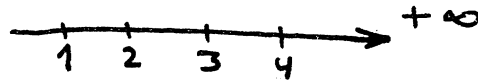


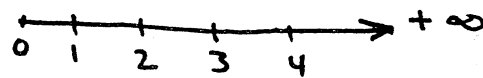
مجموعات الأعداد

تنقسم مجموعات الأعداد إلى خمس مجموعات :

(1) - الأعداد الطبيعية (N^*) : Natural Numbers :ويعبر عنها بمجموعة الأعداد التالية : $N^* = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$ (2) - الأعداد الكلية (N) : Whole Numbers :

وتشمل مجموعة الأعداد الطبيعية مضافا إليها الصفر، ويعبر عنها كالتالي :

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

(3) - الأعداد الصحيحة (Z) : Integer Numbers :

وتشمل مجموعة الأعداد الكلية مضافا إليها الأعداد السالبة، ويعبر عنها :

$$Z = \underbrace{\{ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}}_{Z^-}$$

ويمكن أن نقسم مجموعة الأعداد الصحيحة إلى ثلاث أجزاء :

$$Z^+ = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \} \quad ; \quad Z^- = \{ -4, -3, -2, -1 \}$$

$$Z^* = \{ -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4 \}$$

$$Z^* = (\text{جميع الأعداد صاعدة الصفر})$$

(4) - الأعداد النسبية (Q) : Rational Numbers :

وتشمل مجموعة الأعداد الصحيحة مضافا إليها الأعداد الكسرية، ويعبر عنها :

$$Q = \frac{a}{b} \quad \begin{cases} a \in Z \\ b \in Z^* \end{cases}$$

غير معرف $b=0$: $\frac{a}{b}$ if

مجموعات الأعداد

(5) - الأعداد الحقيقية (Real Numbers $\mathbb{R}$) :

وتشمل كافة المجموعات السابقة بالإضافة إلى الأعداد الغير نسبية.
الأعداد الغير نسبية أي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على شكل نسبة أو التي
ليس لها جذر صحيح وتشمل :

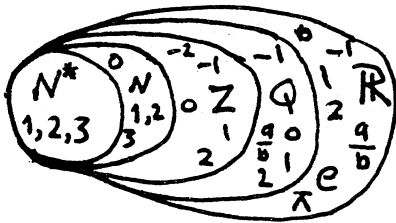
$$(e, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6})$$

↓
لا يمكن تمثيلها في
صورة نسبية

↓
ليس لها جذر صحيح

$$(\pi \neq \frac{22}{7}, e \neq \frac{19}{7})$$

وبالتالي يمكن تلخيص مجموعات الأعداد كالتالي :



$$\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

أي أن : $(\mathbb{N}^*)$ جزئية من $(\mathbb{N})$ وهكذا باقي المجموعات.
القيمة المطلقة (Absolute Value) :

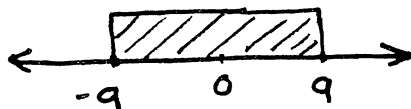
يرمز للقيمة المطلقة لأي عدد حقيقي $|x|$

$$\Rightarrow |x| = \begin{cases} x : x \geq 0 \\ x : x < 0 \end{cases}$$

- لأي قيمة مطلقة $|x| \leq a$

$$-a \leq x \leq a$$

تعني :



المتباينات (المترجمات) Inequalities

1 تعريف المتباينة :

المتباينة هي علاقة بين حرفين أو أكثر يعبر عنها بإحدى الاشارات التالية :
 إشارات المتباينة ($>$, $<$, $\geq$, $\leq$)
 وتكون بإحدى الجمل التالية :

$$a > b, a \geq b, a < b, a \leq b$$

حيث : (a, b) عددين حقيقيين $(a, b \in \mathbb{R})$

2 الفرق بين المتباينة والمعادلة :

i) $x - 3 = 1$

ii) $x - 3 > 1$

①.	(=)	$\Leftrightarrow$ الإشارة $\Rightarrow$	($>$, $<$, $\geq$, $\leq$)
②.	$x - 3 = 1$	$\Leftrightarrow$ الحل $\Rightarrow$	$x - 3 > 1$
	$x = 1 + 3$		$x > 1 + 3$
	$x = 4$		$x > 4$

وبالتالي الحل في المعادلة حل واحد وهو $(x=4)$ بينما في المتباينة الحل
 عبارة عن فترة ~~محددة~~ من (5) إلى (∞) .

3 - خواص المتباينات :

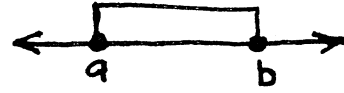
- ① - if $a > b, b > c \Rightarrow a > c$
- ② - if $a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$ (عد حقيقي) c
- ③ - if $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$
- ④ - if $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$
- ⑤ - if $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$
- ⑥ - if $a > b ; a, b > 0$ or $a, b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

المُتَبَايِنَات (المُتَرَاجِحَات) Inequalities

ملاحظة : من خلال خواص المُتَبَايِنَات في حالة ضرب المُتَبَايِنَة في عدد سالب
أو لو قلبت البسوط مقامات فإن إشارة المُتَبَايِنَة تَقلِب .
(4) - الفترات :

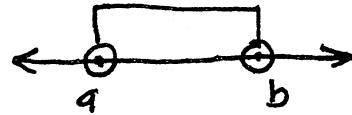
يتم تقسيم الفترات إلى قسمين :
(P) - فترات محدودة (منتهية) :
1- الفترة المغلقة $[a, b]$

$$a \leq x \leq b$$



$$a < x < b$$

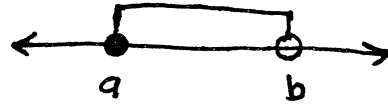
2- الفترة المفتوحة (a, b)



$$[a, b)$$

3- الفترة النصف مفتوحة (النصف المغلقة)

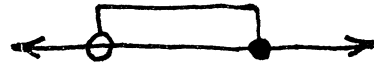
$$a \leq x < b$$



$$(a, b]$$

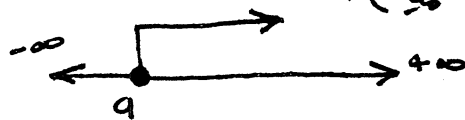
4- الفترة النصف المغلقة (النصف مفتوحة)

$$a < x \leq b$$



(B) - فترات غير محدودة (غير منتهية) :

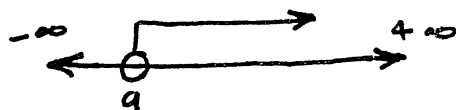
$$[a, +\infty)$$



$$x \geq a$$

1-

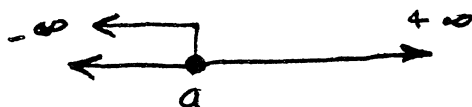
$$(a, +\infty)$$



$$x > a$$

2-

$$(-\infty, a]$$



$$x \leq a$$

3-

المُتَبَايِنَات (المُتَرَاجَعَات) Inequalities

$$-\infty \leftarrow \text{---} \circ \text{---} \rightarrow +\infty \quad x < a \quad (-\infty, a) \quad -4$$

$$(-\infty, +\infty) \quad \longleftrightarrow \quad -\infty < x < +\infty \quad -5$$

(5) - حل المُتَبَايِنَات كَثِيرَةُ الحُدُود من الدرجة الأولى :

الغاية من موضوع المُتَبَايِنَات هو استخراج قيمه (x) أو أي متغير آخر ووضعه على خط الأعداد في صورة حل للمُتَبَايِنَة ، ولاستخراج المتغير يجب أن نتخلص من العوامل المحيطة به (+ ، - ، x ، ÷) ويبقى متغير فقط .
 - يتم التخلص من (+) (-) عن طريق إضاحفة المرافق الجمعي .
 - يتم التخلص من (*) بالقسمة ، ويتم التخلص من القسمة بالضرب .

$$11. \quad 3x - 2 \geq 1$$

$$\Rightarrow 3x - \cancel{2} + \cancel{2} \geq 1 + 2 \quad + (+2)$$

$$\Rightarrow 3x \geq 3 \quad (\div 3)$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{3} \geq \frac{3}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x \geq 1} \quad -\infty \leftarrow \text{---} \bullet \text{---} \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \int x \in [1, +\infty)$$

$$12. \quad 8 - 3x \geq 5$$

$$8 - 3x \geq 5 \quad + (-8)$$

$$8 - 8 - 3x \geq 5 - 8$$

$$\Rightarrow -3x \geq -3 \quad (\div -3)$$

$$\Rightarrow \frac{-3x}{-3} \leq \frac{-3}{-3}$$

المتباينات (المتراجحات) Inequalities

$$\Rightarrow \boxed{x \leq 1}$$


$$\int x \in (-\infty, 1]$$

$$3). \quad 3x < 5x - 8$$

$$3x < 5x - 8 \quad + (-3x)$$

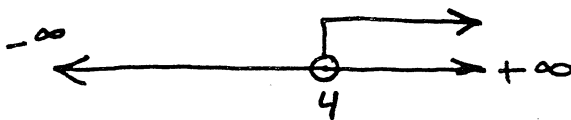
$$3x - 3x < 5x - 3x - 8$$

$$0 < 2x - 8 \quad + (+8)$$

$$\Rightarrow 2x - 8 + 8 > 0 + 8$$

$$\Rightarrow 2x > 8 \quad (\div 2)$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{2} > \frac{8}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x > 4}$$


$$\Rightarrow \int x \in (4, +\infty)$$

$$4). \quad \frac{5-3x}{4} \leq 2$$

$$\frac{5-3x}{4} \leq 2 \quad \times (4)$$

$$\Rightarrow (4). \quad \frac{5-3x}{4} \leq 2 \times 4$$

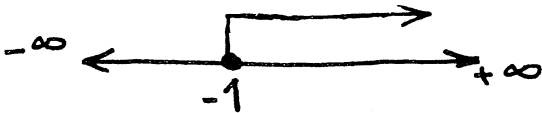
$$\Rightarrow 5 - 3x \leq 8 \quad + (-5)$$

المُتباينات (المُتراجحات) Inequalities

$$\Rightarrow 5 - 5 - 3x \leq 8 - 5$$

$$\Rightarrow -3x \leq 3 \quad \div (-3)$$

$$\Rightarrow \frac{-3x}{-3} \geq \frac{3}{-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x \geq -1}$$


$$\int x \in [-1, +\infty)$$

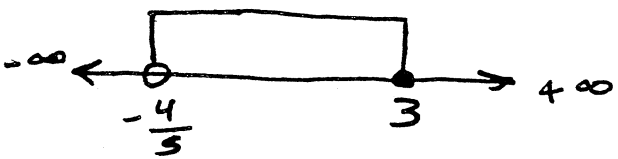
$$5). \quad 12 \geq 5x - 3 > -7$$

$$12 \geq 5x - 3 > -7 \quad + (+3)$$

$$\Rightarrow 12 + 3 \geq 5x - 3 + 3 > -7 + 3$$

$$\Rightarrow 15 \geq 5x > -4 \quad (\div 5)$$

$$\Rightarrow \frac{15}{5} \geq \frac{5x}{5} > \frac{-4}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{3 \geq x > -\frac{4}{5}}$$


$$\int x \in (-\frac{4}{5}, 3]$$

$$6). \quad \frac{y-3}{2} > \frac{1}{2} - \frac{y-5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{y-3}{2} > \frac{1}{2} - \frac{y-5}{4} \quad (* 4)$$

$$\Rightarrow (4) \cdot \frac{y-3}{2} > (4) \cdot \frac{1}{2} - (4) \cdot \frac{y-5}{4}$$

المتباينات (المراجعات) Inequalities

$$\Rightarrow 2(y-3) > 2 - y - 5$$

$$\Rightarrow 2y - 6 > -3 - y \quad + (+y)$$

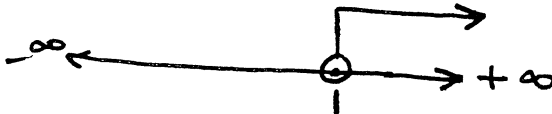
$$\Rightarrow 2y + y - 6 > -3 - y + y$$

$$\Rightarrow 3y - 6 > -3 \quad + (+6)$$

$$\Rightarrow 3y - 6 + 6 > -3 + 6$$

$$\Rightarrow 3y > 3 \quad (\div 3)$$

$$\Rightarrow \frac{3y}{3} > \frac{3}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y > 1}$$


$$\int y \in (1, +\infty)$$

متباينات القيمة المطلقة

القيمة المطلقة هي للتخلص من الإشارة وبالتالي

Ex: $|3| = 3$

$| -3 | = 3$

$\Rightarrow |3| \begin{cases} +3 \\ -3 \end{cases}$

$|x| \leq a$

$-a \leq |x| \leq a$

لا قيمة مطلقة

1- $|2x-3| \leq 1$

$-1 \leq 2x-3 \leq 1 \quad + (+3)$

$-1+3 \leq 2x-3+3 \leq 1+3$

$2 \leq 2x \leq 4 \quad (\div 2)$

$\frac{2}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{4}{2}$

$\Rightarrow \boxed{1 \leq x \leq 2}$



$\Rightarrow \int x \in [1, 2]$

2- $|y-3| = 7$

(لا تمثل متباينة)

$\Rightarrow y-3 = 7 \quad \text{or} \quad y-3 = -7$

$y-3+3 = 7+3$

$y-3+3 = -7+3$

$\Rightarrow \boxed{y=10} \quad \text{or} \quad \Rightarrow \boxed{y=-4}$



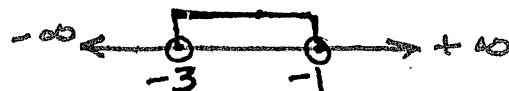
مستويات القيمة المطلقة

3- $|t+2| < 1$

$$-1 < (t+2) < 1 \quad + (-2)$$

$$-1-2 < t+2-2 < 1-2$$

$$\boxed{-3 < t < -1}$$



$$\int t \in (-3, -1)$$

4- $\left| \frac{r+1}{2} \right| \geq 1$

$$-1 \geq \frac{r+1}{2} \geq 1 \quad (\times 2)$$

$$(2) \cdot (-1) \geq \frac{r+1}{2} \cdot (2) \geq (1) \cdot (2)$$

$$-2 \geq r+1 \geq 2 \quad + (-1)$$

$$-2-1 \geq r+1-1 \geq 2-1$$

$$\boxed{-3 \geq r \geq 1}$$



$$\int r \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$$

مراجعة: تحليل المقادير الجبرية

عند إيجاد الحل للمعادلات أو المعادلات التي تكون من الدرجة الثانية أو الثالثة أو أعلى، فإنه يجب إيجاد الجذور للمقادير الجبرية بإحدى طرق التحليل.

١- تحليل العامل المشترك (GCF)

$$1- 6x^3 + 9x^2 - 18x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{6x^3}{3x} + \frac{9x^2}{3x} - \frac{18x}{3x} \right)$$

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 9 & 18 & \textcircled{3} \\ x^3 & x^2 & x & \textcircled{2} \end{array}$$

تقبل القسمة
أقل أس

$$\Rightarrow 3x (2x^2 + 3x - 6)$$

$$\Rightarrow 3x (2x^2 + 3x - 6)$$

(يمكن تحليله
من الدرجة الثانية)

$$2- 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$$

(لا يوجد عامل مشترك)

$$\Rightarrow (4x^3 - 8x^2) + (5x - 10)$$

$$\Rightarrow 4x^2(x - 2) + 5(x - 2)$$

$$\Rightarrow (x - 2)(4x^2 + 5)$$

$$3- 14x^3 - 7x^2 + 3 - 6x$$

(لا يوجد عامل مشترك)

$$\Rightarrow (14x^3 - 7x^2) + (3 - 6x)$$

$$\Rightarrow 7x^2(2x - 1) + (3)(1 - 2x)$$

$$7x^2(2x - 1) - 3(2x - 1)$$

$$\Rightarrow (2x - 1)(7x^2 - 3)$$

ملاحظة: يتم استخدامه عند تكرار المتغير بأس مختلف.

مراجعته : تحليل المقادير الجبرية

(2) تحليل مربع الحداينة :

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab \pm b^2$$

$\swarrow$ نفس الإشارة $\searrow$ موجب دائماً

- يستلزم وجود حدين بينهما (+) و (-) ورفع $(a \pm b)^2$ للتربيع .

$$1- (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$2- (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$3- (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$4- (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 = 7 - 2(\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}) + (\sqrt{2})^2$$

$$= 7 - 2\sqrt{14} + 2$$

الفاق سالب

$$\begin{matrix} \textcircled{2} & \nearrow & \textcircled{2} \\ a & - & b \end{matrix}$$

(3) تحليل الفرق بين المربعين :

يستلزم أن تكون حدين بينهما إشارة سالبة وكلاهما مربع يمكن إيجاد جذورهم .

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$\downarrow$ جذره $\downarrow$ جذره $\downarrow$ جذره $\downarrow$ جذره

$$1- x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

$$2- x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$$

$$3- 49 - v^2 = (7-v)(7+v)$$

$$4- \frac{1}{16} z^4 - \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{4} z^2 - \frac{1}{9}\right) \left(\frac{1}{4} z^2 + \frac{1}{9}\right)$$

$$5- 5h^2 - 7v^2 = (\sqrt{5}h - \sqrt{7}v)(\sqrt{5}h + \sqrt{7}v)$$

مراجعته : تحليل المقادير الجبرية

$$6- \quad 64m^2 - 9n^2 = (8m - 3n)(8m + 3n)$$

$$7- \quad 8x^3y - 2xy^3 \quad \Leftarrow \quad \left(\begin{array}{l} \text{لا تشمل فرق بين مربعين} \\ \text{نأخذ عامل مشترك} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow 2xy(4x^2 - y^2)$$

فرق بين مربعين

$$\Rightarrow \boxed{2xy(2x - y)(2x + y)}$$

$$8- \quad \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right)$$

(4) - تحليل الفرق ومجموع المكعبين :

يُستَطرَق أن يكون من أحدين كلاهما تكعيباً ويمكن إيجاد الجذور التكعيبية والاسمارة بينهما (موجباً +) أو (سالباً -).

$$a^3 - b^3 \Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

نفس الإشارة

حذر حذر مربع

موجب دائماً

مربع

$(-) \times (-) = + \checkmark$
 $(+) \times (+) = + \checkmark$

$$a^3 + b^3 \Rightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$1). \quad y^3 - 64 = (y - 4)(y^2 + 4y + 16)$$

$$2). \quad 27z^3 - 8 = (3z - 2)(9z^2 + 6z + 4)$$

$$3). \quad x^3 + 125 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$$

مراجعة: تحليل المقادير الجبرية

$$4). \frac{1}{9^3} + \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{81} - \frac{13}{36} + \frac{1}{16}\right)$$

$$5). \frac{1}{b^3} - \frac{1}{125} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{5}\right) \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{5b} + \frac{1}{25}\right)$$

$$6). \frac{27}{x^3} + \frac{8}{125} = \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{5}\right) \left(\frac{9}{x^2} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{25}\right)$$

$$7). 0.125 - m^3 = (0.5 - m) (0.25 + 0.5m + m^2).$$

5). تحليل مقدار المربع الكامل (اكمال المربع):

يُستَخدم في المقدار الثلاثي لتحليله كمربع كامل: $ax^2 + bx + c = (x \pm a)^2$: جذر جذر موجب مربع مربع

1- حدودية ثلاثية.

2- الأول والثالث كلاهما يحمل مربع.

3- اشارة الحد الثالث موجب (+).

$$3). x^2 + 10x + 25$$

$$\Rightarrow (x + 5)^2$$

$$4). 9h^2 + 6h + 3$$

$$\Rightarrow (3h + \sqrt{3})^2$$

$$5). y^2 - 4y + 4$$

$$\Rightarrow (y - 2)^2$$

$$1). x^2 + 6x + 9$$

مربع موجب مربع

$$\Rightarrow (x + 3)^2$$

$$2). 9h^2 - 6h + 3$$

$$\Rightarrow (3h - \sqrt{3})^2$$

$$6). y^2 + 14y + 36$$

$$\Rightarrow (y + 6)^2$$

مراجعة : تحليل المقادير الجبرية

66) تحليل المقدار الثلاثي بالتجربة :

عندما لا يتوفر شروط اكمال المربع يتم اللجوء لطريقة التحليل بالتجربة :

1)- $x^2 + 10x + (21)$ → ليس لها جذر
(لا يمكن اكمال المربع)

$$\Rightarrow (x + 7)(x + 3)$$

2)- $y^2 + y + (12)$ → ليس لها جذر
(لا يمكن اكمال المربع كامل)

$$\Rightarrow (y + 4)(y - 3)$$

3)- $6x^2 + 17x + (7)$ → ليس لها جذر

$$\Rightarrow (3x + 7)(2x + 1)$$

$$\begin{array}{r} 14x \\ 3x \\ \hline 17x \end{array}$$

4)- $z^2 - z - (6)$ → لا يمكن اكمال المربع

$$\Rightarrow (z - 3)(z + 2)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} 2z \\ 3z \\ \hline -z \end{array} \text{ O.K.}$$

التجربة

عددتين حاصل ضربهما (21)
ومجموعهما أوقربها (10x)
① (3 و 7) فختبر

$$(x+7)(x+3)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} 3x \\ 7x \\ \hline 10x \end{array} \text{ الفرضية تتحقق}$$

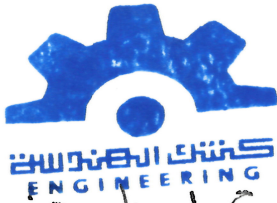
التجربة

① فرضية (2) (y) (y) (6) فختبر

$$\Rightarrow \begin{array}{r} 2y + 2y \\ 6y + 6y \\ \hline 8y \end{array} \text{ الفرضية لا تتحقق}$$

② فرضية (3) (y) (y) (4) فختبر

$$\begin{array}{r} 4y \\ 3y \\ \hline y \end{array} \text{ الفرضية تتحقق}$$



متباينات من الدرجة الثانية

- يتم ايجاد فترة الحل للمتباينات من الدرجات العليا عن طريق ايجاد جذور المتباينة وذلك باستخدام طرق تحليل المقادير الجبرية.

