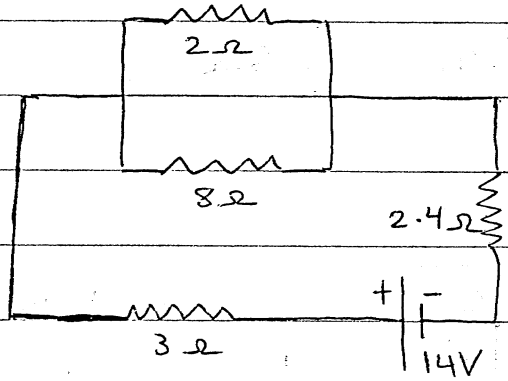
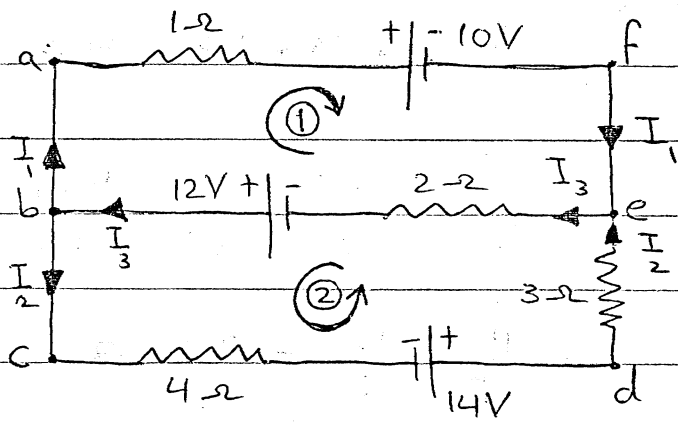
قانونا كيرشوف (Kirchhoff's Laws)



نستطيع أن نحلّل الدائرة الكهربائية التي في الشكل المقابل باستخدام قانون أوم وقواعد توصيل المقاومات، وبالتالي نستطيع إيجاد شدة التيار المار في الدائرة والتيار المار في كل مقاومة.

ولكن ليس أمراً سهلاً أن نحلّل الدائرة التي في الشكل أدناه بالوسائل المعتادة، ولكن ذلك يكون سهلاً لو استعملنا «قانونا كيرشوف»، وقانون كيرشوف هما:



القانون الأول:

«مجموع التيار الداخل لأي «نقطة تفرع» يساوي مجموع التيار الخارج منها».

ونقطة التفرع (branch point) هي النقطة التي يتجزأ فيها التيار في مسارات مختلفة. فعندما يدخل التيار لهذه النقطة - مثل النقطة (b) في الدائرة التي في الشكل أعلاه - فإن التيار يجب أن يخرج منها دون زيادة أو نقصان، لأن الشحنات الكهربائية لا تتراكم ولا تختفي، وهذا هو قانون بقاء الشحنة. ونصيغ قانون كيرشوف الأول صياغة أخرى فنقول أن المجموع الجبري للتيار عند أي نقطة تفرع يساوي صفراً. فإذا أخذنا إشارة التيار

الداخل على أنها موجبة فإن إشارة التيار الخارج تكون سالبة ، ونكتب هذا جبرياً كالتالي : $(\Sigma I = 0)$

القانون الثاني :

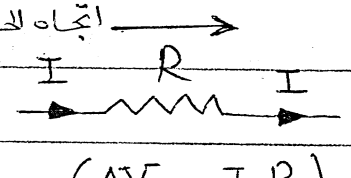
" مجموع فرق الجهد في أي حلقة كهربائية مغلقة يكون صفراً ".

