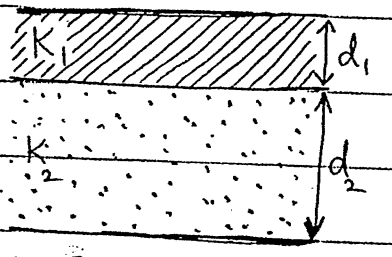
ج) $E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{180}{4.5\times10^{-3}} = 40\times10^3\ V/m.$

$E = \frac{V}{d} = \frac{90}{4.5\times10^{-3}} = 20\times10^3\ V/m.$

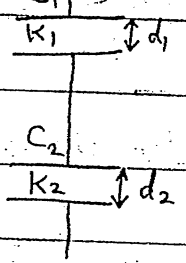
د) $u_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}(8.85\times10^{-12})(40\times10^3)^2 = 7.08\times10^{-3}\ J/m^3.$

$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}(17.7\times10^{-12})(20\times10^3)^2 = 3.54\times10^{-3}\ J/m^3.$

• مثال ③: المكثف الذي بالشكل مساحة لوحه (A)، فإذا مُلئ الفراغ بين لوحيه بعازلين مختلفين، أوجد سعة المكثف.



• الحل: يمكن اعتبار المكثف على أنه مكثفين موصلين على التوالي كما في الشكل أدناه:



فتكون السعة المكافئة:

$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

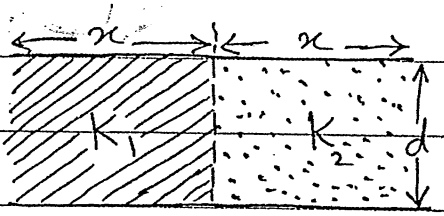
$C_1 = \left(\frac{A}{d_1}\right)K_1\epsilon_0\ ,\ C_2 = \left(\frac{A}{d_2}\right)K_2\epsilon_0$

$\frac{1}{C_T} = \frac{d_1}{AK_1\epsilon_0} + \frac{d_2}{AK_2\epsilon_0}$

$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{A\epsilon_0}\left(\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2}\right) = \frac{1}{A\epsilon_0}\left[\frac{K_2d_1 + K_1d_2}{K_1K_2}\right]$

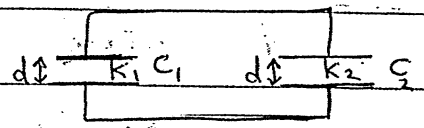
$\therefore C_T = A\epsilon_0\left[\frac{K_1K_2}{K_2d_1 + K_1d_2}\right]$

• مثال ④ : ملء الفراغ بين لوحي المكثف الذي بالشكل بعازلين مختلفين، فإذا كانت مساحة لوح المكثف (A)، أوجد سعة المكثف .



• الحل : في هذه الحالة نعتبر أن المكثف متكون من مكثفين موصلين على التوازي كما في الشكل أدناه :

حيث مساحة كل لوح (A/2) والمسافة بين اللوحين (d)، فتكون السعة المكافئة :



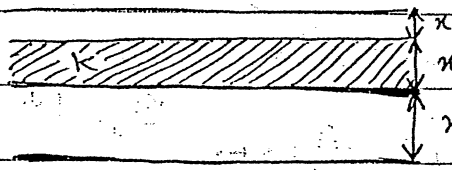
$$C_T = C_1 + C_2 \quad ; \quad C_1 = \frac{A/2}{d} K_1 \epsilon_0 \quad , \quad C_2 = \frac{A/2}{d} K_2 \epsilon_0$$

$$= \frac{A/2}{d} K_1 \epsilon_0 + \frac{A/2}{d} K_2 \epsilon_0$$

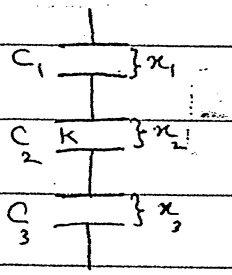
$$= \frac{A/2}{d} \epsilon_0 (K_1 + K_2)$$

$$\therefore C_T = \frac{\epsilon_0 A (K_1 + K_2)}{2d}$$

• مثال ⑤ : أوجد سعة المكثف الذي بالشكل حيث ملء الفراغ بين لوحيه جزئياً بعازل له ثابت (K)، بفرض أن مساحة لوحه (A).



• الحل : نعتبر أن المكثف مكون من (3) مكثفات موصلة على التوالي كما في الشكل التالي :



فتكون السعة المكافئة :

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$C_1 = \frac{A}{x_1} \epsilon_0 \quad , \quad C_2 = \frac{A}{x_2} K \epsilon_0 \quad , \quad C_3 = \frac{A}{x_3} \epsilon_0$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{x_1}{\epsilon_0 A} + \frac{x_2}{\epsilon_0 k A} + \frac{x_3}{\epsilon_0 A}$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{\epsilon_0 A}\left[x_1 + \frac{x_2}{k} + x_3\right] = \frac{1}{A\epsilon_0}\left[\frac{k x_1 + x_2 + k x_3}{k}\right]$$

$$\therefore C_T = A\epsilon_0\left[\frac{k}{k(x_1+x_3)+x_2}\right]$$

- مثال ⑥ : مكثف متوازي اللوحين ، مساحة لوحه $(160\ cm^2)$ وعليه شحنة مقدارها $(20\ nC)$ ، فإذا كان بين اللوحين عازل وكان المجال الكهربائي في العازل $(5\times10^6\ V/m)$ ، أوجد ثابت العازل والشحنة المستحثة على العازل .