Ex ①: $x^2 - 7x + 10 > 0$

- بالنظر إلى المقدار الجبري نلاحظ ان لا يمثل مربع كامل (حيث 10 ليس لها جذر صحيح)
وبالتالي نستخدم التحليل بالتجربة كالتالي:

$(x - 5)(x - 2) > 0$

نوجد النقاط الحرجة:
 $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$
 $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

	$-\infty$	0	2	3	5	6	$+\infty$
$(x - 5)$		-	+	-	+	-	
$(x - 2)$		-	-	+	+	+	
$(x - 5)(x - 2)$		-	-	+	+	+	
			✓			✓	



$\Rightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$

① اختبار: $(x - 2)(x - 5)$

حسبان حاصل ضربهما (10)
والفرق أو الجمع يساوي $(-7x)$
التحقق
 $\frac{2x}{5x} = 7x$
الفرضية لا تتحقق ✓

② اختبار: $(x - 5)(x - 2)$

$-5x$
 $-2x$
 $-7x$
الفرضية تتحقق ✓

Ex ②: $(x - 1)^2 > 4$

$\Rightarrow$ المقدار الجبري يمثل مربع الحدانية

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 > 4 \quad + (-4)$

$x^2 - 2x + 1 - 4 > 4 - 4$

$x^2 - 2x - 3 > 0$

المتباينات من الدرجة الثانية

$$\Rightarrow (x-3)(x+1) > 0$$

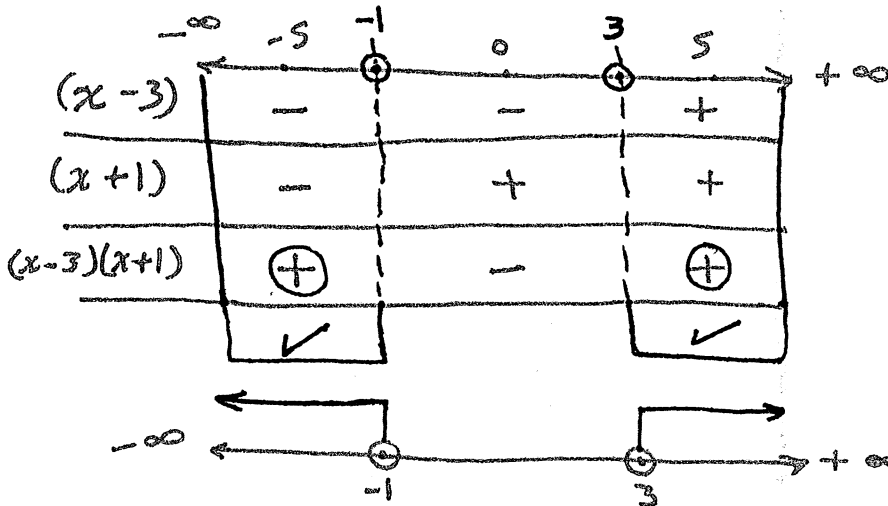
$$\Rightarrow x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

$$\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

النقاط الحرجة:

$$\text{رضا: } (x-3)(x+1)$$

$$\frac{(-3x)}{(x)} = \frac{0 \cdot x}{-2x}$$



$$\Rightarrow \boxed{x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)}$$

$$\text{Ex ③: } \frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{4}$$

بالنظر إلى المقدار الجبري نلاحظ أن كل من $(\frac{1}{4})$ و $(\frac{1}{9})$ تمثل مربع
وسمكنا إيجاد جذورهما وبالتالي نقسم المتباينة إلى جزئين لسمكنا
فقال فرق بين مربعين كالآتي:

$$x^2 < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{4} < 0$$

$$(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) < 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$x^2 > \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{9} > 0$$

$$(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) > 0$$

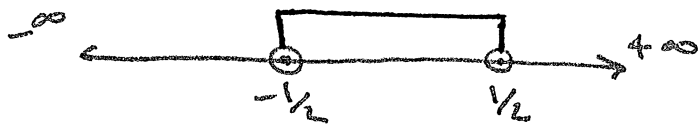
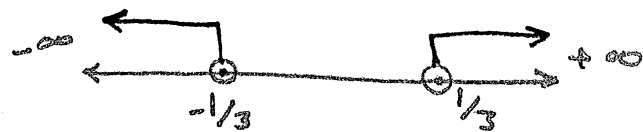
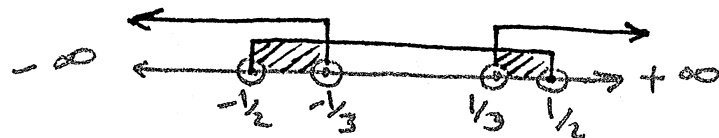
$$\Rightarrow x + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

متباينات من الدرجة الثانية

	$-\infty$	-4	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$x + \frac{1}{2}$		-	○	+	○	+	
$x - \frac{1}{2}$		-		-		+	
$(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$		+		⊖		+	
							✓

	$-\infty$	-4	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	4	$+\infty$
$x + \frac{1}{3}$		-	○	+	○	+	
$x - \frac{1}{3}$		-		-		+	
$(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})$			⊕	-		⊕	
							✓



$$\Rightarrow \int x \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$$

Ex ④: $2x^2 \geq (5+4x)$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 5 \geq 0$$

- هذا المقدار الجبري لا يمثل مقدار مربع كامل وبالتالي:

① إشارة الحد الثالث (-)

② ليس لها جذر صحيح

③ معامل (x^2) ليس (1)

$\Rightarrow$ وبالتالي نقوم بإكمال المربع بإضافته $(\frac{1}{2} \text{ معامل } x)^2$
بشرط معامل (x^2) يكون (1)

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 5 \geq 0 \quad \boxed{\div 2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - \frac{5}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 - \frac{5}{2} \geq 0 \quad +1 -1$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) - \frac{2+5}{2} \geq 0$$

التاريخ / 05.10.2024

عدد الصفحات (09)

مبتانيات من المرحلة الثانية

$$\Rightarrow \underbrace{(x-1)^2}_{\text{مربع}} - \underbrace{\frac{7}{2}}_{\text{عدد}} \geq 0$$

وهذا المقدار يمثل فرق بين مربعين وبالتالي:

$$(x-1 + \sqrt{\frac{7}{2}})(x-1 - \sqrt{\frac{7}{2}}) \geq 0$$

$$\Rightarrow x-1 + \sqrt{\frac{7}{2}} = 0 \Rightarrow x = 1 - \sqrt{\frac{7}{2}} = 0.87$$

$$\Rightarrow x-1 - \sqrt{\frac{7}{2}} = 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{\frac{7}{2}} = 2.87$$

النقاط
المرجوة

	$-\infty$	-4	0.87	0.9	2.87	4	$+\infty$
$x-2.87$		-		-		+	
$x+0.87$		-		+		+	
$(x-2.87)(x+0.87)$		+		-		+	
		✓				✓	

$$\Rightarrow \boxed{x \in (-\infty, 0.87] \cup [2.87, +\infty)}$$

Ex ⑤: $x^4 < x$

$$\Rightarrow x^4 - x < 0$$

نأخذ عامل مشترك

$$\Rightarrow x(x^3 - 1) < 0$$

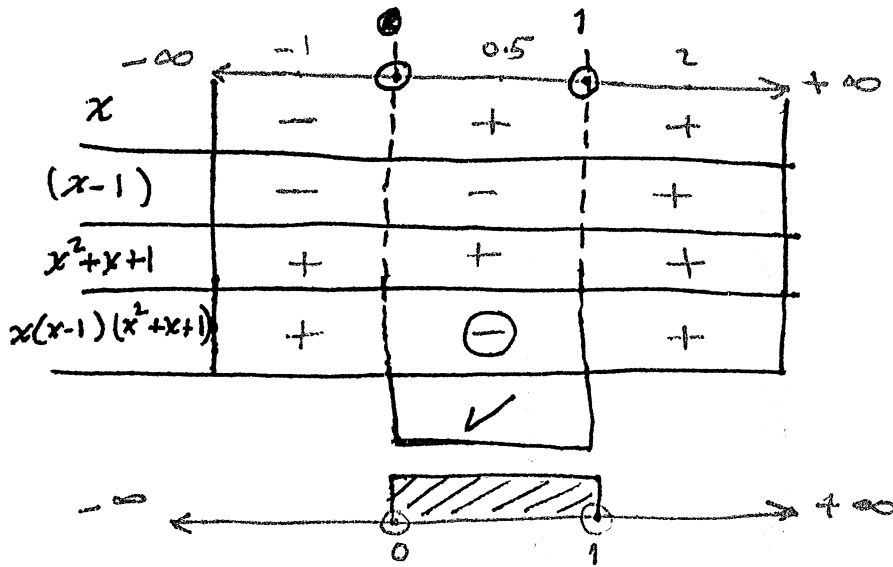
فرق بين مكعبين

$$\Rightarrow x(x-1)(x^2+x+1) < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=0} ; x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1} ; \underbrace{x^2+x+1}_{\text{هذا مستحيل لأن دالته موجبة}} = 0$$

المقاطع المرجوة $\Rightarrow$ لا يتحقق < 0

مستويات من الدرجة الثانية



$\Rightarrow \int x \in (0, 1)$

Ex ⑥: $\frac{1}{x} < 4$

$\Rightarrow \frac{1}{x} - 4 < 0$

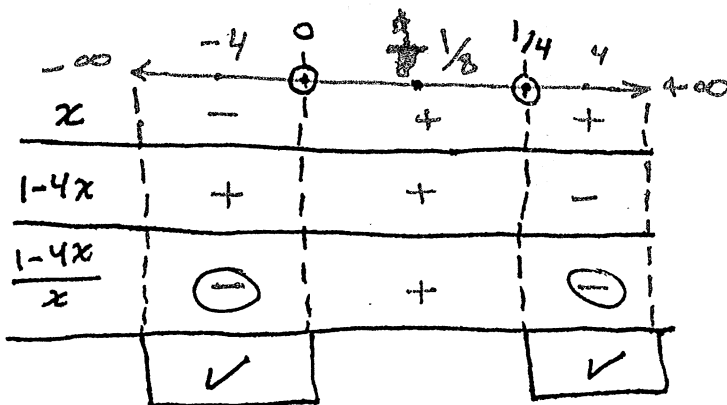
$\frac{1-4x}{x} < 0$

$\Rightarrow 1-4x = 0 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

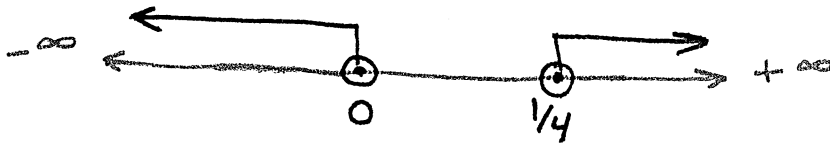
or:

$x = 0$

النقاط الحرجة



متباينات من الدرجة الثانية



$$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{4}, +\infty)$$

متباينات كسرية :

وهي متباينات تحتوي على متغير في البسط والمقام :

Ex ①: $\frac{x-4}{x+7} > 0$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{x+7} > 0$$

$$* (x+7)^2$$

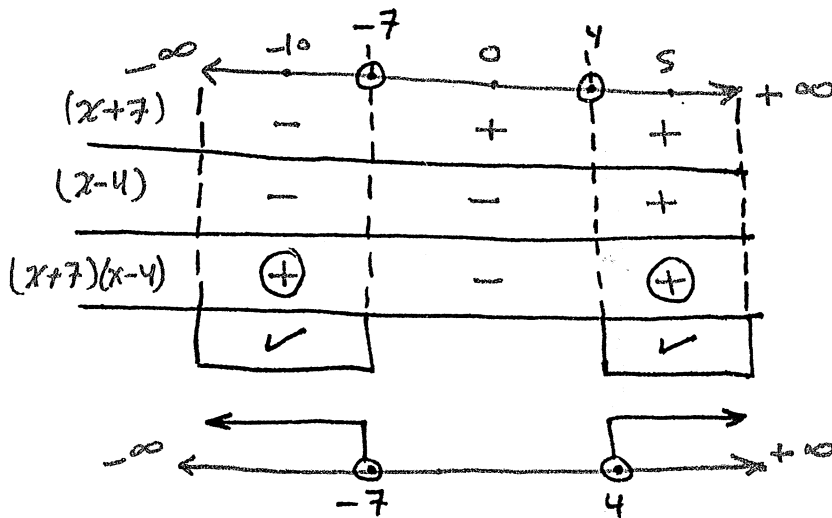
السبب في
ضرب بقدر
مربع
 $(x+7)^2$
للتخلص من السالب
 $(x+7)^2$
دائما موجب

$$\Rightarrow \frac{x-4}{x+7} \cdot (x+7)^2 > 0 \cdot (x+7)^2$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+7) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x-4 &= 0 \Rightarrow x=4 \\ x+7 &= 0 \Rightarrow x=-7 \end{aligned}$$

النقاط الحرجة



$$\Rightarrow x \in (-\infty, -7) \cup (4, +\infty)$$

متباينات كسرية

$$\text{Ex ②: } \frac{x^2 - 16}{x^2 + 1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 16}{x^2 + 1} * (x^2 + 1) < (0) * (x^2 + 1)$$

$* (x^2 + 1)$
↓
دائما موجبة

$$\Rightarrow (x^2 - 16) < 0$$

المقدار الجبري يمثل فرق بين مربعين

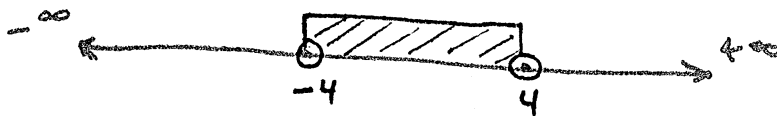
$$\Rightarrow (x + 4)(x - 4) < 0$$

$$\Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$\Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

النقاط الحرجة

	$-\infty$	-5	-4	0	4	5	$+\infty$
$(x+4)$		-	+	+	+		
$(x-4)$		-	-	-	+		
$(x+4)(x-4)$		+	-	-	+		
			✓				



$$\Rightarrow x \in (-4, 4)$$

$$\text{Ex ③: } \frac{x^2 - 4x - 5}{(x^2 - 2x - 15)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 4x - 5}{(x^2 - 2x - 15)} \geq 0$$

$$* (x^2 - 2x - 15)^2$$

لنصفنا
أن يكون
موجبا

متباينات كسرية

$$\Rightarrow \frac{(x^2 - 4x - 5)}{(x^2 - 2x - 15)^2} * (x^2 - 2x - 15)^2 \geq (0) \cdot (x^2 - 2x - 15)^2$$

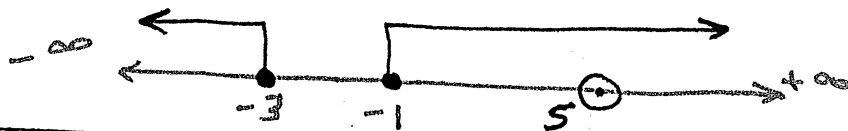
$$\Rightarrow (x^2 - 4x - 5)(x^2 - 2x - 15) \geq 0$$

$\downarrow$ لا يمكن مربع كامل بالتجربة $\downarrow$ لا يمكن مربع كامل بالتجربة

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 1)(x - 5)(x + 3) \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 5}, \boxed{x = -1}, \overset{\text{مكرر}}{\uparrow} x = 5, \boxed{x = -3}$$

	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	5	7	$+\infty$
$(x-5)$		-	●	-	●	-	○	+	
$(x+3)$		-		+		+		+	
$(x-5)$		-		-		-		+	
$(x+1)$		-		-		+		+	
$(x-5)(x+3)(x-5)(x+1)$		+		-		+		+	
			✓				✓		



$$\int x \in (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty) \cap x \neq 5$$

تجعل المقام يساوي صفر

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 - 2x - 15) \\ (5)^2 - (2 \times 5) - 15 \\ \boxed{25 - 10 - 15 = 0} \end{array} \right\}$$

المتباينات الكسرية

$$Ex \textcircled{4}: \frac{x-4}{-x^2-1} > 0$$

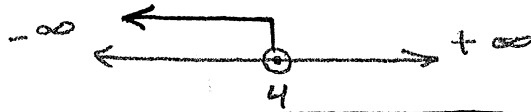
$$\Rightarrow \frac{x-4}{-x^2-1} \cdot (-x^2-1) > (0) \cdot (-x^2-1) \quad * (-x^2-1)$$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{(-x^2-1)} \cdot (-x^2-1) > 0$$

$$\Rightarrow x-4 < 0 \quad + (+4)$$

$$\Rightarrow x-4+4 < 0+4$$

$$\Rightarrow \boxed{x < 4}$$



$$\Rightarrow \boxed{x \in (-\infty, 4)}$$

في هذه المثال لا داعي بأن
تم ترسيم المقدار $(-x^2-1)$
سبب : أن المقدار $(-x^2-1)$
يكون سالبا في جميع الحالات
في التالي يمكن الضرب في
المقدار وعكس إشارة
المتباينة .

ملاحظة :

- * في المتباينة الكسرية المقدار في المقام قد يكون موجب أو سالبا بناءً على قسمه المتغير .
- في حالة كان المقدار الجبري في المقام دائما موجبا نضرب الطرفين المتباينة في نفس المقدار .
- في حالة كان المقدار الجبري في المقام دائما سالبا كما في المثال الرابع نضرب في نفس المقدار ونعكس

الإشارة .

- في حالة كان المقدار الجبري في المقام يحتمل يكون موجبا أو سالبا في هذه الحالة نستخلص من السالب نضرب في صريح المقدار الجبري .



معادلة الخط المستقيم Straight Line

الحدود العامة للخط المستقيم :

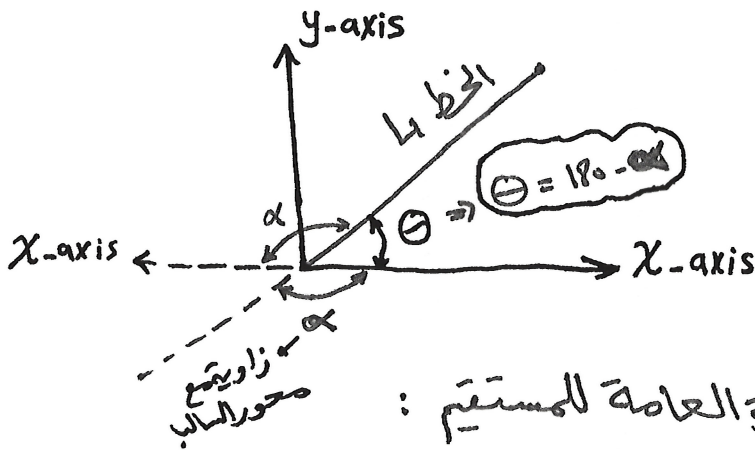
$$ax + by + C = 0$$

« وهي معادلة من الدرجة الأولى » حيث (a, b, c) ثوابت

ميل الخط المستقيم $\leftarrow (m) \text{ (Slope) (gradient)}$

(1) ميل الخط المستقيم :

هو ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع محور السينات الموجب .



$$m = \text{slope} = \tan \theta$$

(2) ميل الخط المستقيم من الحدود العامة للمستقيم :

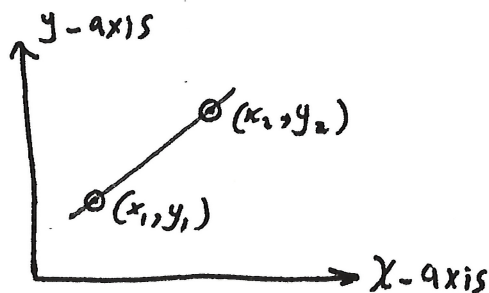
$$ax + by + C = 0$$

$$m = \text{slope} = \frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-a}{b}$$

(3) ميل الخط المستقيم الذي يمر بنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

فإن الميل هو $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$



معادلة الخط المستقيم Stright Line

ملاحظة هامة:

1) لو عندى مستقيمين (L_1, L_2) (متوازيين) (parallel) فإن:
ميل الخط الثاني = ميل الخط الاول
 $L_1 // L_2$
 $m_1 = m_2$

2) لو عندى مستقيمين (L_1, L_2) (متعامدين) (perpendicular) فإن:
 $L_1 \perp L_2$
 $m_1 \cdot m_2 = -1$

أى حاصل ضرب الميل الاول والميل الثاني يساوى (-1)

$$\Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad ; \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم:

2) معادلة الخط المستقيم بدلالة الميل m
ونقطة (x, y) على الخط المستقيم

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \rightarrow 2$$

1) معادلة الخط المستقيم الذى يمر

بنقطتين

passing through two point

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$



$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow 1$$

معادلة الخط المستقيم Straight Line

(4) معادلة الخط المستقيم بدلالة الميل والمقطع من محور (y) (C)

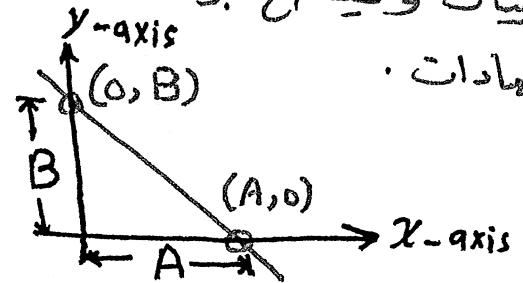
$$y = mx + C \rightarrow (4)$$

(الميل) (y-intercept)

(3) معادلة الخط المستقيم بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1 \rightarrow (3)$$

هذا الخط يقطع جزء حوله (A) من محور السينات ويقطع جزء حوله (B) من محور الصادات.