وهذا القانون إعادة صياغة لقانون بقاء الطاقة، فكل شحنة تتحرك في دائرة مغلقة (loop) وتبدأ وتنتهي عند نفس النقطة التي بدأت منها - تكتسب طاقة بقدر ما تفقد. أي أن المجموع الجبري للقوى الدافعة الكهربائية يكون مساوياً للمجموع الجبري لهبوط فرق الجهد (IR) أي : $\Sigma \mathcal{E} = \Sigma IR$

(*) ولتطبيق قانون كيرتشوف يجب مراعاة التالي :

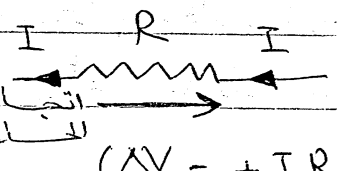
① تعيين اتجاه الحلقة ، فمثلاً في الدائرة في الشكل السابق اخترنا اتجاه الحلقة ① وهي (bafeb) ليكون في اتجاه عقارب الساعة ، بينما اخترنا اتجاه الحلقة ② وهي (bcdeb) ليكون في عكس اتجاه عقارب الساعة .

② إذا كان اتجاه التيار في المقاومة هو نفس اتجاه الحلقة كما في الشكل ، فإن التغير في الجهد عبر المقاومة يكون سالباً ، أي $(\Delta V = -IR)$.



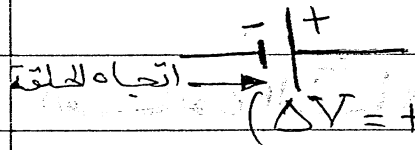
$(\Delta V = -IR)$

③ إذا كان اتجاه التيار في المقاومة عكس اتجاه الحلقة كما في الشكل ، فإن التغير في الجهد يكون موجباً . أي $(\Delta V = +IR)$.

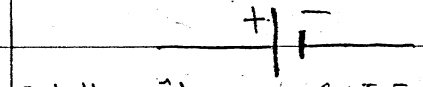


$(\Delta V = +IR)$

④ إذا كان اتجاه الحلقة عبر المصدر الكهربائي من السالب إلى الموجب كما في الشكل، فإن فرق الجهد يكون موجباً. أي: $(\Delta V = +\mathcal{E})$.

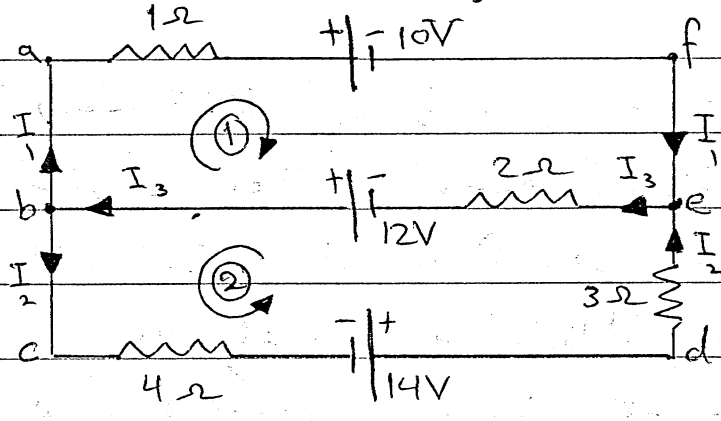


⑤ إذا كان اتجاه الحلقة عبر المصدر الكهربائي من الموجب إلى السالب كما في الشكل، فإن فرق الجهد يكون سالباً، أي: $(\Delta V = -\mathcal{E})$.



- مثال ①: في الشكل، أوجد (I_1)، (I_2) و (I_3).

- الحل:



عند النقطة (b) يتفرع (I_3) إلى (I_1) و (I_2)، أي أن:

$$I_3 = I_1 + I_2 \longrightarrow (1)$$

* وهو قانون كيرشوف الأول.