- الحل : نستخدم المعادلة :

$$F = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{k\epsilon_0} = \frac{q}{Ak\epsilon_0}$$

فنجد أن :

$$K = \frac{q}{A\epsilon_0 E} = \frac{20\times10^{-9}}{(160\times10^{-4})(8.85\times10^{-12})(5\times10^6)} = 2.8$$

فتكون :

$$q' = q\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

$$= 20\times10^{-9}\left(1-\frac{1}{2.8}\right) = 12.86\times10^{-9}\ C$$

$$= 12.86\ nC$$

- مثال ⑦ : أوجد سعة قشرتين كرويتين متحدتي المركز إذا ملئ نصف الفراغ بينهما بعازل سماحيته (ϵ_1) ، والنصف الآخر بعازل سماحيته (ϵ_2) ، بفرض أن نصف قطر القشرة الداخلية (a) والخارجية (b) .

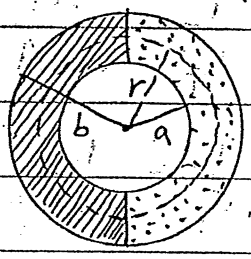
- الحل : نأخذ سطحاً جاوسياً نصف قطره (r) ، كما في الشكل .

وباستخدام قانون جاوس :

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon}$$

ENGINEERING

$$\oint_0^{\pi/2} \epsilon_1 \vec{E} \cdot d\vec{A} + \oint_0^{\pi/2} \epsilon_2 \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{in}$$



$$\epsilon_1 E \left(\frac{4\pi r^2}{2}\right) + \epsilon_2 E \left(\frac{4\pi r^2}{2}\right) = q_{in}$$

$$\epsilon_1 E (2\pi r^2) + \epsilon_2 E (2\pi r^2) = q_{in}$$

$$E (2\pi r^2)(\epsilon_1 + \epsilon_2) = q_{in}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \cdot \frac{q_{in}}{r^2}$$

ونجد (V) من العلاقة:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= -\frac{q_{in}}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{-q_{in}}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[\frac{-1}{r}\right]_a^b$$

$$= \frac{-q_{in}}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[\frac{-1}{b} + \frac{1}{a}\right] = \frac{-q_{in}}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

$$V_b - V_a = \frac{-q_{in}}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[\frac{b-a}{ab}\right]$$

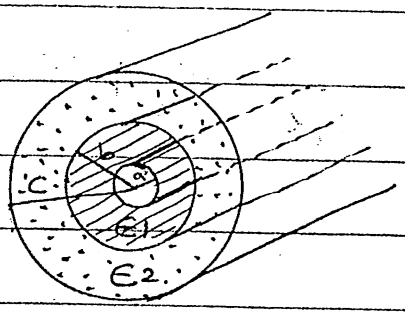
$$V_a - V_b = \frac{q_{in}}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[\frac{b-a}{ab}\right]$$

وحيث أن:

$$\therefore C = \frac{q_{in}}{V_a - V_b}$$

$$= q_{in} \Big/ \frac{q_{in}}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[\frac{b-a}{ab}\right]$$

$$\therefore C = 2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$



- مثال (8): اسطوانتان متحدتا المركز، ملئ الفراغ بينهما بعازلين مختلفين. كما في الشكل.
أوجد السعة C.

- الحل: المجال الكهربائي في العازل (ϵ_1):

$$\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A}_1 = \frac{q}{\epsilon_1}$$

$$E_1 (2\pi r l) = \frac{q}{\epsilon_1} \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2\pi \epsilon_1 l} \cdot \frac{q}{r} \; ; (b > r > a)$$

والمجال الكهربائي في العازل (ϵ_2):

$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_2}$$

$$E_2 (2\pi r l) = \frac{q}{\epsilon_2} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2\pi \epsilon_2 l} \cdot \frac{q}{r} \; ; (c > r > b)$$

ونجد فرق الجهد من العلاقة:

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} - \int_b^c \vec{E}_2 \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{-q}{2\pi \epsilon_1 l} \int_a^b \frac{1}{r} dr - \frac{q}{2\pi \epsilon_2 l} \int_b^c \frac{1}{r} dr$$

$$= \frac{-q}{2\pi \epsilon_1 l} [\ln r]_a^b - \frac{q}{2\pi \epsilon_2 l} [\ln r]_b^c$$

$$= \frac{-q}{2\pi \epsilon_1 l} [\ln b - \ln a] - \frac{q}{2\pi \epsilon_2 l} [\ln c - \ln b]$$

$$V_b - V_a = \frac{-q}{2\pi \epsilon_1 l} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{q}{2\pi \epsilon_2 l} \ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

$$V_a - V_b = \frac{q}{2\pi\epsilon_1 l}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{q}{2\pi\epsilon_2 l}\ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\therefore C = \frac{q}{V}$$

$$\therefore C = q \Big/ \frac{q}{2\pi l}\left[\frac{1}{\epsilon_1}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\epsilon_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]$$

$$\therefore C = 2\pi l\left[\frac{1}{\epsilon_1}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\epsilon_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]^{-1}$$