مثال: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 4)$ و $(-3, 1)$.

الحل: Let: $(x_1, y_1) = (2, 4)$ و $(x_2, y_2) = (-3, 1)$

لايجاد معادلة الخط المستقيم نحتاج نقطة من (x, y) والميل.

$$\Rightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y - 4}{x - 2} = \frac{1 - 4}{-3 - 2} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow y - 4 = \frac{3}{5}(x - 2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{5}x - \frac{6}{5} + 4}$$

معادلة الخط المستقيم Stright Line

مثال 2: أوجد معادلة الخط المستقيم التي تمر بالنقطة $(4, 2)$ ومستوازي مع الخط الذي معادلته $x - 4y + 1 = 0$.

الحل:

بما أن الخط المطلوب معادلته يوازي الخط $(x - 4y + 1 = 0)$ فإن:

$$m_1 = m_2$$

$$\Rightarrow m = \frac{(- \text{معامل } x)}{(\text{معامل } y)} = \frac{-1}{-4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

معادلة الخط المستقيم المطلوب هي:

$$\frac{y-2}{x-4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{4}x - 1 + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + 1}$$

مثال 3: أوجد معادلة الخط المستقيم التي تمر بالنقطة $(-2, 5)$ وعمودي على الخط الذي معادلته $(4x + y - 3 = 0)$.

الحل:

نفرض أن الخط المطلوب (L_1) ، والخط $(4x + y - 3 = 0)$ هو (L_2)

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_2 = \frac{(- \text{معامل } x)}{(\text{معامل } y)} = \frac{-(4)}{1} = -4$$

معادلة الخط المستقيم Straight line

$$m_1 = \frac{-1}{m_2} = \frac{-1}{-4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

معادلة الخط المستقيم المطلوب هي :

$$\frac{y-5}{x-(-2)} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y-5 = \frac{1}{4}(x+2)$$

$$y-5 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

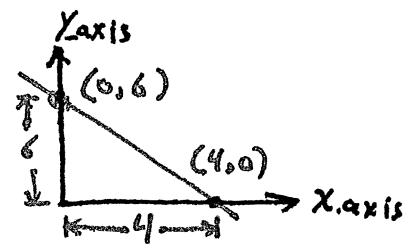
$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + 5} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{11}{2}$$

مثال 4: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يقطع محور (x-axis) في النقطة (4, 0) ويقطع محور (y-axis) في النقطة (0, 6).

الحل :

المستقيم يقطع محور السينات في (4) ويقطع محور الصادات في (6).

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1}$$



مثال 5: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يقطع محور (y-axis) في النقطة (0, 2) ومتوازي مع الخط الذي معادلته (x-3y+1=0).

الحل :

المعطى في هذه المسألة هو الجزء المقطوع من محور (y) هو (c=2).
والجواب (m₁ = m₂) لأن المستقيم الأول والثاني متوازيين

معادلة الخط المستقيم Straight Line

$$m_1 = m_2 = \frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-1}{-3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

The equ. of a line is : $y = mx + c$
 $\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}x + 2}$

مثال : أوجد معادلة الخط المستقيم العمودي على الخط الذي معادلته $3x - 4y + 2 = 0$ ويقطع محور (y-axis) في النقطة $(0, 4)$.

الحل :

ميل الخط العمودي يساوي :

$$m_2 = \frac{(\text{معامل } x)}{\text{معامل } y}$$

$$m_2 = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$m_1 \perp m_2$, $m_1 = \frac{-1}{m_2} = \boxed{\frac{-4}{3}}$

معادلة الخط المستقيم هي :

$$y = mx + c$$

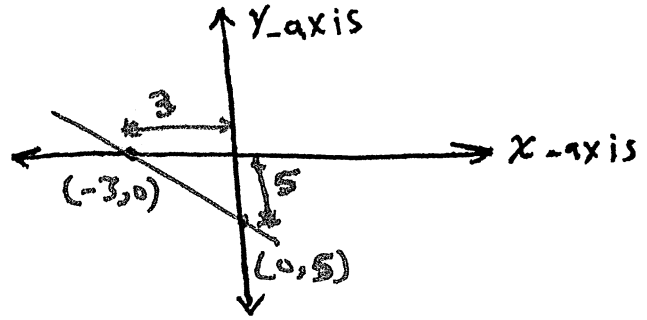
$$\Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{-4}{3}\right)x + 4}$$

ملاحظة هامة :

لو عندك خط مستقيم معادلته : $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-5} = 1$

هذا يعني أن المستقيم يقطع جزء طوله (3) من محور السينات السالب .
ويقطع محور الصادات السالب بجزء طوله (5) .

Straight Line معادلة الخط المستقيم



احداثيات نقطة المنتصف (Midpoint of a line segment):

$A(x_1, y_1)$ ——— $B(x_2, y_2)$
 $\downarrow$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

مثال: أوجد نقطة منتصف المسافة بين النقطتين $A(-1, 4)$, $B(5, -3)$ على الخط المسنن

$A(-1, 4)$ ——— Midpoint $(2, \frac{1}{2})$ ——— $B(5, -3)$
 $\Rightarrow = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{4-3}{2} \right)$
 $= \left(2, \frac{1}{2} \right)$

مثال: أوجد معادلة الخط المتوسط للمثلث (ABC) والتي تمر بالنقطة (A) ، بحيث كانت احداثيات رؤوس المثلث $(-3, 7)$, $B(-4, 9)$, $C(2, 5)$.

الحل:

معادلة الخط المستقيم Straight line

نوجد نقطة المنتصف بين (BC) :

$$M = \left(\frac{-4-2}{2}, \frac{9-1}{2} \right)$$

$$M = (-3, 4)$$

وبالتالي يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم بدلالة نقطتين :

$$A(x_1, y_1) ; M(x_2, y_2)$$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

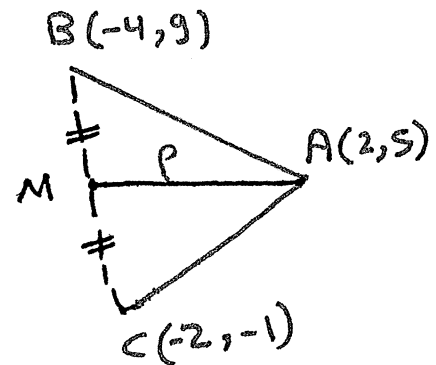
$$\Rightarrow \frac{y-5}{x-2} = \frac{4-5}{-3-2}$$

$$\frac{y-5}{x-2} = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{5}(x-2) + 5$$

$$y = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} + 5$$

$$y = \frac{1}{5}x - \frac{2+25}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{5}x + \frac{23}{5}}$$



المسافة بين النقطتين (Distance between two point)

$$\begin{array}{ccc} A(x_1, y_1) & \text{-----} & B(x_2, y_2) \\ & D & \end{array}$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

معادلة الخط المستقيم

مثال : معطى ثلاثة نقاط $A(1,0)$, $B(3,0)$, $C(6,0)$ والمطلوب اثبات أنها تقع على استقامة واحدة .

الحل :

$$\overline{A(1,0) \quad B(3,0) \quad C(6,0)}$$

لكي تكون جميعها على استقامة واحدة يجب ان تكون المسافة الكبيرة تساوي مجموع

$$D(A \rightarrow C) = D(A \rightarrow B) + D(B \rightarrow C) \quad \text{المسافتين :}$$

قانون البعد بين
نقطتين

$$\Rightarrow D(A \rightarrow C) = \sqrt{(6-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(5)^2} = 5$$

$$\Rightarrow D(A \rightarrow B) = \sqrt{(3-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(2)^2} = 2$$

$$\Rightarrow D(B \rightarrow C) = \sqrt{(6-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(3)^2} = 3$$

$$\therefore D(A \rightarrow C) = D(A \rightarrow B) + D(B \rightarrow C)$$

$$\boxed{5 = 2 + 3} \quad \#$$

القاطات الثلاثة تقع على استقامة واحدة

طريقة مبسطة لطريقة ايجاد (sin, cos, tan) للزوايا :

الزاوية	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

قيم البسط
كلما داخل
الجذر

قيمة المقام
خارج الجذر

2

Straight Line

معادلة الخط المستقيم

من الشكل المرسوم يمكن إيجاد $(\sin)$ $(\cos)$ $(\tan)$ كل الزوايا

الرقم المقابل للزاوية (30°) و $(\sin)$ داخل الجذر

$$\sin(30^\circ) = \frac{\sqrt{1}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

خارج الجذر

$$\cos(30^\circ) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\tan(30^\circ) = \frac{\sin(30^\circ)}{\cos(30^\circ)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\sin(60^\circ) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{\sqrt{1}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

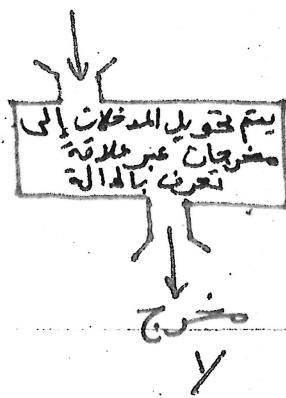
$$\tan(60^\circ) = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \boxed{\sqrt{3}}$$

الدوال (Functions)

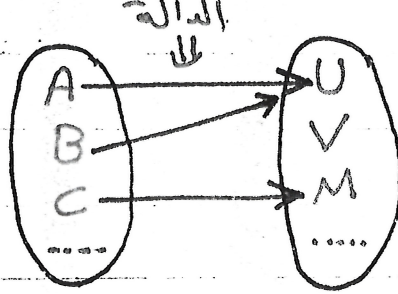
تعريف الدالة : هي علاقة بين مجموعتين (X, Y) تحقق لكل عنصر من عناصر (X) عنصراً واحداً فقط من عناصر (Y) ويرمز لها بالرمز

$$(Function) \leftarrow F : X \rightarrow Y \xRightarrow{\text{يرمز}} F(x) \text{ or } y$$

مدخلات X



ويمكن أن نعبّر عن الدوال بالرسم التالي :

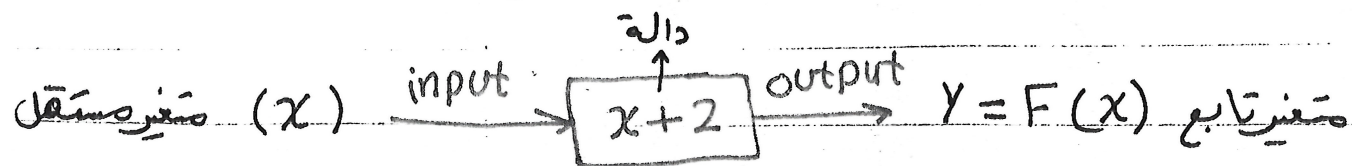
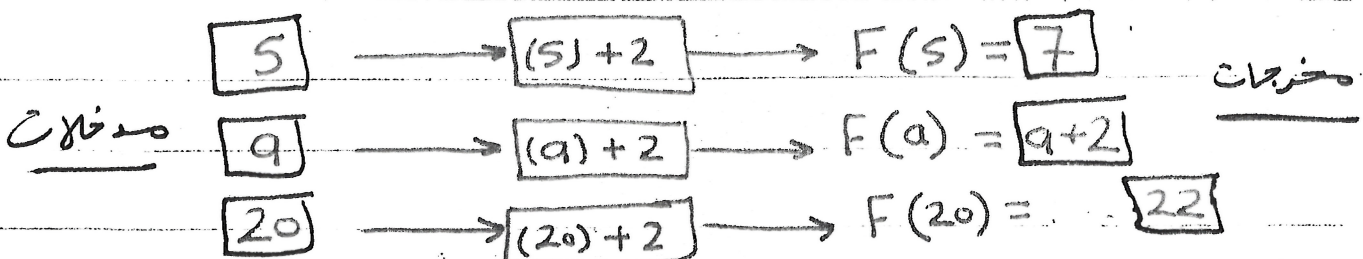


مدخلات
قيم : X

مخرجات
قيم : Y

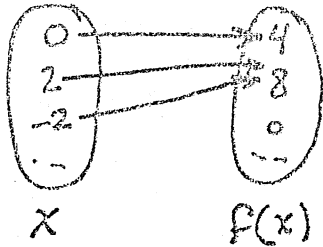
ملاحظة : في الدوال يمكن لعنصر من المخرجات (Y) أن يرتبط بعنصر أو أكثر من عناصر المدخلات (X) ، بينما لا يمكن لعنصر من المدخلات (X) أن يرتبط بأكثر من عنصر من المخرجات (Y) :

- يمكن تعريف الدالة على أنها علاقة بين متغيرين أحدهما متغير مستقل (X) وهو من المدخلات (input) ويتغيره يؤثر على المتغير التابع (Y) من المخرجات (output).

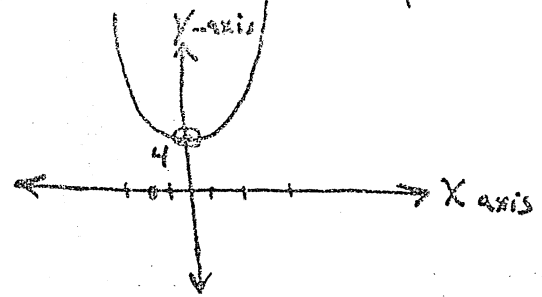


الدوال (Functions)

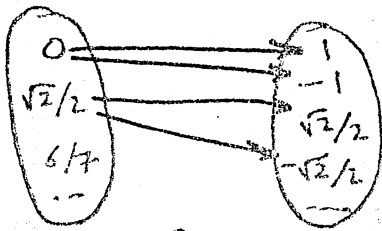
الفرق بين المعادلات والدوال :
لفهم الفرق بين الدالة والمعادلة نأخذ العلاقة التالية $(y = x^2 + 4)$:



$$\begin{aligned} x=0 &\Rightarrow y=4 \\ x=2 &\Rightarrow y=8 \\ x=-2 &\Rightarrow y=8 \end{aligned}$$



وبالتالي في العلاقة $(y = x^2 + 4)$ ، لكل قيمة من المدخلات (x) أعطت قيمة واحدة فقط في المخرجات (y) ، بينما قيمة (y) كانت نتيجة لقيمة اثنين من المدخلات $(2, -2)$ وبالتالي العلاقة هي دالة .



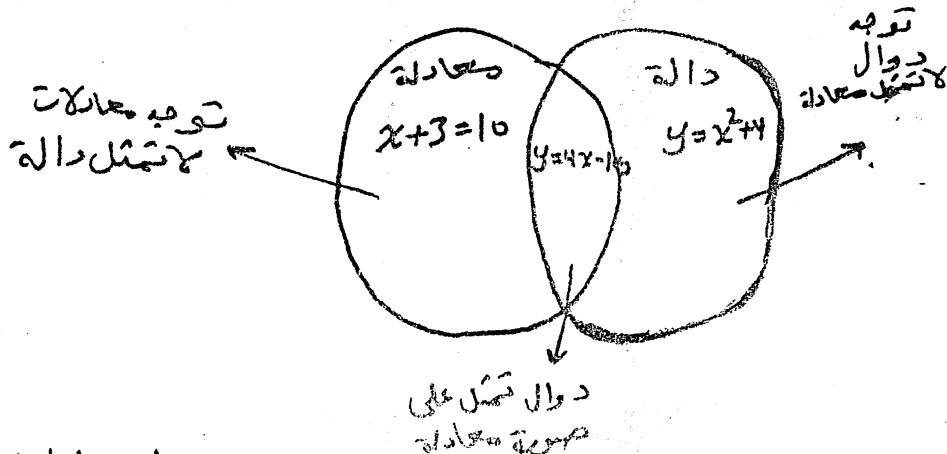
- بينما في حالة العلاقة التالية $(x^2 + y^2 = 1)$ نجد أن :

$$x=0 \Rightarrow y = -1 \text{ or } 1$$

$$x = \sqrt{2}/2 \Rightarrow y = \sqrt{2}/2 \text{ or } -\sqrt{2}/2$$

وبالتالي فإن العلاقة $(x^2 + y^2 = 1)$ لا تمثل دالة بل هي معادلة لأن كل قيمة في (x) أعطت أكثر من قيمة من (y) .

إذا الفرق بين الدوال والمعادلات فالمعادلة هي علاقة تساوي فيها متغير واحد أو متغيرين يمكن أن يكون كل قيمة من (x) لها صيرورة في (y) ، بينما في الدوال هي علاقة بين متغيرين يؤثر أحدهما على الآخر ويكون لكل قيمة من (x) صيرورة واحدة في (y) .



الدوال Functions

عند التعامل مع الدوال يجب التعرف على مفاهيم أساسية لأي دالة وهي ما يعرف بنطاق ومدى الدالة.

(حقوق x الممكنة للدالة) : (المجال) (النطاق) Domain
(حقوق y الناتجة للدالة) : (المجال المقابل) (المدى) Range

- بالرجوع للمثال السابق: $F(x) = x + 2$

لايجاد نطاق ومدى الدالة يجب استبعاد القيم التي تنتج مقاماً صفراً أو القيم التي تنتج جذراً سالباً.

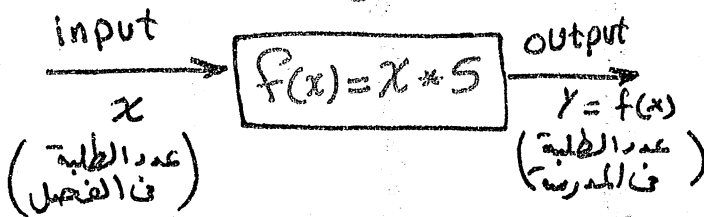
$\Rightarrow$ Domain : $(-\infty, +\infty)$

السبب: لا توجد قيم تجعل مقام صفراً أو جذراً سالباً وبالتالي كل القيم ممكنة لـ $f(x)$.

$\Rightarrow$ Range : $(-\infty, +\infty)$

السبب: لا توجد قيم تجعل مقام صفراً أو جذراً سالباً وبالتالي كل القيم ممكنة لـ $f(x)$.

مثال: المطلوب إيجاد دالة تعبر عن أعداد الطلبة في المدرسة بدلالة عدد الطلبة في الفصل (x)، مع العلم عدد فصول المدرسة (5 فصول).

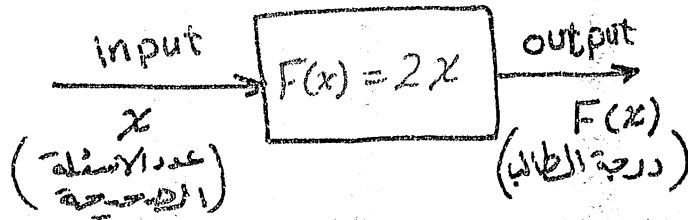


$\Rightarrow$ Domain : $[0, +\infty)$ $\Rightarrow$ (لأن عدد الطلبة لا يمكن أن يكون سالباً)

$\Rightarrow$ Range : $[0, +\infty)$ $\Rightarrow$ (لأن إجمالي الطلبة لا يكون سالباً)

الدوال Functions

مثال : المطلوب إيجاد دالة تعبر عن درجة الطالب في الإمتحان المكون من 25 سؤال وكل سؤال درجة (2) .



$\Rightarrow$ Domain : $[0, 25]$ $\Rightarrow$ أكبر عدد من الأسئلة الصحيحة (25 سؤال)
 $\Rightarrow$ Range : $[0, 50]$ $\Rightarrow$ أعلى قيمة درجة ممكنة (للطالب)

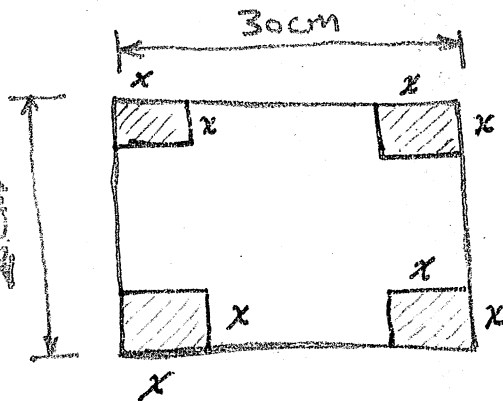
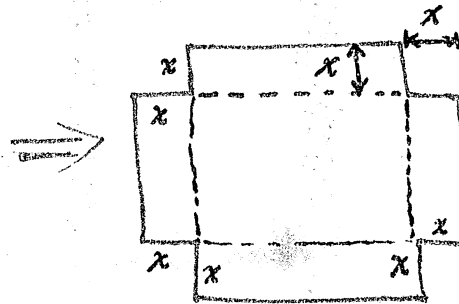
مثال : أوجد نطاق ومدى الدوال التالية :

① $F(x) = x^2$, ② $F(x) = \sqrt{x}$, ③ $F(x) = \sqrt{x-3}$

الحل :

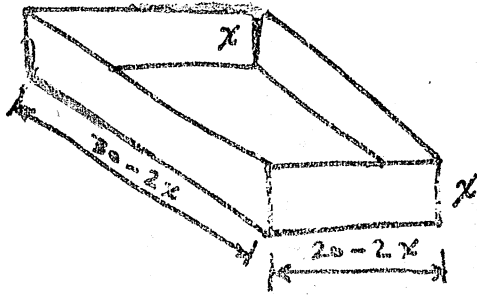
الدالة	$F(x) = x^2$	$F(x) = \sqrt{x}$	$F(x) = \sqrt{x-3}$
قيم x الممكنة Domain	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[3, +\infty)$
قيم y الممكنة Range	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$

مثال : ورقة أبعادها (30 سم * 20 سم) قمنا بقطع مربع أبعاده $(x * x)$ من الأضلاع الأربعة للورقة، ومن ثم نقوم بكني جوانب الورقة لنحصل على صندوق. المطلوب إيجاد دالة تعبر عن حجم الصندوق المكون .