ثم نستخدم قانون كيرشوف الثاني للحلقة ① وهي: (afeba)، والتي أخذنا اتجاهها ليكون مع عقارب الساعة.

$$12 - I_1(1) - 10 - I_3(2) = 0$$

$$2 - I_1 - 2I_3 = 0 \longrightarrow (2)$$

ونستخدم قانون كيرشوف الثاني للحلقة ② وهي: (bcdeb)، والتي أخذنا اتجاهها ليكون ضد عقارب الساعة.

$$12 - I_2(4) + 14 - I_2(3) - I_3(2) = 0$$

$$26 - 2I_3 - 7I_2 = 0 \longrightarrow (3)$$

ونحلّل المعادلات (1)، (2) و (3) حلّاً آنياً لإيجاد (I_1)، (I_2) و (I_3) فنعوّض عن (I_1) في (2) باستخدام (1):

$$2 - (I_3 - I_2) - 2I_3 = 0$$

$$2 - 3I_3 + I_2 = 0 \rightarrow (4)$$

وبضرب المعادلة (3) في [3] وضرب المعادلة (4) في (2) ثم طرح (4) من (3) نجد أن:

$$78 - 6I_3 - 21I_2 = 0$$

$$\ominus 4 \oplus 6I_3 \ominus 2I_2 = 0$$

} بالطرح

$$74 - 23I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{74}{23} = 3.22\ A$$

وبالتعويض عن (I_2) في (4) نحصل على:

$$2 - 3I_3 + 3.22 = 0$$

$$\therefore I_3 = \frac{5.22}{3} = 1.74\ A$$

وبالتعويض عن I_2، I_3 في (1) نجد أن:

$$I_1 = I_3 - I_2 = 1.74 - 3.22 \Rightarrow I_1 = -1.48\ A$$

أي أن: مقدار ($I_1 = 1.48\ A$) ولكن في عكس الاتجاه الذي فرضناه.

- مثال ②: أعد حل المسألة السابقة مستخدماً قاعدة كريمر [Cramer rule].
- الحل: قاعدة كريمر هي حل المعادلات الجبرية باستخدام المحدّدات، فإذا كان عندنا (3) معادلات ونريد حلها، فإننا نضعها أولاً على الصورة التالية:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = d_1.$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = d_2.$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = d_3$$

حيث (d_1) و (d_2) و (d_3) حدود مطلقة.

وثانياً، نجد قيمة المحدّدة:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

فإذا كانت $(A \neq 0)$ فإن:

$$\begin{bmatrix} d_1 & a_2 & a_3 \\ d_2 & b_2 & b_3 \\ d_3 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\quad}{A}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & d_1 & a_3 \\ b_1 & d_2 & b_3 \\ c_1 & d_3 & c_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & d_1 \\ b_1 & b_2 & d_2 \\ c_1 & c_2 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\quad}{A}, \qquad x_3 = \frac{\quad}{A}$$

ولإيجاد قيمة (I_1), (I_2), (I_3) في المسألة السابقة، نكتب المعادلات (1)، (2)، (3) كالتالي:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$I_1 + 0 + 2I_3 = 2$$
$$0 + 7I_2 + 2I_3 = 26$$

وعليه تكون:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 1(0-14) - 1(2-0) - 1(7-0)$$
$$= -14 - 2 - 7 = -23$$

(6)

فتكون :

$$I_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 26 & 7 & 2 \end{bmatrix}}{-23}$$

$$I_1 = \frac{-1}{23}\left[0(0-14) - 1(4-52) - 1(14-0)\right]$$

$$= \frac{-1}{23}(48-14) = \frac{-34}{23} \Rightarrow I_1 = -1.48\ A$$

أي أن الاتجاه لـ (I_1) عكس الاتجاه الذي فرضناه .

$$I_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 26 & 2 \end{bmatrix}}{-23} = \frac{-1}{23}\left[1(4-52) - 0 - 1(26-0)\right]$$

$$= \frac{-1}{23}(-48-26) = \frac{74}{23}$$

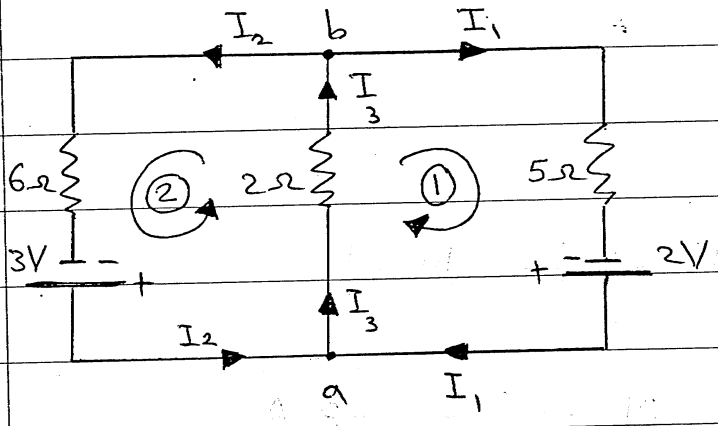
$$I_2 = 3.22\ A .$$

$$I_3 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 26 \end{bmatrix}}{-23} = \frac{-1}{23}\left[1(0-14) - 1(26-0) + 0\right]$$

$$= \frac{-1}{23}(-14-26) = \frac{40}{23}$$

$$\therefore I_3 = 1.74\ A .$$

- مثال (3) : في الشكل ، أوجد $(I_1), (I_2), (I_3)$.



- الحل : عند النقطة (a) :

$$I_1 + I_2 = I_3 \longrightarrow (1)$$

ونستخدم قانون كيرشوف الثاني للحلقة ① :

$$2 - 2I_3 - 5I_1 = 0 \longrightarrow (2)$$

والحلقة ② :

$$3 - 2I_3 - 6I_2 = 0 \longrightarrow (3)$$

بطرح المعادلة ② من ③ نجد أن :

$$1 + 5I_1 - 6I_2 = 0 \longrightarrow (4)$$

وبالتعويض عن (I_1) باستخدام المعادلة ① في المعادلة ④ :

$$1 + 5(I_3 - I_2) - 6I_2 = 0$$

$$1 + 5I_3 - 11I_2 = 0 \longrightarrow (5)$$

بضرب المعادلة (3) في [5] والمعادلة (5) في [2] ، وبجمع نجد أن :

$$\left.\begin{aligned} 15 - 10I_3 - 30I_2 &= 0 \\ 2 + 10I_3 - 22I_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{بالجمع}$$

$$17 - 52I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{17}{52} = 0.33\ A$$

وبالتعويض عن (I_2) في (3) نحصل على :

$$3 - 2I_3 - 6(0.33) = 0$$

$$I_3 = \frac{3 - 6(0.33)}{2} \Rightarrow I_3 = 0.51\ A$$

وبالتعويض عن (I_2) ، (I_3) في المعادلة (1) نجد أن :

$$I_1 + 0.33 = 0.51 \Rightarrow I_1 = 0.51 - 0.33 = 0.18\ A$$

* يمكن إيجاد الحل بطريقة كريمر:

لتطبيق قاعدة كريمر نكتب المعادلات (1)، (2) و (3) على هذه الصورة:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$5I_1 + 0 + 2I_3 = 2$$
$$0 + 6I_2 + 2I_3 = 3$$

وعليه تكون:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = 1(0-12) - 1(10-0) - 1(30-0)$$
$$= -12 - 10 - 30 = -52$$