الحل :

الدوال Functions



الطول $\Leftarrow (30 - 2x)$

العرض $\Leftarrow (20 - 2x)$

الارتفاع $\Leftarrow x$

$$\Rightarrow V(x) = (30 - 2x)(20 - 2x)(x)$$

$$\Rightarrow V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$$

ومن خلال هذه الدالة يمكن إيجاد حجم الصندوق بعد إدخال أبعاد المربع المقطع (x) .

أنواع الدوال :

يمكن أن يتم تصنيف الدوال إلى عدة أنواع منها :

- ① - الدوال الجبرية و الدوال الغير جبرية :
- ② - الدوال الجبرية : توجد ثلاث أنواع من الدوال الجبرية وهي :
 - 1- دالة متعددة الحدود : وتأخذ الصورة العامة :

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

حيث : $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ثوابت ، (n) عدد صحيح غير سالب.

نطاق هذه الدالة $(D: \mathbb{R})$ وصور الدالة $(R: \mathbb{R})$ أو قد تكون مجموعة من النقاط

ولها عدة صور منها :

③ الدالة الثابتة : وتأخذ الصورة : $f(x) = a_0$

④ الدالة الخطية : وتأخذ الصورة : $f(x) = a_0 + a_1x$

⑤ الدالة المتحايية : وتأخذ الصورة : $f(x) = x$

⑥ الدالة التربيعية : وتأخذ الصورة : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

⑦ دالة القوى : وتأخذ الصورة : $f(x) = a_nx^n$

⑧ دالة القيمة المطلقة : وتأخذ الصورة :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

الدوال Functions

ونطاق الدالة المثلثة هو $(x \in \mathbb{R})$ ، أما المثلث فهو $(x \in \mathbb{R}, +\infty)$ ، $x \in \mathbb{R}$ بفن
النظر عن قيمه (x) فإن قيمة (y) ستكون موجبة دائماً .

2- الدالة القياسية : وتأخذ الصورة العامة $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ، حيث $p(x)$ ، $q(x)$

دوال مكسدة حدود ، مثل : $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ، ونطاق هذه الدالة هو جميع الأعداد
الحقيقية ما عدا القيم التي تجعل المقام صفراً .

3- الدالة غير القياسية : وتأخذ الصورة العامة $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ، حيث $p(x)$ ، $q(x)$

ليس بالضرورة أن تكون عديدة حدود مثل : $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$

④- الدوال غير الجبرية : وتوجد 4 أنواع من الدوال غير الجبرية وهي :

1- الدوال المثلثية . مثل : $y = \tan x$ ، $y = \cos x$ ، $y = \sin x$

2- الدوال اللوغاريتمية . مثل : $f(x) = \log_a x$

3- الدوال الأسية . مثل : $f(x) = a^x$

4- الدوال الزائدية . مثل : $\tanh x$ ، $\cosh x$ ، $\sinh x$

الدوال الفردية والدوال الزوجية odd function and even functions

Even Function

مثلا : $(4) \longrightarrow 16$

$(-4) \longrightarrow 16$

$$f(-x) = f(x)$$

$x \longrightarrow y$

$-x \longrightarrow y$

odd Function

مثلا : $(4) \longrightarrow 16$

$(-4) \longrightarrow -16$

$$f(-x) = -f(x)$$

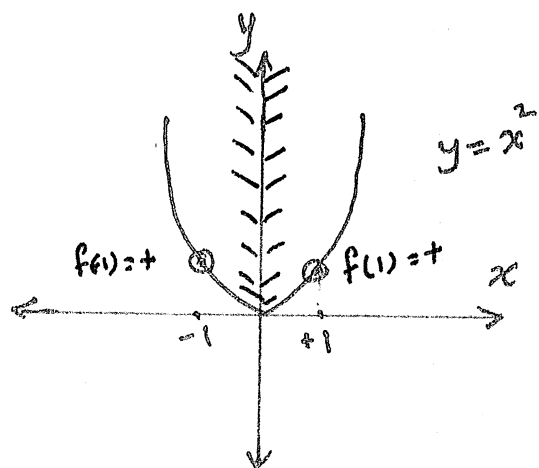
$x \longrightarrow y$

$-x \longrightarrow -y$

من خلال التعريف ب $(-x)$ مكان (x) نجد أن :

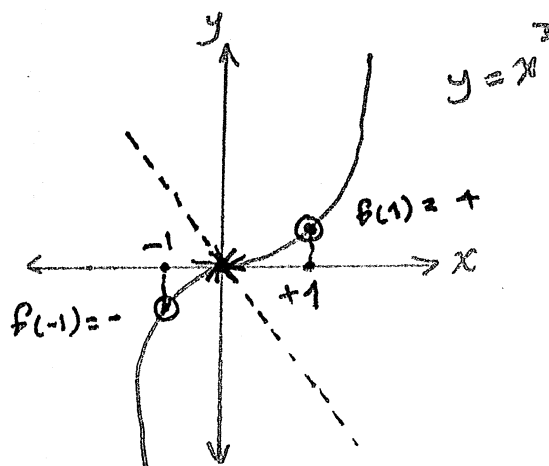
- ① - $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Even (دالة زوجية)
- ② - $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ odd (دالة فردية)
- ③ - $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow$ Not even Not odd (ليست فردية وليست زوجية)

أما من خلال الرسم فإن : الدالة الزوجية هي الدالة المتماثلة حول محور (y) .



الدالة متماثلة حول محور (y)

$$F(-x) = F(x)$$



الدالة متماثلة حول نقطة الأصل $(0,0)$

$$F(-x) = -F(x)$$

- جاد مفهوم الدوال الفردية والزوجية من خلال الأمثلة فوجدنا أن الدالة الزوجية كانت دالة فردية ولما كانت الدالة زوجية كانت الدالة زوجية :

$$(-3)^1 = -3$$

$$(-3)^2 = 9$$

$$(-3)^3 = -27$$

الدوال الفردية والدوال الزوجية
Odd Functions and even Functions

① $F(x) = x^{-5}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{x^5}$

$\Rightarrow F(-x) = \frac{1}{(-x)^5} = -\frac{1}{x^5} = \boxed{-f(x)}$

هذه الدالة فردية (odd Function)

② $F(x) = x^3 + x$

$\Rightarrow F(-x) = (-x)^3 + (-x)$

$= -x^3 - x \neq f(x)$

$= -(x^3 + x) = \boxed{-f(x)}$

هذه الدالة فردية (odd Function)

③ $F(x) = x^2 + 1$

$\Rightarrow F(-x) = (-x)^2 + 1$

$= x^2 + 1 = \boxed{f(x)}$

هذه الدالة زوجية (Even Function)

④ $F(x) = x^3 + 1$

$= (-x)^3 + 1$

$= -x^3 + 1 \neq f(x)$

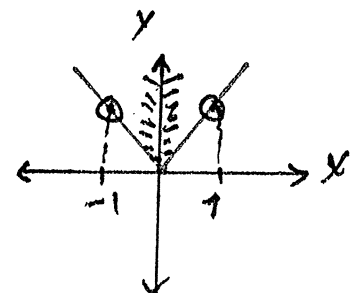
$= -(x^3 - 1) \neq -F(x)$

هذه الدالة ليست زوجية وليست فردية (حيادية)

⑤ $F(x) = |x|$

هذه الدالة زوجية (even function)

السبب الدالة بالتعريف بالسالب الناتج دائما موجبا

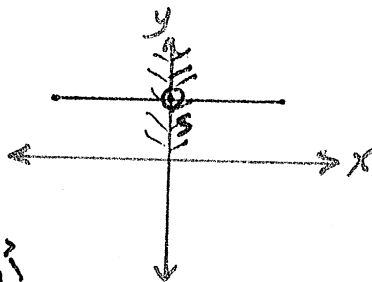


التماثل حول المحور (y)

الدوال الفردية والدوال الزوجية
odd Functions and even

⑥ $F(x) = 5$

من خلال الرسم الدالة زوجية
ليست يوجد تماثل حول محور
(y)



$F(x) = 5$
 $\Rightarrow$ دالة زوجية

ملاحظة:

من خلال الحل النظري

$F(x) = 5$

$\Rightarrow 5x = 5 \cdot (1)$
 $\downarrow$
 $\frac{x}{x} = x^{1-1} = x^0 = (1)$

هذه الدالة زوجية

⑦ $F(x) = \frac{x}{x^2-1}$

$F(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2-1} = \frac{-x}{x^2-1} = -f(x)$

هذه الدالة فردية (Odd Function)

⑧ $F(x) = \frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow F(-x) = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \neq f(x)$

$= -\left(\frac{-1}{1+x}\right) \neq -f(x)$

هذه الدالة ليست فردية وليست زوجية (خادبة)

⑨ $F(x) = 1 - x^4$

$\Rightarrow F(-x) = 1 - (-x)^4$
 $= 1 - x^4 = f(x)$

هذه الدالة زوجية (Even Functions)

الدوال الفردية والدوال الزوجية Odd Function and even Function

ياخنة 1
ع 101

$$(10) f(x) = x^5 + x$$

$$\Rightarrow F(-x) = (-x)^5 + (-x)$$

$$\Rightarrow F(-x) = -x^5 - x \neq f(x)$$

$$\Rightarrow -(x^5 + x) = -f(x)$$

الدالة فردية (Odd Function)

خواص الدوال الزوجية والفردية:

$$(1) \text{ Even} \times \text{Even} = \text{Even}$$

$$(2) \text{ odd} \times \text{odd} = \text{Even}$$

$$(3) \text{ Even} \times \text{odd} = \text{odd}$$

$$(4) \text{ odd} \times \text{even} = \text{odd}$$

$$(5) \frac{\text{odd}}{\text{even}} = \text{odd}$$

$$(6) \frac{\text{even}}{\text{odd}} = \text{odd}$$

$$(7) \frac{\text{even}}{\text{even}} = \text{even}$$

$$(8) \frac{\text{odd}}{\text{odd}} = \text{even}$$

$$(9) \text{ even} \pm \text{even} = \text{even}$$

$$(10) \text{ odd} \pm \text{odd} = \text{odd}$$

$$(11) \text{ Even} \mp \text{odd}$$

$$(12) \text{ odd} \mp \text{even}$$

neither (ليست زوجية وليست فردية)

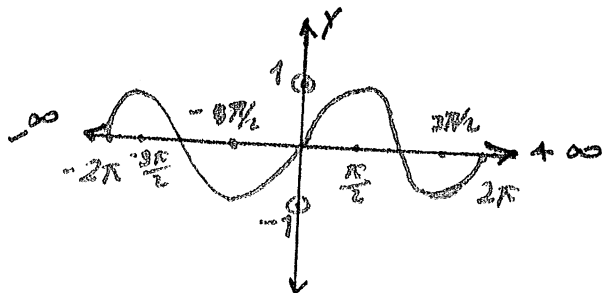
ملاحظة: جميع الأرقام (النواب) هي دوال زوجية:

$$\text{Ex: } f(x) = 1, f(x) = -5, f(x) = \frac{1}{2}$$

(Even Functions)

الدوال المثلثية
Trigonometric Functions

① $y = \sin(x)$



$$\sin = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

طول الدورة 2π

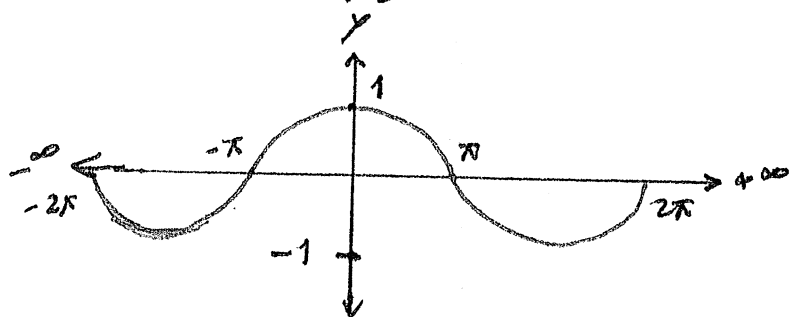
$$D: x \in (-\infty, +\infty) ; x \in \mathbb{R}$$

$$R: y \in [-1, 1]$$

دالة فردية (odd function)

متماثلة حول نقطة الأصل (0,0)

② $y = \cos(x)$



$$\cos(x) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

طول الدورة 2π

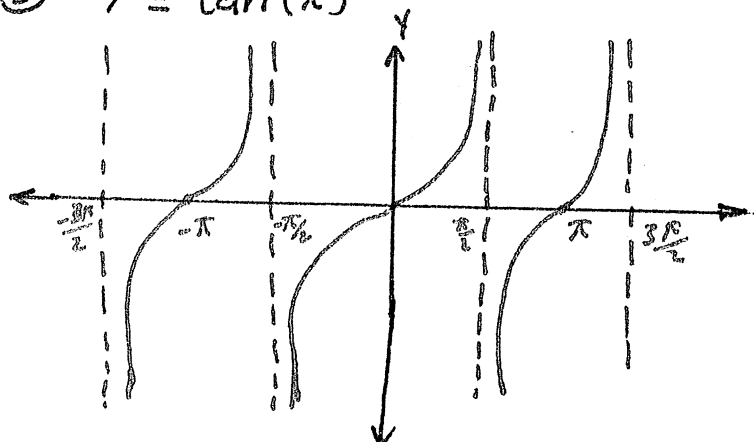
$$D: x \in (-\infty, +\infty) ; x \in \mathbb{R}$$

$$R: y \in [-1, 1]$$

دالة زوجية (even function)

متماثلة حول محور (y)

③ $y = \tan(x)$



$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$D: x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}$$

$$R: y \in \mathbb{R}$$

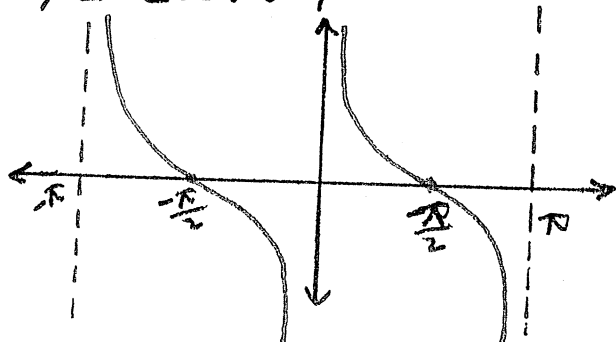
طول الدورة (π)

دالة فردية (odd function)

متماثلة حول نقطة الأصل (0,0)

الدوال المثلثية Trigonometric Function

④ $y = \cot(x)$



$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

طول الدورة π

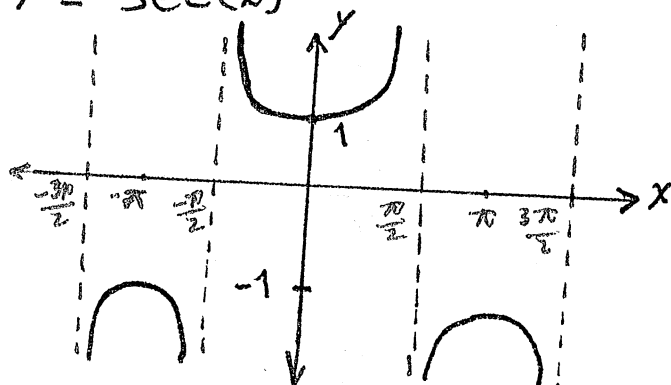
D: $x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi\}$

R: $y \in \mathbb{R}$

دالة فردية (odd function)

متماثلة حول نقطة الأصل (0,0)

⑤ $y = \sec(x)$



$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

طول الدورة 2π

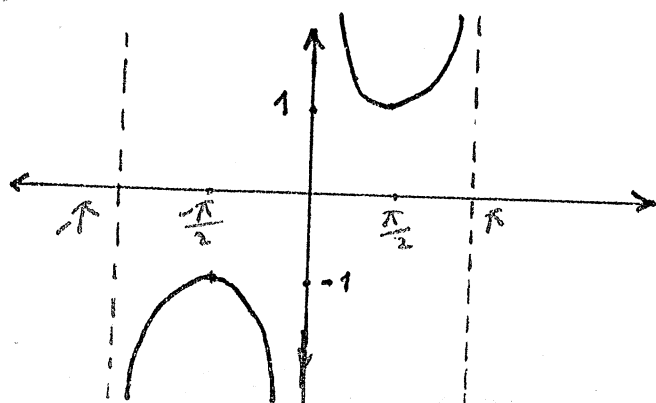
D: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}$

R: $y \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$

دالة زوجية (even function)

متماثلة حول محور (y)

⑥ $y = \csc(x)$



$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

طول الدورة 2π

D: $x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi\}$

R: $y \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$

دالة فردية (odd function)

متماثلة حول نقطة الأصل

التاريخ: 28.10.2024

م. م. ك

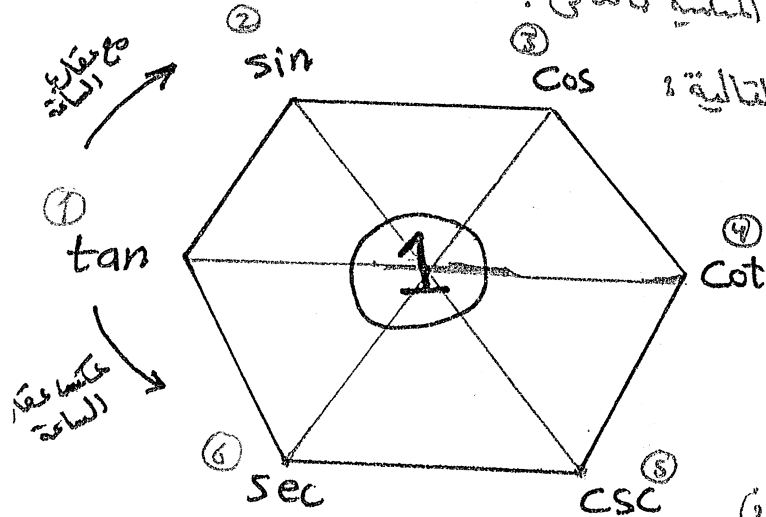
عبدالمنعم (20)

الدوال المثلثية (Trigonometric Function)

العلاقات بين النسب المثلثية الستة :

 $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$, $\sec$, $\csc$

توجد عدد كبير من العلاقات التي يمكن استنتاجها من النسب المثلثية ، ويمكن تبسيط عملية الاستنتاج من خلال سرد النسب المثلثية كالآتي :



يتم رسم الشكل السداسي انظر لقانون العلاقة التالية :

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

① يتم وضع $(\tan \theta)$ أولاً وتليها $(\sin \theta)$ و

$(\cos \theta)$ بالترتيب .

② يتم وضع مقابل $(\tan \theta)$ مقلوبها $(\cot \theta)$

③ تكمل السداسي بحيث تكون النسب التي تبدأ بـ

(ب) في نفس الطرف .