فتكون:

$$I_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}}{-52} = \frac{-1}{52}\left[0 - 1(4-6) - 1(12-0)\right]$$

$$= \frac{-1}{52}(2-12) = \frac{10}{52} \Rightarrow I_1 = 0.19\ A$$

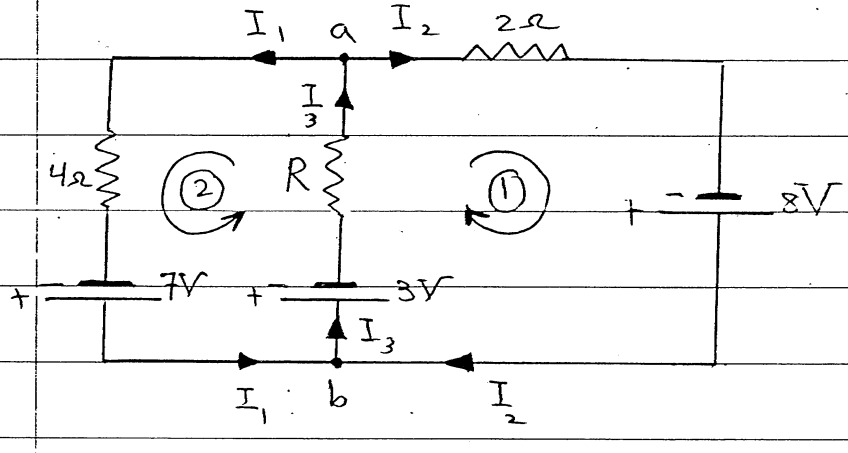
$$I_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}}{-52} = \frac{-1}{52}\left[1(4-6) - 0 - 1(15-0)\right]$$

$$= \frac{-1}{52}\left[-2-15\right] = \frac{17}{52} \Rightarrow I_2 = 0.33\ A$$

$$I_3 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}}{-52} = \frac{-1}{52}\left[1(0-12) - 1(15-0) + 0\right]$$

$$= \frac{-1}{52}(-12-15) = \frac{27}{52} \Rightarrow I_3 = 0.52\ A$$

- مثال (4) : في الدائرة التي في الشكل ، أوجد قيمة المقاومة (R) إذا كانت شدة التيار (I_3) تساوي (0.5A) .



- الحل :

عند النقطة (a) :

$$I_3 = I_1 + I_2$$

$$I_1 + I_2 - 0.5 = 0 \longrightarrow (1)$$

قانون كيرشوف (2) للحلقة (1) :

$$8 - 3 - 0.5R - 2I_2 = 0$$

$$2I_2 + 0.5R = 5 \longrightarrow (2)$$

قانون كيرشوف (2) للحلقة (2) :

$$7 - 3 - 0.5R - 4I_1 = 0$$

$$4I_1 + 0.5R = 4 \longrightarrow (3)$$

بالتعويض عن (I_2) في المعادلة (2) باستخدام المعادلة (1) :

$$2(0.5 - I_1) + 0.5R = 5$$

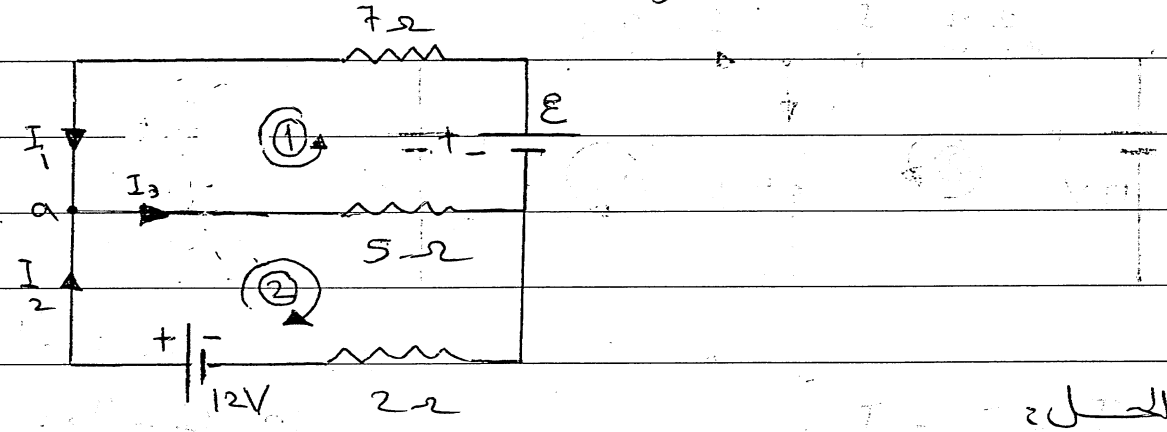
$$-2I_1 + 0.5R = 4 \longrightarrow (4)$$