وبالتالي بعد اكمال الشكل السداسي يمكن استنتاج التالي :

① - كل نسبة من النسب تساوي قسمة النسبتين التاليتين ابتداءً من $(\tan)$

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} , \sin(\theta) = \frac{\cos \theta}{\cot(\theta)} , \cos(\theta) = \frac{\cot(\theta)}{\csc(\theta)}$$

$$\cot(\theta) = \frac{\csc(\theta)}{\sec(\theta)} , \csc(\theta) = \frac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)} , \sec(\theta) = \frac{\tan \theta}{\sin \theta}$$

② - كل نسبة مثلثية تساوي حاصل ضرب النسبة التي على يمينها والنسبة التي على يسارها

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \sin(\theta) \cdot \sec(\theta)$$

$$\Rightarrow \sin(\theta) = \cos(\theta) \cdot \tan(\theta)$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \sin(\theta) \cdot \cot(\theta)$$

$$\Rightarrow \cot(\theta) = \cos(\theta) \cdot \csc(\theta)$$

$$\Rightarrow \csc(\theta) = \cot(\theta) \cdot \sec(\theta)$$

$$\Rightarrow \sec(\theta) = \csc(\theta) \cdot \tan(\theta)$$

الدوال المثلثية Trigonometric Functions

③. حاصل ضرب كل نمطين على الشكل الأساسي يساوي واحد :

$$\Rightarrow \tan(\theta) \cdot \cot(\theta) = 1$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) \cdot \sec(\theta) = 1$$

$$\Rightarrow \sin(\theta) \cdot \csc(\theta) = 1$$

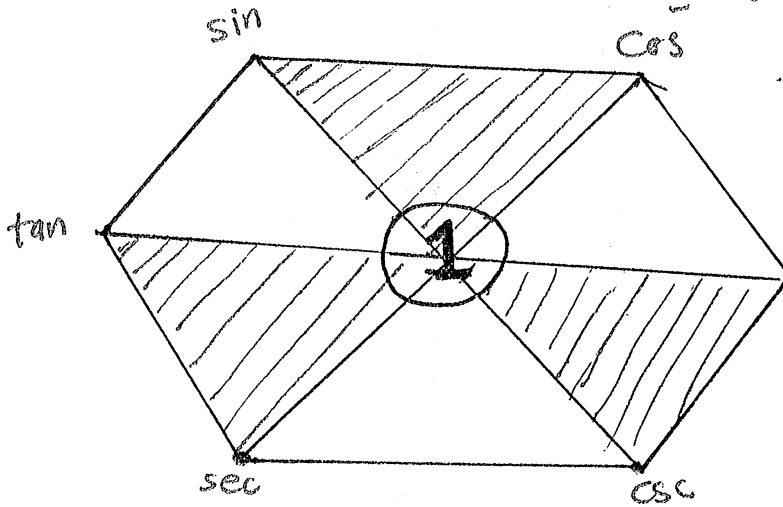
$$\tan(\theta) = \frac{1}{\cot(\theta)}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sec(\theta)}$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{\csc(\theta)}$$

أيضا
العكس صحيح

④. يمكن استنتاج علاقات مربع النسب المثلثية من خلال تحديد المثلثات الى قاعدة الزاوية
مربع رأس المثلث = مربع القاعدة

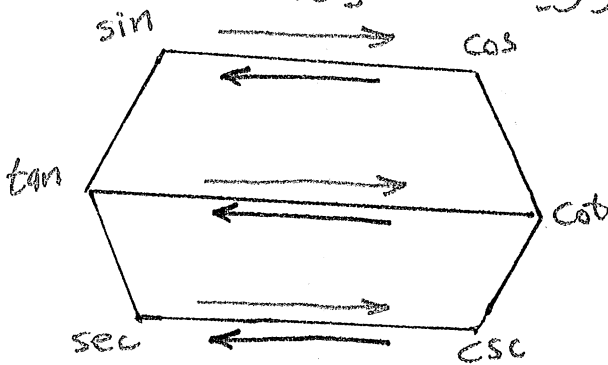


$$\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow \csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

$$\Rightarrow \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

⑤. كل نمطين بجانب بعض توجد علاقة زاوية متممة بينهما :



$$\Rightarrow \sin \theta = \cos(90 - \theta)$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \cot(90 - \theta)$$

$$\Rightarrow \sec \theta = \csc(90 - \theta)$$

$$\Rightarrow \csc \theta = \sec(90 - \theta)$$

$$\Rightarrow \cot \theta = \tan(90 - \theta)$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \sin(90 - \theta)$$

⑥. وتوجد بعض العلاقات الأخرى من النسب المثلثية منها :

$$\textcircled{1} \sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

الدوال المثلثية (Trigonometric Functions)

$$\textcircled{2} \quad \underbrace{\sin^2(x)}_{(-)} = \frac{1}{2} (1 - \underbrace{\cos(2x)})_{(-)} \quad , \quad \underbrace{\cos^2(x)}_{(+)} = \frac{1}{2} (1 + \underbrace{\cos(2x)})_{(+)}$$

$$\textcircled{3} \quad \sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{aligned} \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)] \\ \cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] \\ \sin(x) \cdot \sin(y) &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] \end{aligned}$$

ملاحظة: ليسهل حفظ العلاقات الأربعة السابقة يجب ربطها بالإشارات بفرض $\sin$ (موجة) وإشارة $\cos$ (موجة).

نطاق ومدى الدوال

(Domain and Range)

لايجاد نطاق ومدى الدوال يجب الانتباه للهندسات في نواتج الدوال وهي:

- ① المقام المصغر. ← وبالتالي نضرب المقام في الدوال الكسرية ونستقيمه من الناتج
- ② الجذر السالب. ← وبالتالي نجعل ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر.

خطوات إيجاد النطاق والمدى:

$$\textcircled{1} \quad \text{الدالة الخطية كثيرة الحدود} \quad D \in (-\infty, +\infty)$$

$$\textcircled{2} \quad \text{الدالة الكسرية} \quad D \in (-\infty, +\infty) / \left(\begin{array}{l} \text{المقام} \\ \text{الذي يجعله} \\ \text{صفر} \end{array} \right) \text{ صاعدا}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{الدالة الجذرية} \quad D \in (-\infty, +\infty) / \left(\begin{array}{l} \text{تحت الجذر} \\ \text{السالب} \end{array} \right) \text{ صاعدا}$$

$$\text{Ex } \textcircled{1} \quad f(x) = x^2 - 3$$

هذه الدالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية وبالتالي:

$$\Rightarrow D: x \in (-\infty, +\infty) \text{ or } x \in \mathbb{R}$$

النطاق والمداى

مثال: $f(x) = y$

$$\Rightarrow y = x^2 - 3$$

- لايجاد المداى نجعل المداى قيم x بدل y :

$$\Rightarrow y + 3 = x^2$$

للتخلص من التربع نأخذ الجذر للطرفين

$$\Rightarrow x = \sqrt{y+3}$$

: المداى جذرية (صاحبة الجذر الكبر أو مساو صفر)

$$\Rightarrow y + 3 \geq 0$$

$$\Rightarrow y \geq -3$$

$$\Rightarrow R: y \in [-3, +\infty) \text{ or } R: y \geq -3$$

Ex ②: $f(x) = \frac{1}{x}$

: دالة كسرية (المقام يساوى صفر)

$$x = 0 \Rightarrow D: x \in (-\infty, +\infty) / \{0\}$$

$$\text{Range} \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

: دالة كسرية (المقام يساوى صفر)

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow R: y \in (-\infty, +\infty) / \{0\}$$

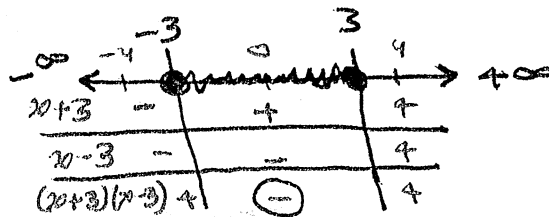
Ex ③: $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

: دالة جذرية

$$9 - x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 \leq 0$$

$$(x+3)(x-3) \leq 0$$



$$\Rightarrow D: x \in [-3, 3]$$

النطاق والمدى Domain and Range

$$\Rightarrow y = \sqrt{9-x^2}$$

بالتربيع :

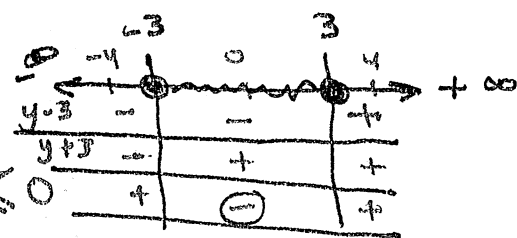
$$\Rightarrow y^2 = 9-x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 9-y^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{9-y^2}$$

$$\Rightarrow 9-y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2-9 \leq 0$$

$$(y-3)(y+3) \leq 0$$



$$\Rightarrow R: y \in [-3, 3]$$

Ex ④: $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

دالة جذرية وكسرية وبالتالي:

$$\Rightarrow x-1 > 0$$

$$\Rightarrow x > 1$$

$$\Rightarrow D: x \in (1, +\infty) \text{ or } x \in \mathbb{R}^+ / \{1\}$$

ملاحظة مهمة جدًا:

في حالة دالة جذرية وكسرية في نفس الوقت
نأخذ (> 0) بدون (=)

Range: $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

نتخلص من الجذر بالتربيع:

$$\Rightarrow y^2 = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x+1 = xy^2 - y^2$$

$$\Rightarrow x - xy^2 = -1 - y^2$$

$$(1-y^2) \div \Rightarrow x(1-y^2) = -1-y^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1-y^2}{1-y^2}$$

$$(دالة كسرية) \Rightarrow 1-y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Domain and Range النطاق والمحدى

$$\Rightarrow R: y \in (-\infty, +\infty) / \{-1, 1\}$$

$$\text{Ex ⑤: } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

ملاحظة:
في حالة المقام مجموع مربعين
في الدالة الكسرية يكون
النطاق ينتمي لـ $\mathbb{R}$

في هذه الدالة المقام عبارة عن مجموع مربعين لا يكون سالب أو صفري.

$$\Rightarrow D: x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\text{Range} \Rightarrow y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow yx^2 + y = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow y + 1 = x^2 - yx^2$$

$$\div (1-y) \Rightarrow y + 1 = x^2(1-y)$$

$$\text{أخذ الجذر التربيع من الطرفين} \Rightarrow x^2 = \frac{y+1}{1-y}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$$

$$\Rightarrow 1-y > 0$$

$$\Rightarrow y < 1$$



$$\Rightarrow R: y \in (-\infty, 1)$$

$$\text{Ex ⑥: } f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

ب. تحت الجذر مجموع مربعين لا يمكن أن يكون سالباً

$$\Rightarrow D: x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\text{Range} \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 4}$$

نقتلص من الجذر بالتربيع

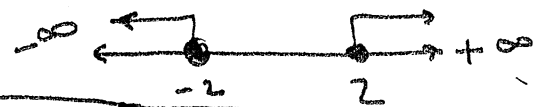
النطاق والمدى

$$\Rightarrow y^2 = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = y^2 - 4$$

$$\text{نأخذ الجذر} \Rightarrow x = \sqrt{y^2 - 4}$$

$$y^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (y-2)(y+2) \geq 0$$

	$-\infty$	-3	-2	0	2	3	$+\infty$
$y-2$		-	•	-	•	+	
$y+2$		-	-	•	+	+	
$(y-2)(y+2)$		+	-	-	+	+	



$$\Rightarrow R: y \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$\text{Ex ②: } f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

$$x \geq 0$$

$$1+\sqrt{x} = 0 \Rightarrow (\text{غير ممكن})$$

$$\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D: x \in [0, +\infty) \text{ or } D: x \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Range} \Rightarrow y = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow y + y\sqrt{x} = 1$$

$$y(1+\sqrt{x}) = 1$$

$$y = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow 1+\sqrt{x} = 0 (\text{غير ممكن})$$

$$x \geq 0$$

$$\Rightarrow R: y \in [0, +\infty) \text{ or } y \in \mathbb{R}^+$$

الدالة التركيبية (Functions Composition)

يمكن تركيب دالة داخل دالة أخرى في متغير ما بإحدى الصيغ التالية:

- بفرض لدينا دالتين: $[f(x), g(x)]$ ونرغب بتركيب الدالتين بعدة طرق:

$$① \quad g \circ f \Rightarrow g(f(x))_{(x)}$$

$$② \quad f \circ g \Rightarrow f(g(x))_{(x)}$$

$$③ \quad g \circ g \Rightarrow g(g(x))_{(x)}$$

$$④ \quad f \circ f \Rightarrow f(f(x))_{(x)}$$

مثال: إذا كانت الدوال التالية: $g(x) = 2x - 3$ و $f(x) = 3x + 5$ أوجد:

$[f \circ g, g \circ f, g \circ g, (f \circ g)_{(5)}]$

$$① \quad (f \circ g)_x = f(g(x))_{(x)} = f(2x - 3)_x$$

الحل:

$$= 3(2x - 3) + 5$$

$$(f \circ g)_x = 6x - 9 + 5 = \boxed{6x - 4}$$

$$② \quad (g \circ f)_x = g(f(x))_x = g(3x + 5)_x$$

$$= 2(3x + 5) - 3$$

$$(g \circ f)_x = 6x + 10 - 3 = \boxed{6x + 7}$$

$$③ \quad (g \circ g)_x = g(g(x))_x = g(2x - 3)$$

$$= 2(2x - 3) - 3$$

$$(g \circ g)_x = 4x - 6 - 3 = \boxed{4x - 9}$$

$$④ \quad (f \circ g)_{(5)} = f \circ g_{(5)} = 6(5) - 4 = \boxed{26}$$

الدالة التركيبية (Function Composition)

مثال: إذا كانت: $f(x) = 3x^2 - x + 10$ ، $g(x) = 1 - 20x$ فأوجد: $(f \circ g)_x$ ، $(g \circ f)_x$ ، $(g \circ g)_x$ ، $(f \circ g)_5$

الحل:

$$\begin{aligned} ①. (f \circ g)_x &= f(g(x))_x = f(1 - 20x)_x \\ &\Rightarrow = 3(1 - 20x)^2 - (1 - 20x) + 10 \\ &= 3(1 - 40x + 400x^2) - (1 - 20x) + 10 \\ &= 3 - 120x + 1200x^2 - 1 + 20x + 10 \end{aligned}$$

$$(f \circ g)_x = 1200x^2 - 100x + 12$$

$$\begin{aligned} ②. (g \circ f)_x &= g(f(x))_x = g(3x^2 - x + 10)_x \\ &\Rightarrow = 1 - 20(3x^2 - x + 10) \\ &= 1 - 60x^2 + 20x - 200 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)_x = -60x^2 + 20x - 199$$

$$\begin{aligned} ③. (g \circ g)_x &= g(g(x))_x = g(1 - 20x)_x \\ &\Rightarrow = 1 - 20(1 - 20x) \\ &= 1 - 20 + 400x \end{aligned}$$

$$(g \circ g)_x = 400x - 19$$

$$\begin{aligned} ④. (f \circ g)_5 &= f(g(5))_x \\ &= 1200(5)^2 - 100(5) + 12 \\ &= (1200)(25) - 500 + 12 \end{aligned}$$

$$(f \circ g)_5 = 39000 - 500 + 12 = 29,512$$

الدالة التركيبية (Function Composition)

مثال: إذا كانت : $f(x) = x^2 - 3x$; $g(x) = \sqrt{x+2}$
فأوجد : $(g \circ f)_x$, $(f \circ g)_x$ ؟

① $(f \circ g)_x = f(g(x))_x = f(\sqrt{x+2})_x$ الحل :

$$\Rightarrow = (\sqrt{x+2})^2 - 3(\sqrt{x+2})$$

$$(f \circ g)_x = x + 2 - 3\sqrt{x+2}$$

② $(g \circ f)_x = g(f(x))_x = g(x^2 - 3x)_x$

$$\Rightarrow = \sqrt{(x^2 - 3x) + 2}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)_x = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

مثال: إذا كانت : $f(x) = \frac{x}{3x+2}$, $g(x) = \frac{2}{x}$ فأوجد :
 $(g \circ f)_x$, $(f \circ g)_x$ ؟

$(f \circ g)_x = f(g(x))_x = f(\frac{2}{x})_x$ الحل :

$$\Rightarrow = \frac{2/x}{3(2/x)+2} = \frac{2/x}{(6/x)+2}$$

$$\Rightarrow = \frac{2/x}{\frac{6+2x}{x}} = \frac{2x}{x(6+2x)} = \frac{2}{6+2x} = \boxed{\frac{1}{3+x}}$$

$(g \circ f)_x = g(f(x))_x = g(\frac{x}{3x+2})_x$

$$\Rightarrow = \frac{2}{(\frac{x}{3x+2})} = \frac{2(3x+2)}{x} = \boxed{\frac{6x+4}{x}}$$

الدوال العكسية inverse Function

تكون الدالة $(f \circ g)$ دالة عكسية لـ $(g \circ f)$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$f \circ g = g \circ f = x$$

- وهذا يعني أن تأثير الدالة (f) أدى إلى الغاء تأثير الدالة (g) وبقي الناتج (x) .
- أو أن تأثير الدالة (g) أدى إلى الغاء تأثير الدالة (f) وبقي الناتج (x) .

مثال توضيحي: نفرض لدينا الدوال التالية: $f(x) = 3x - 2$ و $g(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$ ؟

$$(f \circ g)_x = f(g(x))_x = f\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right)_x$$

$$\Rightarrow = 3\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right) - 2$$

$$(f \circ g)_x = \frac{3x}{3} + \frac{6}{3} - 2 = x + 2 - 2 = \boxed{x}$$

$$(g \circ f)_x = g(f(x))_x = g(3x - 2)$$

$$\Rightarrow \frac{(3x - 2)}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3x - 2 + 2}{3} = \boxed{x}$$

$$\therefore \boxed{(f \circ g)_x = (g \circ f)_x = x}$$

نلاحظ أن الدالة $(f \circ g)_x$ دالة عكسية للدالة $(g \circ f)_x$ والعكس صحيح.

ملاحظة مهمة:

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

Ex ①: $f(x) = 3x - 2$

فأوجد $f^{-1}(x)$ ؟

Sol:

$$f^{-1}(x) \Rightarrow y = 3x - 2$$

$$x = 3y - 2$$

$$\Rightarrow 3y = x + 2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{x + 2}{3} = f^{-1}(x)}$$

Inverse Function الدالة العكسية

خطوات إيجاد الدالة العكسية :

- 1- نضع (y) بدلا من f(x)
- 2- نوجد (x) بدلا من (y)
- 3- نضع f⁻¹(y) بدلا من (x)
- 4- نضع (x) بدلا من (y)

Ex ②: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

$y = \frac{2}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow 2 = x\sqrt{y-1}$ بالتربيع

$4 = x^2(y-1)$

$\Rightarrow y-1 = \frac{4}{x^2} \Rightarrow y = \frac{4}{x^2} + 1$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4}{x^2} + 1$

Ex ③: $h(x) = \sqrt{x-3}$

$y = \sqrt{x-3}$

$\Rightarrow x = \sqrt{y-3}$ بالتربيع

$\Rightarrow x^2 = y-3$

$\Rightarrow y = x^2 + 3 \Rightarrow h^{-1}(x) = x^2 + 3$

Check :-

$(h^{-1} \circ h)_x = (\sqrt{x-3})^2 + 3 = x-3+3 = x$

$(h \circ h^{-1})_x = \sqrt{(x^2+3)-3} = \sqrt{x^2} = x$
 $\therefore (h^{-1} \circ h)_x = (h \circ h^{-1})_x = x$

الدالة العكسية Inverse Function

Ex ④: $f(x) = \frac{x+4}{2x-5}$

$$y = \frac{x+4}{2x-5} \Rightarrow x = \frac{y+4}{2y-5}$$

$$\Rightarrow x(2y-5) = y+4$$

$$\Rightarrow 2xy - 5x = y+4$$

$$\Rightarrow -5x - 4 = y - 2xy$$

$$-5x - 4 = y(1 - 2x)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-5x - 4}{1 - 2x}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-5x - 4}{1 - 2x}$$

Ex ⑤: $f(x) = (x^3 + 8)^{1/5} - 1$

$$\Rightarrow y = (x^3 + 8)^{1/5} - 1$$

$$\Rightarrow x = (y^3 + 8)^{1/5} - 1$$

$$\Rightarrow (x+1)^5 = ((y^3 + 8)^{1/5})^5$$

$$\Rightarrow (x+1)^5 = (y^3 + 8) \Rightarrow y^3 = (x+1)^5 - 8$$

$$\Rightarrow y = \left[(x+1)^5 - 8 \right]^{1/3} = f^{-1}(x)$$

الدالة العكسية
Inverse Functions

ملاحظة مهمة جدًا:

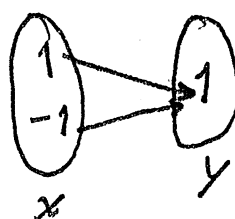
$$f(x) = x^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = ??$$

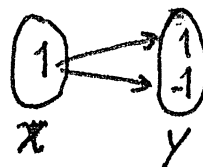
هذه الدالة ليس لها
معكوس في نطاق
الأعداد الحقيقية ($\mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \text{السبب} \quad x^2 \begin{cases} \rightarrow (1)^2 = 1 \\ \rightarrow (-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2$$

OK

$$\Rightarrow f^{-1}(x)$$

Not OKلا تمثل دالةوبالتالي هذه الدالة ليس لها معكوس في نطاق الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ولكن لها معكوس

$$\Rightarrow f^{-1}(x) \text{ ; } x \in [0, +\infty) \text{ ; } x \geq 0$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) \text{ ; } x \in (-\infty, 0] \text{ ; } x \leq 0$$

$$f(x) = x^2 \begin{cases} \rightarrow +\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \\ \rightarrow -\sqrt{x} \Rightarrow x \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = \sqrt{x} \\ f^{-1}(x) = -\sqrt{x} \end{cases}$$

↑↑
دالة عكسية
جزئية



النهايات والاتصال Limits and Continuity

تعريف النهاية:

يمكن القول أن العدد الحقيقي (L) هو نهاية للدالة $f(x)$ إذا كانت $f(x)$ تقترب من (L) كلما اقتربت (x) من (a) وتكتب بالصورة الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

العمليات على النهايات:

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ؛ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ حيث A, B, a ثوابت فإن:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a} K = K \quad [\text{حيث } (K) \text{ ثابت}]$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B} \quad ; \quad B \neq 0$$

لحرق ايجاد النهايات جبريا:

1 ايجاد النهايات عندما تكون الدوال لا توجد صفرعات في نواتجها (المقام المصغر و الجذر سالب) ويتم الحل بطريقة التعريف المباشر.

$$\text{Ex} \textcircled{1}: \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2x + 3$$

Sol:- ب دالة كثيرة حدود لا يوجد جذر ولا مقام
يتم الحل بالتعريف المباشر:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 2x + \lim_{x \rightarrow 2} 3$$

$$\Rightarrow (2)^2 - (2)(2) + 3 = 4 - 4 + 3 = \boxed{3}$$

النهايات والاتصال (Limits and Continuity)

②: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x}{x + 3}$

sol: هذه الدالة كسرية يحتمل ان يكون مقام صفر
نختبر المقام أولاً:

$$x + 3 = 3 + 3 = 6 \neq 0 \quad \text{OK}$$

ن يمكن التعويض المباشر:

$$\Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 4x}{\lim_{x \rightarrow 3} x + 3} = \frac{(3)^2 + 4(3)}{(3) + 3} = \frac{9 + 12}{3 + 3} = \frac{21}{6}$$

③: $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{4x + 1}$

sol: هذه الدالة جذرية يحتمل يكون جذر سالبا
وبالتالي نختبر أولاً:

$$\sqrt{4(2) + 1} = \sqrt{8 + 1} = \sqrt{9} \neq 0 \quad \text{OK}$$

ن يمكن الحل بالتعويض المباشر:

$$\Rightarrow \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} 4x + \lim_{x \rightarrow 2} 1} = \sqrt{4(2) + 1} = \sqrt{8 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

② إيجاد النهايات للدوال عندما تكون الدوال تنتج جذر سالبا أو مقام صفر، ويتم
باستخدام التحليل للمقادير الجبرية وقد يكون التحليل للبسط أو المقام أو كلاهما.

④ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

sol: هذه الدالة كسرية قد يكون المقام صفر
وبالتالي نختبر المقام أولاً:

check $x - 2 = 2 - 2 = 0 \quad \text{not OK}$

ن يجب استخدام التحليل:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

النهايات والاتصال Limits and continuity

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x + 2$$

بـ الدالة أصبحت دالة كثيرة حدود
لا يوجد جذر ولا مقام

$$\Rightarrow (2) + 2 = \boxed{4}$$

$$2). \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$$

sol:

$$\text{test: } -1 + 1 = 0 \text{ not ok}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3)(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} (x+3) = -1 + 3 = \boxed{2}$$

$$3). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

$$\text{ol: } \text{test: } 1 - 1 = 0 \text{ not ok} \quad \text{لا يمكن الحل بالمعوية
يتم التحليل}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x - 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(\cancel{x-1})(x^2 + 1)}{(\cancel{x-1})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow (1+1) \cdot ((1)^2 + 1) = (2)(2) = \boxed{4}$$

$$7). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\cancel{x-2})(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{x-2}}$$

النهايات والاتصال (Limits and continuity)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = (2)^2 + 2(2) + 4 = 4 + 4 + 4 = \boxed{12}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 27x}{x - 3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^3 - 27)}{x - 3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} x \cdot (x^2 + 3x + 9) = (3) \cdot ((3)^2 + 3(3) + 9) = 3(9 + 9 + 9) = \boxed{81}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-5x+6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-3)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-3}$$

check: $x-3 = 2-3 = -1 \neq 0$ OK

$$\Rightarrow = \frac{1}{2-3} = \frac{1}{-1} = \boxed{-1}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5x}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-5)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x - 5 = 0 - 5 = \boxed{-5}$$

النهايات والاتصال (Limits and continuity)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 + 2x - 15}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+5)(x-3)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+3x+9}{x+5} = \frac{(3)^2+3(3)+9}{(3)+5} = \boxed{\frac{27}{8}}$$

3. أيجار النهايات للدوال الكسرية التي تحتوي على جذر في البسط أو المقام :

ملحوظات مهمة :

① - في مسائل النهايات إذا كان يوجد جذر في البسط نضرب في مرافق البسط ، وإذا كان الجذر موجود بالمقام نضرب في مرافق المقام كالآتي :

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$$

② - من خصائص ضرب العدد في مرافقه نضرب الأول في الأول والثاني في الثاني كالآتي :

$$\text{مثلا : } (2-3) \cdot (2+3) = 4 - 9 = \boxed{-5}$$

(2*2) (-3)(3)

③ - في حالة ضرب جذر في جذر يكون الناتج صامتحت الجذر كالآتي :

$$\text{مثلا : } \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

$$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1} = x+1$$

$$\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1} = x^2+1$$

⑫. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

sol :

$$\begin{array}{l} \sqrt{10^2+3}-2 : \text{نختار المقام} \\ \sqrt{4}-2 \\ 2-2=0 \end{array} \quad \text{not ok}$$

لأنه لا يمكن التقويس المباشر

النهايات والاتصال (Limits and continuity)

وبالتالي نضرب في مرافق المقام كالتالي:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2+3)-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1}$$

check: $(1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

لا يمكن القويضا
المباشر
يجب التحليل

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(1)^2+3}+2}{(1+1)} = \frac{\sqrt{4}+2}{2} = \frac{2+2}{2} = \boxed{2}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

Sol: $\text{check: } (3)-3=0$ لا يمكن القويضا المباشر
* مرافق البسط

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

النهايات والاتصال (Limits and Continuity)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x+1} + 2)}$$

check: $\sqrt{(3)+1} + 2 = \sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4 \neq 0$ OK

يمكن التعويض المباشر

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} = \frac{1}{(\sqrt{3+1} + 2)} = \frac{1}{2+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

14. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8} - 3}{x+1}$

sol: check: $x+1 = -1+1 = 0$ لا يمكن التعويض المباشر

يمكن الحل بضربنا مرافق البسط كالتالي:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8} - 3}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+8} + 3}{\sqrt{x^2+8} + 3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+8-9}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}+3} = \frac{(-1)-1}{\sqrt{(-1)^2+8}+3} = \frac{-2}{\sqrt{9}+3} = \frac{-2}{6} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

النهايات والاتصال Limits and continuity

[4]. ايجار نهاية الدوال المثلثية (Limit of Trigonometric)

عندما يتم التعامل مع الدوال المثلثية يمكن الاستفادة من الخصائص التالية:

$$\textcircled{1}. \text{ نهاية النسب المثلثية تحت النهايات: } \frac{\sin x}{x} = 1 ; \frac{\tan x}{x} = 1 ; \frac{1 - \cos x}{x} = 1$$

ومن العلاقات السابقة نستنتج أن:

$$\frac{\sin 3x}{3x} = 1 ; \frac{\sin 4x}{4x} = 1 ; \dots ; \text{etc}$$

$$\textcircled{2}. \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x ; \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$$

[3]. يمكن استنتاج قيم النسب المثلثية من الشكل التالي:

	0	30	45	60	90
sin	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

2

$$\sin(0) = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0 \quad \text{توضيح:}$$

$$\cos(0) = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{\tan(0)}{0} = \frac{0}{0} = \boxed{1} \quad \#$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{x}{1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = \boxed{1} \quad \#$$

$$\textcircled{5}. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x}$$

$$\therefore \text{Check: } \sin(5)(0) = \sin(0) = 0 \quad \text{not ok}$$

لا يمكن التعويض المباشر

النهايات والاتصال (Limits and continuity)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x) \sin \frac{4x}{4x}}{(5x) \sin \frac{5x}{5x}}$$

نقسم ونضرب البسط في (4x)
نقسم ونضرب المقام في (5x)

$$\Rightarrow \frac{(4x)(1)}{(5x)(1)} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$$6). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(2x)}$$

sol: القويض المباشر يجعل المقام صفر
وبالتالي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{(2x) \sin \frac{2x}{2x}} = \frac{3x}{(2x)(1)} = \frac{3x}{2x} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$7). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \tan x}{2x + \sin x}$$

sol: لا يمكن القويض المباشر يجعل المقام صفر

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x} + \frac{\tan x}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{\sin x}{x}}$$

نقسم البسط والمقام
على (x)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 1}{2 + 1} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$8). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \tan 3x}{\sin 2x}$$

sol: لا يمكن الحل بالقويض المباشر

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{3 \tan 3x}{3x}}{(2x) \sin \frac{2x}{2x}} = \frac{2 + 3(1)}{2(0) \cdot (1)} = \frac{5}{0} = \boxed{\infty}$$

النهايات والاتصال Limits and continuity

ثانياً النهايات عند المالانهاية: (Limit at Infinity)

يتم إيجاد النهايات عند المالانهاية وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على أكبر حد.

ملاحظات:

①- إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام فإن النهايات تساوي (∞) .

②- إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام فإن النهايات تساوي (0) .

③- إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام فإن النهايات = $\frac{\text{معامل أكبر حد في البسط}}{\text{معامل أكبر حد في المقام}}$

$$\frac{\infty}{\infty} = 0, \frac{\text{عدد}}{0} = \infty, \frac{0}{\text{عدد}} = 0, \infty \pm \text{عدد} = \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \infty \quad \text{④}$$

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{9x+7}$

الحل: لا يمكن القويض المباشر $9(\infty) + 7 = 0$ Check

⇒ (بتقسيم البسط على أكبر حد المقام)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{9x}{x} + \frac{7}{x}} = \frac{3 - \frac{2}{\infty}}{9 + \frac{7}{\infty}} = \frac{3 - 0}{9 + 0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

حل آخر

Check: $\frac{\text{معامل أكبر حد في البسط}}{\text{معامل أكبر حد في المقام}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \#$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2+2x+1}{6x^2-3x+4}$

الحل: نقسم البسط والمقام على أكبر حد

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{6 + \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}}{6 - \frac{3}{\infty} + \frac{4}{\infty^2}}$$

النهايات والاتصال (Limits and Continuity)

$$= \frac{6+0+0}{6-0+0} = \frac{6}{6} = \boxed{1}$$

حل آخر : $\therefore$ درجة البسط تساوي درجة المقام $x^2 = x^2$
وبالتالي : نهاية الدالة = $\frac{\text{معامل أكبر حد في البسط}}{\text{معامل أكبر حد في المقام}} = \frac{6}{6} = \boxed{1}$

③. $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^4}{y^4 - 7y^3 + 3y^2 + 9}$

Sol: نقوم بقسمة البسط والمقام على أكبر حد

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{y^4}{y^4}}{\frac{y^4}{y^4} - \frac{7y^3}{y^4} + \frac{3y^2}{y^4} + \frac{9}{y^4}}$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{7}{y} + \frac{3}{y^2} + \frac{9}{y^4}} = \frac{1}{1 - \frac{7}{\infty} + \frac{3}{\infty^2} + \frac{9}{\infty^4}}$$

$$= \frac{1}{1 - 0 + 0 + 0} = \boxed{1}$$

حل آخر : $\therefore$ درجة البسط (y^4) تساوي درجة المقام (y^4)

وبالتالي : النهاية = $\frac{\text{معامل أكبر حد في البسط}}{\text{معامل أكبر حد في المقام}} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1}$

بقسمة البسط والمقام على أكبر حد

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^3}} = \frac{2}{0+0} = \frac{2}{0} = \boxed{\infty}$$

النهايات والاتصال (Limits and Continuity)

حلا آخر

بـ درجة البسط أكبر من درجة المقام

$$x^3 > x^2$$

النهاية تساوي ∞

no limit exists

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 2}}{2x + 4}$$

لـ:

في هذه المسألة أكبر حد هو (x)
والسبب (x²) داخل الجذر
وخارج الجذر هو (x)

بقسم البسط والمقام على (x)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}}{\frac{2x}{x} + \frac{4}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}}}{2 + \frac{4}{x}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{\infty} - \frac{2}{\infty^2}}}{2 + \frac{4}{\infty}} = \frac{\sqrt{1 - 0 - 0}}{2 + 0} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

حلا آخر

درجة البسط (x²)

درجة المقام (x)

بـ درجة البسط تساوي درجة المقام

النهاية = $\frac{\text{معامل أكبر حد بسط}}{\text{معامل أكبر حد مقام}} = \frac{(\sqrt{1})}{2}$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 6}$$

لـ: نقسم البسط والمقام على أكبر حد (x³)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^6}{x^6} - \frac{x}{x^6}}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{6}{x^3}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{x^5}}}{1 + \frac{6}{x^3}}$$

$$\frac{\sqrt{x^6}}{x^3} = \frac{x^{6/2}}{x^3} = \frac{x^3}{x^3}$$

النهايات والاتصال (Limits and continuity)

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{\infty^5}}}{1 + \frac{6}{\infty^3}} = \frac{\sqrt{9 - 0}}{1 + 0} = \frac{\sqrt{9}}{1} = \boxed{3}$$

حل آخر

درجة البسط $(\sqrt{x^6})$
درجة المقام (x^3)

بـ درجة البسط تساوي درجة المقام
معامل أكبر عدد في البسط
معامل أكبر عدد في المقام
هذه النهاية
$$\frac{(\sqrt{9})}{1} = \frac{\text{معامل أكبر عدد في البسط}}{\text{معامل أكبر عدد في المقام}} = \text{النهاية}$$

⑦. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+10}]$

sol: نضرب البسط والمقام في مرافق البسط

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+10}]}{1} \cdot \frac{[\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+10}]}{[\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+10}]}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n^2+n] - [n^2+10]}{[\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+10}]} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n - n^2 - 10}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+10}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-10}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+10}}$$

نقسم البسط والمقام على (n)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n} - \frac{10}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{10}{n^2}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{10}{\infty}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\infty}} + \sqrt{1 + \frac{10}{\infty^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - 0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

حل آخر: درجة البسط والمقام (n) أس واحد
معامل أكبر عدد في البسط
معامل أكبر عدد في المقام
وبالتالي:
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{(\sqrt{1}) + (\sqrt{1})} = \text{النهاية}$$

النهايات والاتصال (Limits and continuity)

الدوال المتصلة (المستمرة) "Continues Functions"

لدراسة اتصال الدوال أو عدم اتصالها لابد من دراسة صوخرج النهاية من جانب واحد
النهاية من جانب واحد (One sided Limit):
تكون نهاية الدالة موجودة إذا كانت النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار.
أي تتحقق العلاقة التالية:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Ex ①: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \geq 2 \\ 5x - 7 & ; x < 2 \end{cases}$

Sol:

النهاية من اليمين: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = (2)^2 - 1 = 3$

النهاية من اليسار: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (5x - 7) = 5(2) - 7 = 10 - 7 = 3$

ب. النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار، وإذا النهاية موجودة

Ex ②: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2}}$

Sol:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x-1|}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1$$

النهاية غير موجودة لأن النهاية من اليمين $\neq$ النهاية من اليسار

النهايات والاتصال (Limits and continuity)

Ex ③: $\lim_{z \rightarrow 10} \frac{1}{z-10}$

Sol:

$$\lim_{z \rightarrow 10^+} \frac{1}{z-10} = \frac{1}{10-10} = \frac{1}{0} = \boxed{\infty}$$

$$\lim_{z \rightarrow 10^-} \frac{1}{z-10} = \frac{1}{10-10} = \frac{1}{0} = \boxed{-\infty}$$

في النهاية غير موجودة لأن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

* لتحديد الدوال : يمكن القول بأن الدالة $f(x)$ دالة متصلة عند (a) إذا تحققت الشروط التالية :

① - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow$ موجودة

② - $f(a) \Rightarrow$ موجودة

③ - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Ex ①: $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ; x \geq 1 \\ 2x & ; x < 1 \end{cases}$

تحقق ما إذا كانت الدالة متصلة ؟

Sol:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+1) = (1)^2+1 = \boxed{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2(1) = \boxed{2}$$

في نهاية الدالة موجودة

$$f(a) = f(1) = x^2+1 = (1)^2+1 = \boxed{2} \text{ (موجوده)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(a)$$

في الدالة مستمرة عند $x=1$

النهايات والاتصال (Limits and continuity)

$$\text{Ex ②: } f(x) = \begin{cases} x^2 - x & ; x \leq 2 \\ 2x - 3 & ; x > 2 \end{cases}$$

sol:

تحقق ما إذا كانت متصلة؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 3) = 2(2) - 3 = \boxed{1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x) = (2)^2 - 2 = \boxed{2}$$

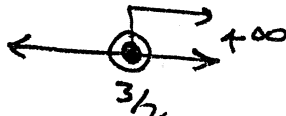
في نهاية الدالة غير موجودة
 $f(2) = x^2 - x = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = \boxed{2}$ موجودة

في الدالة غير مستمرة عندما $x = 2$

$$\text{Ex ③: } f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x-3}}$$

sol:

$$2x - 3 > 0 \Rightarrow 2x > 3 \Rightarrow \boxed{x > \frac{3}{2}}$$



$$\Rightarrow x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

في الدالة ستكون متصلة في الفترة $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$



التفاضل (المشتقات Derivatives)

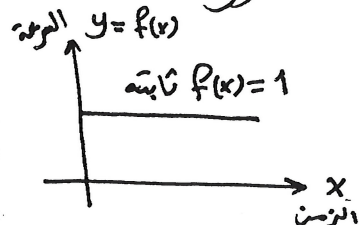
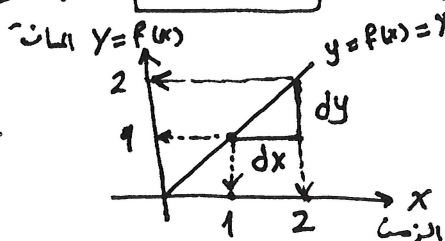
1- مفهوم الاشتقاق :

الاشتقاق : هو إيجاد مقدار التغير في الدالة وهل هذا التغير تزايد أو تناقص.
المشتقة : هي معدل التغير في دالة بالنسبة إلى متغير معين (محدد) أو عدة متغيرات وهو عكس التكامل الذي بواسطته نجد الدالة التي تمثل اعتماد متغير على متغير آخر.

مثال توضيحي :-

لحساب سرعة سيارة تسير من النقطة (A) إلى النقطة (B) وكان منحني المسافة على

الزمن التي قطعها السيارة معطى بالدالة : $f(x) = x$ وبتمثيلها على المحاور :



$$\text{السرعة} = \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow V = \frac{d}{t}$$

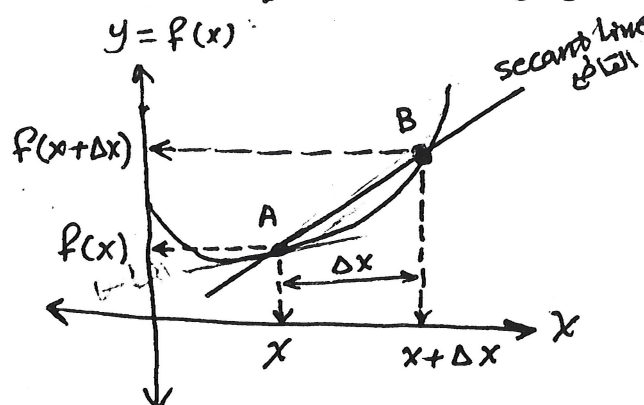
وفي هذا المثال تكون السرعة الثابتة وبالتالي عند أي نقطة ستكون السرعة = 1. $V = \frac{d(d)}{d(t)} = \frac{2-1}{2-1} = 1$

أما : إذا كانت السيارة تسير بسرعة متغيرة ، يمكن عن طريق التفاضل حساب سرعة السيارة في أي لحظة عن طريق حساب معدل التغير عن طريق الاشتقاق.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x+\Delta x - x}$$

$$m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{slope of secant line}$$



ولا إيجاد التغير عند النقطة (A) يجب إيجاد ميل المماس عند النقطة وصل المماس عند النقطة (A) لسيارة ميل القاطع عندما تكون (Δx) تقترب من الصفر وبالتالي :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow \text{بسرعة زني تكونا للنظام موجبة}$$

(1).

التفاضل (المشتقات : Derivatives)

2- إيجاد مشتقة التعريف للدالة :

من خلال المثال التوضيحي السابق يمكن إيجاد مشتقة التعريف عند أي نقطة من خلال

القانون :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ولايجاد مشتقة التعريف عند نقطة معينة ($x=a$) بالقانون :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ملاحظة : يرمز للمشتقة الأولى بإحدى الرموز التالية $(y', \frac{dy}{dx}, f'(x))$ بينما المشتقة الثانية يرمز لها بالرمز $(y'', \frac{d^2y}{dx^2}, f''(x))$ وبشكل عام يرمز للمشتقة من الرتبة (n) بالرموز التالية $(y^{(n)}, \frac{d^ny}{dx^n}, f^{(n)}(x))$.