نضرب المعادلة (4) في [2] ونجمعها مع المعادلة (3) :

$$\left.\begin{array}{l} -4I_1 + R = 8 \\ 4I_1 + 0.5R = 4 \end{array}\right\} \text{بالجمع}$$

$$1.5R = 12 \Rightarrow R = \frac{12}{1.5} = 8\,\Omega$$

- مثال (5): في الدائرة التي في الشكل، أوجد (I_1)، (I_2)، $(\mathcal{E})$، إذا كانت $(I_3 = 2A)$.



- الحل:

عند النقطة (a):

$$I_1 + I_2 = I_3 = 2 \longrightarrow (1)$$

من قانون كيرشوف الثاني، بالنسبة للحلقة ①:

$$\mathcal{E} - 7I_1 - 5I_3 = 0$$

$$\mathcal{E} - 7I_1 - 10 = 0 \longrightarrow (2)$$

وبالنسبة للحلقة ②:

$$12 - 5I_3 - 2I_2 = 0$$

$$12 - 10 - 2I_2 = 0$$

$$2 - 2I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = 1\,A$$

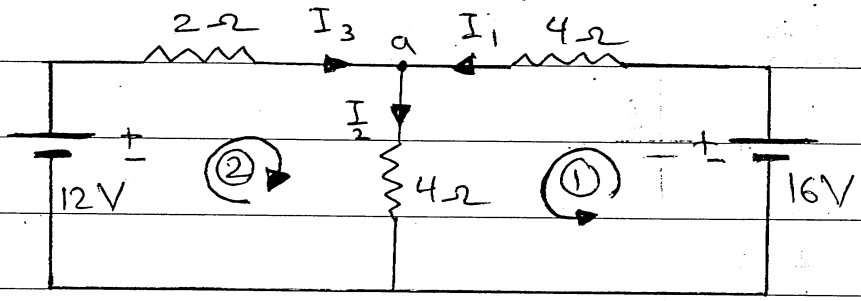
وبالتعويض عن (I_2) في المعادلة (1) نحصل على:

$$I_1 + 1 = 2 \Rightarrow I_1 = 1\,A$$

وبالتعويض عن (I_1) في المعادلة (2):

$$\mathcal{E} - 7(1) - 10 = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = 17\,V$$

- مثال (6) : أوجد القدرة المبددة في كل مقاومة .



- الحل :

عند النقطة (a) :

$$I_1 + I_3 = I_2$$

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 \longrightarrow (1)$$

من قانون كيرشوف ② للحلقة ① :

$$16 - 4I_1 - 4I_2 = 0 \longrightarrow (2)$$

للحلقة ② :

$$12 - 2I_3 - 4I_2 = 0 \longrightarrow (3)$$

نكتب المعادلة (1) ، (2) و (3) كالتالي :

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 \longrightarrow (4)$$

$$4I_1 + 4I_2 + 0 = 16 \longrightarrow (5)$$

$$0 + 4I_2 + 2I_3 = 12 \longrightarrow (6)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 1(8-0) + 1(8-0) + 1(16-0)$$

$$= 8 + 8 + 16 = 32$$

$$I_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 16 & 4 & 0 \\ 12 & 4 & 2 \end{bmatrix}}{32} = \frac{1}{32}\left[0 + 1(32-0) + 1(64-48)\right]$$

$$\therefore I_1 = \frac{48}{32} = 1.5\,A$$

(12)

$$I_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 16 & 0 \\ 0 & 12 & 2 \end{bmatrix}}{32} = \frac{1}{32}\left[1(32-0)-0+1(48-0)\right]$$