مثال 1 : اوجد مشتقة التعريف للدالة : $f(x) = x^2$

الحل :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x - x^2}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x + 0 = \boxed{2x}$$

التفاضل (المشتقات Derivatives)

$$f(x) = x^2 + 2x$$

مثال 2 : أوجد مشتقة التعريف للدالة التالية :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - (x^2 + 2x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x - x^2 - 2x}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 2)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x + 2 = 2x + 0 + 2 = \boxed{2x + 2}$$

$$y = \sqrt{x}$$

مثال 3 : أوجد مشتقة التعريف للدالة :

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

نضرب في مرافق البسط :

$$\Rightarrow = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

التفاضل (الاشتقاق: Derivatives)

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

مثال 4: أوجد مشتقة التعريف للدالة: $f(x) = \sqrt{5x-8}$

$$\sim f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5(x+\Delta x)-8} - \sqrt{5x-8}}{\Delta x}$$

بالضرب في مرافق البسط:

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+5\Delta x-8} - \sqrt{5x-8}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{5x+5\Delta x-8} + \sqrt{5x-8}}{\sqrt{5x+5\Delta x-8} + \sqrt{5x-8}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(5x+5\Delta x-8) - 5x+8}{\Delta x (\sqrt{5x+5\Delta x-8} + \sqrt{5x-8})}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x (\sqrt{5x+5\Delta x-8} + \sqrt{5x-8})}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5x+5(0)-8} + \sqrt{5x-8}} = \boxed{\frac{5}{2\sqrt{5x-8}}}$$

التفاضل [الاشتقاق (Derivatives)]

قواعد الاشتقاق : $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$: ثابت (عدد) : ثابت

Ex: $f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$; $f(x) = -5 \Rightarrow f'(x) = 0$
 $f(x) = \frac{2}{5} \Rightarrow f'(x) = 0$

2- (عدد وحرف) : $f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a$

Ex: $f(x) = -5x \Rightarrow f'(x) = -5$
 $f(x) = \sqrt{2}x \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2}$

3- (حرف وأُس) : $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Ex: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
 $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$
 $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

4- (عدد وحرف وأُس) : $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = (a \cdot n)x^{n-1}$

Ex: $y = 2x^3 \Rightarrow \dot{y} = 6x^2$
 $f(x) = -3x^4 \Rightarrow f'(x) = -12x^3$

5- (مجموع دالتين) : $f(x) + g(x) \Rightarrow f'(x) + g'(x)$

Ex: $3x^2 + 2x \Rightarrow 6x + 2$

6- (طرح دالتين) : $f(x) - g(x) \Rightarrow f'(x) - g'(x)$

Ex: $5x^2 - 6x^2 \Rightarrow 10x - 12x$

التفاضل [الاشتقاق (Derivatives)]

$$f(x) = [g(x)]^n$$

(7) - (القوس) :

$$\Rightarrow f'(x) = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot (g'(x))$$

Ex: $f(x) = (3x^2)^3$

$$\Rightarrow f'(x) = 3(3x^2)^2 \cdot (6x)$$

(8) - (حاصل قسمة دالتين) :

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{h'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot h(x)}{[g(x)]^2}$$

Ex: $f(x) = \frac{2x^2}{3x^3}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(3x^3) \cdot (4x) - (2x^2) \cdot (9x^2)}{[3x^3]^2}$$

(9) - (حاصل ضرب دالتين) :

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

Ex: $f(x) = (2x^2 + 3)(3x^4 + 3x)$

$$f'(x) = (2x^2 + 3)(12x^3 + 3) + (3x^4 + 3x)(4x)$$

(10) - (الجذر) :

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

Ex: $f(x) = \sqrt{2x^5}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{10x^4}{2\sqrt{2x^5}}$$

التفاضل [Derivatives الاشتقاق]

$$f(x) = e^{g(x)}$$

(1) - (الدالة الأسية) :

$$\Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$\text{Ex: } f(x) = e^{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{x^2} \cdot (2x)$$

$$\ln f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}$$

(2) - (دالة اللوغاريتم) :

$$\text{Ex: } f(x) = \ln x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{Ex: } f(x) = \ln x^2 + 5x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x}$$

ملاحظة: (1) :

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x^2}}$$

$$f(x) = \sqrt[4]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$f(x) = \sqrt[5]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5\sqrt{x^4}}$$

ملاحظة: (2) : عندما تكون دالة أس دالة $\Leftarrow$ (دالة) يمكن أخذ (Ln) للطرفين.

$$\text{Ex: } y = x^x$$

$$\Rightarrow \ln y = x \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot (1)$$

التفاضل [Derivatives الاشتقاق]

$$\Rightarrow \dot{y} = [\ln x + 1] \cdot y$$

أمثلة :

Ex ①: $f(x) = 3x^3 - 2x + 3$

Sol:

$$\dot{f}(x) = 9x^2 - 2$$

$$''f(x) = 18x \quad ; \quad ''f(x) = 18 \quad ; \quad ''f(x) = 0$$

Ex ②: $y = x^3 + x^2 - x + 2$

Sol:

$$\dot{y} = 3x^2 + 2x - 1$$

$$''y = 6x + 2 \quad ; \quad ''y = 6 \quad ; \quad ''y = 0$$

Ex ③: $f(x) = x^{-2} + x^{-5} + x^2 + 2x - 1$

Sol:

$$\dot{f}(x) = -2x^{-3} - 5x^{-6} + 2x + 2$$

$$''f(x) = 6x^{-4} + 30x^{-7} + 2$$

$$'''f(x) = -24x^{-5} - 210x^{-8}$$

Ex ④: $f(x) = x^2 + x^{-3} + x^{1/2} + x^{3/2} + 2$

Sol:

$$\dot{f}(x) = 2x - 3x^{-4} + \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$''f(x) = 2 + 12x^{-5} - \frac{1}{4}x^{-3/2} + \frac{3}{4}x^{-1/2}$$

التفاضل [Derivatives الاشتقاق]

Ex ⑤: $f(x) = (2x+5)(x^2+2)$

Sol:

$f'(x) = \left[\begin{matrix} \text{تفاضل الأول} \times \text{الثاني} + \text{الثاني} \times \text{تفاضل الأول} \end{matrix} \right]$

$\Rightarrow f'(x) = (2x+5) \cdot (2x) + (x^2+2) \cdot (2)$
 $= 4x^2 + 10x + 2x^2 + 4$

$f'(x) = 6x^2 + 10x + 4$

حل آخر:

$f(x) = (2x+5) \cdot (x^2+2)$

بإستخدام خاصية فك الأقواس:

$\Rightarrow f(x) = 2x^3 + 4x + 5x^2 + 10$

$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 4 + 10x$

Ex ⑥:

Sol:

$f(x) = (x^2+2)^2$

$f'(x) = 2(x^2+2) \cdot (2x)$

$f'(x) = (2x^2+4)(2x) = 4x^3 + 8x$

حل آخر:

$f(x) = (x^2+2)^2$

مربع عدلية:

$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4$

$f'(x) = 4x^3 + 8x$

Ex ⑦: $y = (x^3-2x)^3$

Sol:

$y' = 3(x^3-2x)^2 \cdot (3x^2-2)$

$y' = (9x^2-6)(x^3-2x)^2$

التفاضل وتطبيقاته

ملاحظات: ① في التفاضلات المعقدة (المركبة) يمكن أخذ لوغاريتم الطرفين وتطبيق قوانين اللوغاريتمات قبل اجراء التفاضل:

$$\begin{cases} ① - \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \\ ② - \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \\ ③ - \ln a^b = b \ln a \end{cases}$$

② - يمكن ايجاد المشتقة الثانية لأي دالة بإجراء التفاضل على المشتقة الاولى و يرمز لها بالرمز y'' أو $\frac{d^2y}{dx^2}$ أو $f''(x)$

مشتقات الدوال المثلثية:-
قاعدة: تفاضل أي دالة مثلثية = تفاضل الدالة * تفاضل الزاوية

لتبسيط عملية اشتقاق الدوال المثلثية يمكن الاستعانة بالشكل التالي:

$$①. \frac{d}{dx} \sin(y) = \cos(y) \cdot y'$$

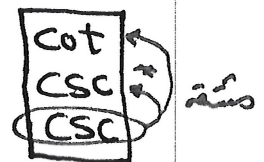
$$②. \frac{d}{dx} \cos(y) = -\sin(y) \cdot y'$$

$$③. \frac{d}{dx} \tan(y) = \sec^2(y) \cdot y'$$

$$④. \frac{d}{dx} \cot(y) = -\csc^2(y) \cdot y'$$

$$⑤. \frac{d}{dx} \sec(y) = \sec(y) \cdot \tan(y) \cdot y'$$

$$⑥. \frac{d}{dx} \csc(y) = -\csc(y) \cdot \cot(y) \cdot y'$$



- فعندما نحتاج لتفاضل (sin) نجد أن الدالة الموجودة معها في المربع الأول (cos) فهي تفاضليها، وعندما نحتاج لتفاضل الدالة (tan) نجد الدوال الموجودة معها والتبسيط (sec) وحاصل ضربها يساوي (sec^2) وهي تفاضل الدالة وهكذا باقي الدوال.

ملاحظة: كل دالة تبدأ بحرف (c) مثل (cos), (csc), (cot) فالتبسيط تكون سالبة.

التفاضل وتطبيقاته

السؤال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

①. $y = \cos \sqrt{2x^3 - 6x}$

$$\Rightarrow \dot{y} = -\sin \sqrt{2x^3 - 6x} \cdot \frac{6x^2 - 6}{2\sqrt{2x^3 - 6x}}$$

②. $y = \tan(3x^4 - \pi)^7$

$$\Rightarrow \dot{y} = \sec^2(3x^4 - \pi)^7 \cdot 7(3x^4 - \pi)^6 \cdot (-12x^3)$$

③. $y = \cot(\sin 5x)$

$$\Rightarrow \dot{y} = -\csc^2(\sin 5x) \cdot \cos(5x) \cdot (5)$$

الاشتقاق الضمني (Implicit Function)

عندما لا تكون الدالة صريحة أي أن (x) مختلف مع (y) بنفس الطرين ، يسمى التقاد في هذه الحالة بالاشتقاق الضمني (غير صريح) .

ولايجاد مشتقة أي دالة ضمنية نخرج مشتقة المتغير (y) في $(\frac{dy}{dx})$ ومن ثم نجعل $(\frac{dy}{dx})$ في طرف لوحده ويكون هو اشتقاق الدالة (مشتقة أولى) .

الفرق

الاشتقاق العادي (دالة صريحة)
 $y = f(x)$



Ex: $y = 8x^2$

الاشتقاق الضمني
دالة (ضمنية)



Ex: $x^2 + y^2 = 1$

Ex ①: $x^2 + y^2 = 1$, find $\frac{dy}{dx} = ??$

sol:

$$\Rightarrow 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \boxed{\frac{-x}{y}}$$

التفاضل وتطبيقاته

استاذ المقرر: حمزة النبوي

Ex ②: $x^3 + y^3 = 18xy$; Find $\frac{dy}{dx} = ??$

Sol: $3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = (18x) \cdot \frac{dy}{dx} + (y) \cdot (18)$

$$\Rightarrow 3y^2 \frac{dy}{dx} = 18x \frac{dy}{dx} = 18y - 3x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} (3y^2 - 18x) = 18y - 3x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{18y - 3x^2}{3y^2 - 18x}}$$

Ex ③: $x^4 + y^4 = 16$; Find $\frac{d^2y}{dx^2} = ??$

Sol: $4x^3 + 4y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow 4y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = -4x^3$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3}{4y^3} = \boxed{\frac{-x^3}{y^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y^3) \cdot (-3x^2) - (-x^3)(3y^2 \cdot \frac{dy}{dx})}{y^6}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3x^2 y^3 + 3x^3 y^2 \cdot (\frac{-x^3}{y^3}) \cdot y^3}{y^6}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3x^2 y^6 - 3x^6 y^2}{y^6} = \frac{-3x^2 y^2 (y^4 + x^4)}{y^6}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3x^2 y^2 (16)}{y^6} = \boxed{\frac{-48x^2}{y^4}}$$

نعويض
قيمة $\frac{dy}{dx}$

($x^3 y^3$)

التفاضل وتطبيقاته

مشتقة الدالة اللوغاريتمية :

if : $y = \log_a f(x)$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{f'(x)}{\ln a}$$

أي أن تفاضل الدالة اللوغاريتمية :

$$\frac{\text{تفاضل الموجود}}{\text{لوغاريتم الأساس}} \neq \frac{1}{\text{الموجود}}$$

التفاضل $\Rightarrow$

Ex①: $y = \log_2 (2x^3 + 6x)$

sol: $\bar{y} = \frac{1}{\text{الموجود}} \cdot \frac{\text{تفاضل الموجود}}{\text{لوغاريتم الأساس}}$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{2x^3 + 6x} \cdot \frac{6x^2 + 6}{\ln 2}$$

Ex②: $y = \sec \log_3 (x^2 + 1)$

sol: $\bar{y} = \sec \log_3 (x^2 + 1) \cdot \tan \log_3 (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot \frac{2x}{\ln 3}$

قاعدة السلسلة (chain Rule) :

- إذا كان لدينا دالتين مثل :

$u = g(x)$, $y = f(u)$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

أي (y) دالة بـ (u) أي (u) دالة بـ (x)

(الاشتقاق)

$\Downarrow$

$$\bar{u} = \frac{du}{dx}$$

$$\bar{y} = \frac{dy}{du}$$

وكان المطلوب إيجاد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \text{قاعدة السلسلة}$$

- أيضا إذا كان لدينا ثلاث دوال مثل :

$x = K(t)$, $u = g(x)$, $y = f(u)$

دالة بـ (t)

دالة بـ (x)

دالة بـ (u)

$$\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du}$$

التفاضل وتطبيقاته

وكان المطلوب إيجاد $\frac{dy}{dt}$

$$\sim \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

قاعدة السلسلة

Ex ①: $y = 3u^2$; $u = 8x+1$; find $\frac{dy}{dx} = ?$

sol:

$$\frac{dy}{du} = 6u , \frac{du}{dx} = 8$$

نعوضا بقيمتها

$$\sim \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (6u) \cdot (8) = 48u$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 48(8x+1) = 384x + 48$$

حيث (u) تكون دالة في (x)

Ex ②: $y = \sin(u)$, $u = 3x+1$; find $\frac{dy}{dx}$

sol: $\frac{dy}{du} = \cos(u)$, $\frac{du}{dx} = 3$

$$\sim \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos(u) \cdot 3$$

نعوضا بقيمتها

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3 \cos(3x+1)$$

حيث (u) تكون دالة في x

Ex ③: $y = 6u - 9$, $u = \frac{1}{2}x^4$; find $\frac{dy}{dx}$

sol: $\frac{dy}{du} = 6$, $\frac{du}{dx} = 2x^3$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (6) \cdot (2x^3) = 12x^3$$

التفاضل وتطبيقاته

Ex ④: if $y = 3u^2$, $u = 2x^3$; find $\frac{dy}{dx} = ?$

Sol: $\frac{dy}{du} = 6u$, $\frac{du}{dx} = 6x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (6u) \cdot (6x^2)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6(2x^3) \cdot (6x^2) = \boxed{12x^3 \cdot 6x^2}$

نعوضا بقيمة x لتكون بدالة x

تطبيقات التفاضل:

(L'Hôpital's rule)

① - قاعدة لوبيتال للنهايات
عندما تكون نهاية الدالة بالتعريف المباشر بقيمة (a) إحدى الصيغ التالية:

$\left\{ \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \infty, \text{ (عدد) } \right\}$

يمكننا استخدام قاعدة لوبيتال كالتالي:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

أي يمكن إجراء الاشتقاق للبسط والمقام لمرتين وتستمر عملية الاشتقاق إذا من مرة حتى نتخلصا من الصيغ السابقة في الناتج.

Ex ①: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Sol: $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0}$

أحد الصيغ وبالتالي يمكن استخدام لوبيتال

$\xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos(0)}{1} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

Ex ②: $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{5t^2 - 4t^2 - 1}{10 - t - 9t^3}$

Sol: $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} \frac{5(1)^2 - 4(1)^2 - 1}{10 - (1) - 9(1)^3} = \frac{5 - 4 - 1}{10 - 1 - 9} = \frac{0}{0}$

أحد الصيغ وبالتالي يمكن استخدام لوبيتال

Sheet (09)
التفاضل وتطبيقاته

$$\xrightarrow{L'H} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{10t - 8t}{-1 - 27t^2} = \frac{10(1) - 8(1)}{-1 - 27(1)^2} = \frac{10 - 8}{-1 - 27} = \frac{2}{-28} = \boxed{-\frac{1}{14}}$$

Ex ③: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 4x^2 - 1}{10 - x - 9x^3}$

Sol:

$$= \frac{5(1)^4 - 4(1)^2 - 1}{10 - (1) - 9(1)^3} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{احدى الصنفين يمكن تطبيق لوبيتال}$$

$$\xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{20x^3 - 8x - 0}{0 - 1 - 27x^2} = \frac{20(1)^3 - 8(1) - 0}{10 - (1) - 9(1)^3} = \frac{12}{-28} = \boxed{-\frac{3}{7}}$$

Ex ④: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$

Sol:

$$\frac{e^\infty}{\infty^2} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{احدى الصنفين غير صفرى وبالنسبة يمكن تطبيق لوبيتال}$$

$$\xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \cdot (1)}{2x} = \frac{e^\infty}{2(\infty)} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{نكرر لوبيتال مرة اخرى}$$

$$\xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \frac{e^\infty}{2} = \frac{\infty}{2} = \boxed{\infty} \neq$$

(2) - مبرهنه رول ومبرهنه القيمة المتوسطة:

مبرهنه القيمة المتوسطة

مبرهنه رول

إذا كانت الدالة $f(x)$:

إذا كانت الدالة $f(x)$:

- 1- الشرط: يجب أن تكون الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$.
- 2- أن تكون الدالة قابلة للإشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b) .

- 1- يجب أن تكون الدالة مستمرة في الفترة $[a, b]$.
 - 2- يجب أن تكون الدالة قابلة للإشتقاق عند الفترة (a, b) .
 - 3- يجب أن تكون $f(b) = f(a)$.
- القانون:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

حيث $c \in (a, b)$ و c هي القيمة التي تحقق الشرط.

$$f'(c) = 0$$

حيث $c \in (a, b)$ و c هي القيمة التي تحقق الشرط.

التفاضل وتطبيقاته

$$X \textcircled{1}: f(x) = x^4 - 2x^2 \text{ و } x \in [-2, 2]$$

استخدم مبرهنه رول ومبرهنه القيمة المتوسطة

لايجاد قيم $f'(c)$ ؟

Sol:

$$\text{الشروط} \Rightarrow \text{أولا مبرهنه رول} \quad \textcircled{1} \text{ مستمرة في الفترة المغلقة } [a, b] \quad [-2, 2]$$

ب دالة كثيرة حدود فهي مستمرة عند الفترة $[-2, 2]$ ، لاننا
لا توجد أسباب للانقطاع مثل (مقام صفر أو جذر سالب) $\neq$

$$\textcircled{2} \text{ قابله للاشتقاق خلال الفترة: } (a, b) \quad (-2, 2)$$

ب دالة كثيرة حدود فهي قابلة للاشتقاق دائما. $\textcircled{2} \neq$

$$f(a) = f(-2) = 16 - 8 = \boxed{8} \quad \textcircled{3}$$

$$f(b) = f(2) = 16 - 8 = \boxed{8}$$

$$\textcircled{3} \quad f(b) = f(a) \neq \textcircled{3}$$

منه تحققت شروط مبرهنه رول فوجد القانون:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \quad \text{نشتق}$$

$$f'(c) = 4c^3 - 4c \quad \text{نفوض}$$

$$\begin{aligned} & \text{نوجد قيم } (c) \text{ بتسوية المعادلة بالصفر:} \\ & \Rightarrow 4c^3 - 4c = 0 \Rightarrow c^3 - c = 0 \Rightarrow c(c^2 - 1) = 0 \\ & \Rightarrow \boxed{c = 0} \text{ or } c^2 = 1 \Rightarrow \boxed{c = \pm 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{c = 0 \in (-2, 2)} \quad \text{o.k.}$$

$$\boxed{c = \pm 1 \in (-2, 2)} \quad \text{o.k.}$$

ملاحظة: يكفي ان نسمى قيمه واحدة لـ (c) فقط ليكون الحل صحيح.

التفاضل وتطبيقاته

- ① - أن تكون الدالة f مستمرة في الفترة $[-2, 2]$
 ب دالة كثيرة حدود فهي مستمرة في الفترة
 ② - أن تكون قابلة للاشتقاق خلال الفترة (a, b)
 $(-2, 2)$

ب دالة كثيرة حدود فهي قابلة للاشتقاق خلال الفترة $(-2, 2)$

ننطبق الشرط وبالتالي يمكن تطبيق مبرهنه القيمة المتوسطة :

$$\therefore f(a) = f(-2) = 16 - 8 = \boxed{8}$$

$$\therefore f(b) = f(2) = 16 - 8 = \boxed{8}$$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{8 - 8}{2 - (-2)} = \frac{0}{4} = 0 \quad \text{صلى الوتر}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow f'(c) = 4c^3 - 4c$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$4c^3 - 4c = 0 \Rightarrow c^3 - c = 0 \Rightarrow c(c^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 0} \in (-2, 2)$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \pm 1} \in (-2, 2)$$

$$\text{Ex: } f(x) = (x^2 - 3)^2 \quad ; \quad x \in [-1, 1]$$

أوجد قيم (c) باستخدام رول والقيمة المتوسطة

Sol:

- أولا مبرهنه رول: ① f دالة مستمرة في الفترة $[a, b]$
 ② f قابلة للاشتقاق عند الفترة (a, b)
 لانها دالة كثيرة حدود

$$f(a) = f(-1) = ((-1)^2 - 3)^2 = (-2)^2 = \boxed{4}$$

$$f(b) = f(1) = (1^2 - 3)^2 = (-2)^2 = \boxed{4}$$

$$\therefore \boxed{f(a) = f(b)} \quad \text{تحقق الشرط}$$

$$\text{نشتق} \Rightarrow f'(x) = 2(x^2 - 3) \cdot (2x) = 4x(x^2 - 3)$$

$$\text{نضوض} \Rightarrow f'(c) = 4c(c^2 - 3) = 0$$

$$\stackrel{4\%}{\Rightarrow} c(c^2 - 3) = 0 \Rightarrow \boxed{c=0} \in (-1, 1) \stackrel{\text{ن.ك}}{=}$$

$$\Rightarrow c = \pm\sqrt{3} \notin (-1, 1)$$

ن. قيمة (c) هي صفر

ثانياً مبرهنه القيمة المتوسطة:

① دالة مستمرة عند $[-1, 1]$ دالة كثيرة حدود
② قابلة للاشتقاق عند $(-1, 1)$

$$\Rightarrow f(a) = f(-1) = 4$$

$$\Rightarrow f(b) = f(1) = 4$$

$$\text{القانون} \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{4 - 4}{1 - (-1)} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{ميل الوتر}$$

$$f'(x) = 2(x^2 - 3)(2x) = \boxed{4x(x^2 - 3)}$$

ميل الوتر = ميل المماس

$$4x(x^2 - 3) = 0 \stackrel{4\%}{\Rightarrow} x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \in (-1, 1) \stackrel{\text{ن.ك}}{=}$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \notin (-1, 1)$$

ن. قيمة (c) هي صفر

$$\text{Ex ③: } f(x) = 2x + \frac{2}{x}, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Sol: هذه الدالة ليست دالة كثيرة حدود ومنه x=0

$$\Rightarrow x = 0 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right] \quad \text{بالتالي}$$

ن. الدالة مستمرة في الفترة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ لأن صفر ليس ضمنها

الدالة قابلة للاشتقاق لأن صفر ليس ضمن الفترة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

التفاضل وتطبيقاته

$$\Rightarrow f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 1 + 4 = \boxed{5}$$

$$\Rightarrow f(b) = f(2) = 2(2) + \frac{2}{2} = 4 + 1 = \boxed{5}$$

$$\sim \boxed{f(b) = f(a)}$$

وبالتالي تحققت شروط مبرهنه رول

$$\text{القانون} \Rightarrow \text{الدالة} \Rightarrow f(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

$$\text{ترتيب الدالة} \Rightarrow f(x) = 2x + 2x^{-1}$$

$$\text{نشتق} \Rightarrow f'(x) = 2 - 2x^{-2}$$

$$\text{نغوضها} \Rightarrow f'(c) = 2 - 2c^{-2} = \boxed{2 - \frac{2}{c^2}}$$

$$\text{نساويها صفر ونوجد قيم (c)} \Rightarrow 2 - \frac{2}{c^2} = 0 \xrightarrow{*c^2} 2c^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2(c^2 - 1) = 0 \Rightarrow c^2 = 1$$

$$c = \pm 1$$

$$c = +1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right) \text{ بالتالي}$$

$$c = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$\boxed{+1} \text{ هي القيمة (c) المطلوبة}$$



تطبيقات التفاضل (الاشتقاق)

النهايات العظمى والصغرى وفترات التزايد والتناقص :

لايجار النهايات العظمى والصغرى للدالة ومن ثم ايجاد فترات التزايد والتناقص للدالة يتم اتباع الخطوات التالية :

- (1) - نستق الدالة : $f'(x)$
- (2) - نضع المشتقة الاولى للدالة : $[f'(x) = 0]$ ونوجد قيم (x) .
- (3) - نختبر قيم (x) على خط الاعداد لايجار فترات التزايد والتناقص.
- (4) - نعرض قيمة (x) في الدالة الاصلية.