$$\therefore I_2 = \frac{80}{32} = 2.5A$$

$$I_3 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 16 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}}{32} = \frac{1}{32}\left[1(48-64)+1(48-0)+0\right]$$

$$\therefore I_3 = \frac{32}{32} = 1A.$$

- فتكون القدرة المبددة في المقاومة (4Ω):

$$P = I_1^2 R = (1.5)^2(4) = 9W$$

- والقدرة المبددة في المقاومة (4Ω) الأخرى:

$$P = I_2^2 R = (2.5)^2(4) = 25W$$

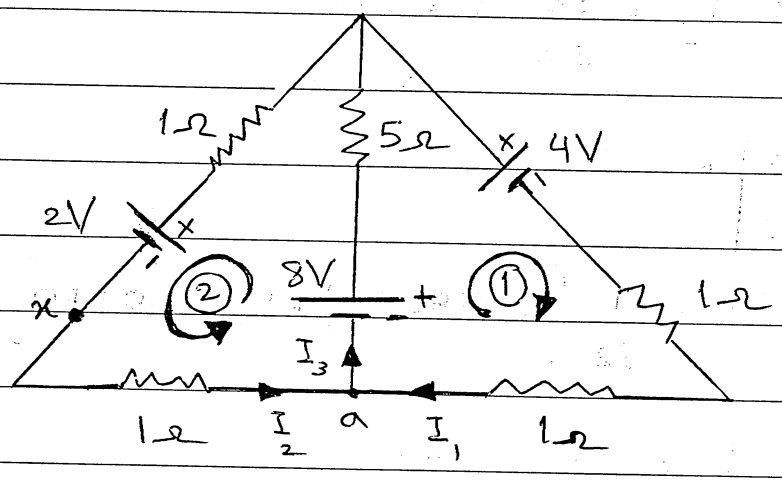
- والقدرة المبددة في المقاومة (2Ω):

$$P = I_3^2 R = (1)^2(2) = 2W$$

- مثال (7) : في الشكل ، أوجد :

أ. معدّل الطاقة الحرارية الناتجة في المقاومة (5Ω) .

ب. في حالة فتح الدائرة عند النقطة (x) ، أوجد معدّل الطاقة الحرارية الناتجة في المقاومة (5Ω) .



- الحل :

أ. عند النقطة (a) :

$$I_1 + I_2 = I_3 \longrightarrow (1)$$

من قانون كيرشوف (2) ، بالنسبة للحلقة (1) :

$$8 - 5I_3 - 4 - I_1 - I_1 = 0$$

$$4 - 2I_1 - 5I_3 = 0 \longrightarrow (2)$$

بالنسبة للحلقة (2) :

$$8 - 5I_3 - I_2 - 2 - I_2 = 0$$

$$6 - 2I_2 - 5I_3 = 0 \longrightarrow (3)$$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (3) نحصل على :

$$2 + 2I_1 - 2I_2 = 0$$

$$1 + I_1 - I_2 = 0 \longrightarrow (4)$$

بالتعويض عن (I_1) باستخدام المعادلة (1) في المعادلة (4) :

$$1 + (I_3 - I_2) - I_2 = 0$$

$$1 + I_3 - 2I_2 = 0 \longrightarrow (5)$$

بطرح المعادلة (5) من المعادلة (3) نحصل على :

$$5 - 6I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{5}{6} = 0.8333\ A$$

فيكون معدّل الطاقة الحرارية الناتجة في المقاومة (5Ω) :-

$$P = I_3^2 R = (0.8333)^2 (5) = 3.47\ W$$

ب - عند فتح الدائرة عند النقطة (x) فإن تيارًا وحيدًا يمر في الدائرة ونفترضه (I) ، بمعنى أن الحلقة ② لا يمر فيها تيارًا ، وباستخدام قانون كيرشوف الثاني للحلقة ① نحصل على :

$$8 - 5I - 4 - I - I = 0$$

$$4 - 7I = 0 \Rightarrow I = \frac{4}{7} = 0.57\ A$$

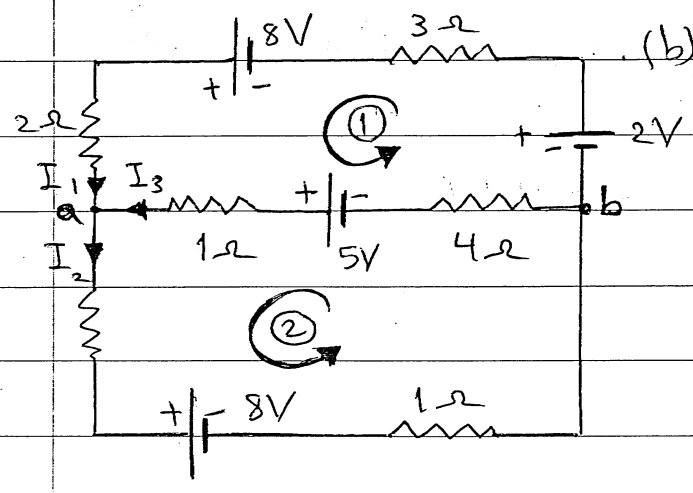
ويكون معدّل الطاقة الحرارية الناتجة في المقاومة (5Ω) كالتالي :

$$P = I^2 R = (0.57)^2 (5) = 1.62\ W.$$

- مثال ⑧ : في الشكل ، أوجد :

أ. الطاقة المبدّدة في المقاومة (3Ω) في دقيقة واحدة .

ب. فرق الجهد بين النقطتين (a) و (b).



15

• الحل : من قانون كيرشوف الأول :

عند النقطة (a) :

$$I_1 + I_3 = I_2$$

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 \longrightarrow (1)$$

من قانون كيرشوف الثاني :

* بالنسبة للحلقة (1) :

$$8 - 2I_1 + I_3 - 5 + 4I_3 + 2 - 3I_1 = 0$$

$$5 - 5I_1 + 5I_3 = 0$$

$$5I_1 + 0 - 5I_3 = 5 \longrightarrow (2)$$

* بالنسبة للحلقة (2) :

$$5 - I_3 - I_2 - 8 - I_2 - 4I_3 = 0$$

$$-3 - 2I_2 - 5I_3 = 0$$

$$0 + 2I_2 + 5I_3 = -3 \longrightarrow (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 1(0+10) + 1(25-0) + 1(10-0)$$

$$= 10 + 25 + 10 = 45$$

$$\therefore I_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}}{45} = \frac{1}{45}\left[0 + 1(25-15) + 1(10-0)\right]$$

$$\therefore I_1 = \frac{20}{45} = 0.44\ A$$

(16)

$$\therefore I_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & -5 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}}{45} = \frac{1}{45}\left[1(25-15) - 0 + 1(-15-0)\right]$$

$$\therefore I_2 = \frac{-5}{45} = -0.11\ A$$

$$\therefore I_3 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}}{45} = \frac{1}{45}\left[1(0-10)+1(-15-0)+0\right]$$

$$\therefore I_3 = \frac{-25}{45} = -0.55\ A$$

أ). الطاقة المبددة في المقاومة (3Ω) في دقيقة واحدة:

$$\therefore P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = I_1^2 R \Rightarrow \Delta W = I_1^2 R \Delta t$$

$$= (0.44)^2 (3)(60)$$

$$\therefore \Delta W = 34.85\ J$$

ب). فرق الجهد بين النقطتين (a) و (b):

$$\therefore V_a - V_b = I_3 - 5 + 4I_3$$

$$= 5I_3 - 5$$

$$= 5(-0.55) - 5$$

$$\therefore V_a - V_b = -7.75\ V$$