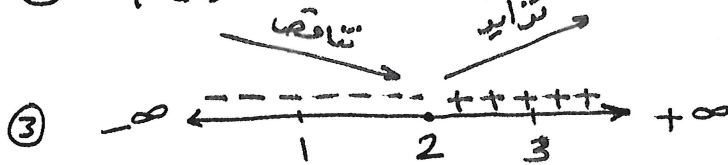
مثال : اوجد نقاط النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص للدوال التالية.

Ex: ①. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Sol:

①. $f'(x) = 2x - 4$

② $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2}$



$\Rightarrow f'(x) = 2x - 4$

قيمة حرجية ① أصغر من $\rightarrow f(1) = 2(1) - 4 = 2 - 4 = \ominus 2$

قيمة حرجية ② أكبر من $\rightarrow f(3) = 2(3) - 4 = 6 - 4 = \oplus 2$

$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3$ نقطة النهاية

$\Rightarrow f(2) = (2)^2 - 4(2) + 3 = -1$

نقطة نهاية صغرى محلية $(2, -1)$ هي

$\Rightarrow x \in (2, +\infty)$ فترات التزايد

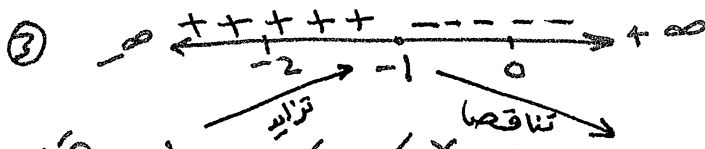
$\Rightarrow x \in (-\infty, 2)$ فترات التناقص

تطبيقات التفاضل (الاشتقاق)

Ex ②: $f(x) = 16 - 6x - 3x^2$

Sol: ① $f'(x) = -6 - 6x$

② $f'(x) = 0 \Rightarrow -6 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = -6 \Rightarrow \boxed{x = -1}$



check $\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = -6 - 6x \\ f(0) = -6 - 6(0) = \ominus 6 \\ f(-2) = -6 - 6(-2) = \oplus 6 \end{array} \right.$

④ $f(x) = 16 - 6x - 3x^2$

$f(-1) = 16 - 6(-1) - 3(-1)^2 = 16 + 6 - 3 = 19$

نقطة النهاية : $(-1, 19)$ نقطة عظمى محلية

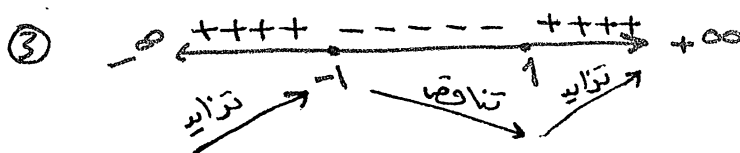
فترات التزايد $\Rightarrow x \in (-\infty, -1)$

فترات التناقص $\Rightarrow x \in (-1, +\infty)$

Ex ③: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Sol: ① $f'(x) = 3x^2 - 3$

② $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$



تحليلات التفاضل (الاشتقاق)

$$f(x) = 3x^2 - 3$$

$$\Rightarrow f(2) = 3(2)^2 - 3 = \oplus 9$$

$$\Rightarrow f(0) = 3(0)^2 - 3 = \ominus 3$$

$$\Rightarrow f(-2) = 3(-2)^2 - 3 = \oplus 9$$

$$\textcircled{4} f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{نقطه النهايه} (-1, 4) ; (1, 0)$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \text{نهايه عظمى} & \text{نهايه صغرى} \\ \text{محلية} & \text{محلية} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{فترات التزايد} x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\Rightarrow \text{فترات التناقص} x \in (-1, 1)$$

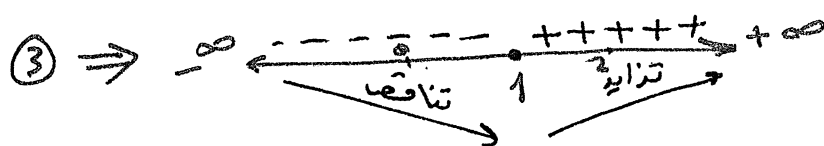
$$\text{Ex } \textcircled{4}: f(x) = x(x-2)$$

اولا نرتب الدالة لتسهيل الاشتقاق : sol

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 2x$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$



$$f'(x) = 2x - 2$$

$$\Rightarrow f'(0) = 2(0) - 2 = \ominus 2 ; f'(2) = 2(2) - 2 = 4 - 2 = \oplus 2$$

حقیقات التفاضل (الاشتقاق)

④ $\Rightarrow f(x) = x^2 - 2x$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) = \boxed{-1}$$

منه نفقة النجاة

(وهي نهاية مغزى محلية) $(-1, 1)$

$$x \in (1, +\infty) \Rightarrow \text{فترات التزايد}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 1)$$

مناطق العقر والتحب ونقاط الانقلاب :

ملاحظة: لايجاد مناطق التقعر والتحدب للدالة ونقاط الانقلاب نطبق نفس الخطوات لايجاد النهايات وفترات التزايد ، والفرق بينهما أن في مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب نطبق الخطوات على المشتقة الثانية للدالة : $f''(x)$

فترات الفقر والمحب
ويقال لانقلاب

فترات التزايد والتناقص
والمنهايات

① - نسق الدالة $f(x)$

② - نضع المشتقة الاولى $f'(x) = 0$

(3) - ندرس على خط الاعداد قيم (x).

(٤) - نفوض بقم (خ) في الدالة الاحدية .

① نستق الدالة $f(x)$ ومن ثم نستق

② نقطة الصفر الثانية $f(x) = 0$

(ج) ندرس علی خط الاعداد قیم (X).

(٤) نغوص بقرص (لا) في الحالة الأصلية.

مثال: أوجد فترات التقعر والحدب ونقاط الانقلاب للدوال التالية:

①. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

SOL :

① $\Rightarrow f(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 6x$

$$\textcircled{2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

③ $\Rightarrow$

تطبيقات التفاضل (الاشتقاق)

$$f(x) = 6x$$

$$\Rightarrow f(1) = 6(1) = \oplus 6$$

$$\Rightarrow f(-1) = 6(-1) = \ominus 6$$

$$\textcircled{4} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$\Rightarrow f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = \boxed{2}$$

$$\Rightarrow \text{نقطة الانقلاب} (0, 2)$$



$$\Rightarrow \text{فترات التقعر} x \in (0, +\infty)$$

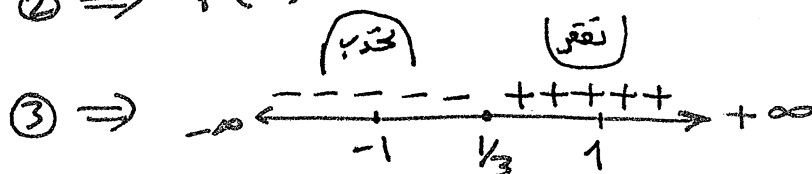
$$\Rightarrow \text{فترات التحبب} x \in (-\infty, 0)$$

$$\textcircled{2}. f(x) = x^3 - x^2 + 1$$

sol:

$$\textcircled{1} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f''(x) = 6x - 2$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 2 = 0 \Rightarrow 6x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$



$$f''(x) = 6x - 2$$

$$f''(-1) = 6(-1) - 2 = \ominus 8$$

$$f''(1) = 6(1) - 2 = \oplus 4$$

$$\textcircled{4} \Rightarrow f(x) = x^3 - x^2 + 1$$

$$\boxed{\text{نقطة الانقلاب}} \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} + 1 = \boxed{\frac{25}{27}}$$

نظريات التفاضل (الاستقاف)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{25}{27} \right) \text{ (نقطة الانقلاب) } \sim$$

نقطة
الانقلاب
(نقطة)
(نقطة)

$$\Rightarrow x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty \right) \text{ فترات التفرع}$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{3} \right) \text{ فترات التحريك}$$

تمارين إحصائية عن التفاضل :

السؤال الأول : أوجد مستقيم التعريف للدوال التالية :

$$①. f(x) = 3x^2 + 1$$

sol :

$$\sim f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 + 1 - (3x^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{3x^2} + 6x\Delta x + \Delta^2 x + 1 - \cancel{3x^2} - 1}{\Delta x}$$

$$\sim f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x} (6x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 6x + \Delta x = 6x + 0 = \boxed{6x}$$

$$②. f(x) = x^2 + x + 1$$

sol :

$$\sim f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) + 1 - (x^2 + x + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta^2 x + \cancel{x} + \Delta x + 1 - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1}{\Delta x}$$

تطبيقات التفاضل (الاشتقاق)

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta^2 x + \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x} (2x + \Delta x + 1)}{\cancel{\Delta x}} = 2x + (0) + 1 = \boxed{2x + 1}$$

③. $f(x) = x^3$, find $f'(2) = ?$

sol:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - (2)^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = (2)^2 + 2(2) + 4 = \boxed{16}$$

السؤال الثاني: أوجد المشتقة الأولى للدالة التالية:

① $y = 2^{\sin^2 x} \cdot 3^{\cos^2 x}$

sol:

بأخذ (Ln) الطرفين

$$\Rightarrow \ln y = \ln 2^{\sin^2 x} + \ln 3^{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \ln y = (\ln 2) \sin^2 x + \ln 3 \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln 2 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x + \ln 3 \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2 \ln 2 \sin x \cdot \cos x - 2 \ln 3 \cos x \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow y' = y [2 \ln 2 \sin x \cdot \cos x - 2 \ln 3 \cos x \cdot \sin x]$$

$$\Rightarrow y' = \left[2^{\sin^2 x} \cdot 3^{\cos^2 x} \right] [2 \ln 2 \sin x \cdot \cos x - 2 \ln 3 \cos x \cdot \sin x]$$

تطبيقات التفاضل [الاشتقاق]

②. $y = \sec^2 x \cdot \csc^3 x$

sol: $y' = \sec^2 x \cdot 3(\csc x)^2 \cdot (-\csc x \cdot \cot x) + \csc^3 x \cdot 2(\sec x) \cdot \sec x \cdot \tan x$

$\sec x \cdot \tan x$

③. $y = x^2$, $x = 5t^2 + 1$, find $\frac{dy}{dt} = ?$

sol: $\frac{dy}{dx} = 2x$, $\frac{dx}{dt} = 10t$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (2x)(10t) = 20xt$
 $= 20t(5t^2 + 1)$

$\frac{dy}{dt} = 100t^3 + 20t$

④. $y = (2x + 1)^5$

أوجد $(\frac{dy}{dx})$ باستخدام قاعدة السلسلة؟

sol:

نجري تعديل على الدالة ليتمكن اشتقاقها
بقاعدة السلسلة:

نفرض: $U = 2x + 1$ و $y = (U)^5$

$\frac{du}{dx} = 2$; $\frac{dy}{du} = 5U^4$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (5U^4)(2) = 10U^4$

$\frac{dy}{dx} = 10(2x + 1)^4$

حل باستخدام قوانين الاشتقاق $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5(2x + 1)^4 \cdot (2) = 10(2x + 1)^4$

تطبيقات التفاضل [الاشتقاق]

⑤. $y = (4-3x)^9$

Sol: أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة السلسلة

نفرض $y = (u)^9$ و $u = 4-3x$

$\frac{dy}{du} = 9u^8$ و $\frac{du}{dx} = -3$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (9u^8)(-3) = -27u^8$
 $= -27(4-3x)^8$

حل آخر: $y' = 9(4-3x)^8 \cdot (-3)$

$y' = -27(4-3x)^8$

⑥. $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x^2-4}$

Sol: $f'(x) = \frac{(x^2-4)(e^{2x} \cdot 2) - (e^{2x}-1)(2x)}{(x^2-4)^2}$

⑦. $f(x) = e^{3x} + \frac{1}{e^{x^2+1}} + 4$

Sol: ترتيب الدالة $\Rightarrow f(x) = e^{3x} + e^{-x^2+1} + 4$

$f'(x) = 3 \cdot e^{3x} + e^{-x^2+1} \cdot (-2x)$

$f'(x) = 3e^{3x} - 2xe^{-x^2+1}$

تطبيقات التفاضل [الاشتقاق]

⑧. $y = (\ln x)^x$; find $y' = ?$

sol: بأخذ (Ln) للطرفين:

$$\Rightarrow \ln y = \ln (\ln x)^x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = x \cdot \ln(\ln x)$$

$$\frac{y'}{y} = (x) \cdot \frac{1/x}{\ln x} + \ln(\ln x) \cdot (1)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x \ln x} + \ln(\ln(x))$$

$$\Rightarrow y' = y \left[\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = (\ln x)^x \cdot \left[\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x) \right]}$$

⑨. $x^5 + 4xy^3 - y^5 = 2$; find $\frac{dy}{dx} = ?$

sol: $5x^4 + (4x)(3y^2 \frac{dy}{dx}) + (y^3)(4) - 5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow (12xy^2) \frac{dy}{dx} - 5y^4 \frac{dy}{dx} = -5x^4 - 4y^3$$

$$\frac{dy}{dx} [12xy^2 - 5y^4] = -5x^4 - 4y^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-5x^4 - 4y^3}{12xy^2 - 5y^4}}$$

تطبيقات التفاضل [الاشتقاق]

⑩. if : $x^4 + y^4 = 16$; find $\frac{dy}{dx}$??

sol :

$$\Rightarrow 4x^3 + 4y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 4y \frac{dy}{dx} = -4x^3$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3}{4y} = \boxed{\frac{-x^3}{y}}$$

⑪. if : $x^2 + y^2 = 5xy$; find $\frac{dy}{dx} = ?$

sol :

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = (5x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (y) (5)$$

$$\Rightarrow (2y) \frac{dy}{dx} - (5x) \frac{dy}{dx} = -2x + 5y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} [2y - 5x] = -2x + 5y$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 5y}{2y - 5x}}$$

السؤال الثالث : استخدم قاعدة لوبيتال لإيجاد النهايات إن وجدت للدوال التالية:

①. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

sol : $= \frac{\tan(0)}{0} = \frac{\frac{\sin(0)}{\cos(0)}}{0} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$ اصح صيغ لوبيتال

$\xRightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2(x)}{1} = \frac{1/\cos^2(x)}{1} = \frac{1}{\cos^2(0)} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

②. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^4 - 4x}{x - 2}$

sol: $= \frac{2(2)^4 - 4(2)}{(2) - 2} = \frac{0}{0}$ → احدي صيغ لوبيتال

$\xRightarrow{L'H} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8x^3 - 4}{1} = \frac{8(2)^3 - 4}{1} = \frac{60}{1} = \boxed{60}$

③. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x - \sin x}$

sol: $= \frac{2 \sin(0) - \sin 2(0)}{(0) - \sin(0)} = \frac{0}{0}$ → احدي صيغ لوبيتال

$\xRightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) - 2 \cos(2x)}{1 - \cos(x)} = \frac{2 \cos(0) - 2 \cos(2(0))}{1 - \cos(0)}$

$= \frac{2 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ → احدي صيغ لوبيتال

$\xRightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(x) + 4 \sin(2x)}{-(-\sin(x))} = \frac{-2(0) + 4(0)}{\sin(0)} = \frac{0}{0}$ → احدي صيغ لوبيتال

$\xRightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos(x) + 8 \cos(2x)}{\cos(x)} = \frac{-2 \cos(0) + 8 \cos(0)}{\cos(0)} = \frac{-2 + 8}{1} = \boxed{6}$

السؤال الرابع:

(P). برهن أن الدالة $[f(x) = 3\sqrt{x} - 4x]$ في الفترة $[1, 4]$ تحقق صبرهذه القيمة المتوسطة.
ثم أوجد قيمة (C).

الحل:-
ب دالة تحتوي على جذر وبالتالي تكون الدالة غير مستقيمة عندما تحت الجذر سالبة.
خلال الفترة: $[x \geq 0]$ بـ

مسألة $\Rightarrow \sqrt{(-)}$
معرفه $\Rightarrow \sqrt{+}$

وبالتالي 1) دالة مستمرة عند الفترة $[1, 4]$.
2 - دالة قابلة للاشتقاق عند الفترة $[1, 4]$.

Sheet (10)
تطبيقات التفاضل [الاشتقاق]

استاذ المقرر: حمزة النبوت

$$\Rightarrow f(x) = 3\sqrt{x} - 4x$$

ترتيب
المعادلة $\Rightarrow f(x) = 3x^{1/2} - 4x$

$$f'(x) = (3)\left(\frac{1}{2}\right)x^{-1/2} - 4(1) = \frac{3x^{-1/2}}{2} - 4 = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 4$$

(صيغ
التماسيح) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 4$ $f'(c) = \frac{3}{2\sqrt{c}} - 4$

$$f(a) = f(1) = 3\sqrt{1} - 4(1) = 3 - 4 = \boxed{-1}$$

$$f(b) = f(4) = 3\sqrt{4} - 4(4) = 6 - 16 = \boxed{-10}$$

$$\text{ميل الوتر} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-10 - (-1)}{4 - 1} = \frac{-10 + 1}{3} = \frac{-9}{3} = \boxed{-3}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\therefore \frac{3}{2} - 4 = -3$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = -3 + 4$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{c}} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{c} = 3 \Rightarrow \sqrt{c} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{3}{2}} \in (1, 4)}$$

o.k

$$f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$$

فاالفترة [-1, 1]

ب. افحصا الدالة التالية اهل تحقق شروط مبرهنه رول

- الحل: 1) $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة [-1, 1]، لانها دالة كثيرة حدود.
2) $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق عند الفترة (-1, 1)، لانها دالة كثيرة حدود.

3) حل $f(a) = f(b)$
 $\Rightarrow f(a) = f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3 = -9 + 3 + 1 = \boxed{-5}$

تجيبات التقاض [الاشتقاق]

$$f(b) = f(1) = 9(1) + 3(1)^2 - (1)^3 = 9 + 3 - 1 = \boxed{11}$$

$$\sim f(b) \neq f(a)$$

هذه الدالة لا تحقق الشروط لمبرهنه رول

السؤال الخامس: (P). أوجد النهايات العظمى والصغرى وفترات التزايد والتناقص للدالة التالية:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

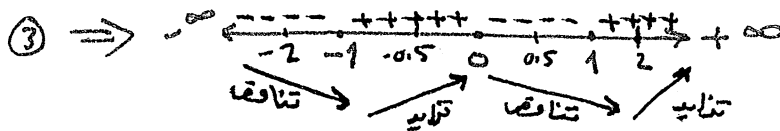
$$\text{Sol: } ① \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$② \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow \frac{4}{4}(x^3 - x) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\boxed{x = -1}$$



نختبر:

$$\begin{cases} f'(x) = 4x^3 - 4x \\ f'(-2) = 4(-1)^3 - 4(-1) = \ominus 26 \rightarrow \text{تناقص} \\ f'(-0.5) = 4(-0.5)^3 - 4(-0.5) = \oplus 1.5 \rightarrow \text{تزايد} \\ f'(0.5) = 4(0.5)^3 - 4(0.5) = \ominus 1.5 \rightarrow \text{تناقص} \\ f'(2) = 4(2)^3 - 4(2) = \oplus 24 \rightarrow \text{تزايد} \end{cases}$$

$$④ \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$f(0) = (0)^4 - 2(0)^2 + 1 = 1$$

$$f(1) = (1)^4 - 2(1)^2 + 1 = 0$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 1 = 0$$

نقاط النهاية

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{نهاية عظمى محلية } (0, 1) \\ \text{نهاية صغرى محلية } (1, 0) \\ \text{نهاية صغرى محلية } (-1, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{فترات التزايد} \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty) \\ \text{فترات التناقص} \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \end{cases}$$

تطبيقات المتفاضل [الاشتقاق]

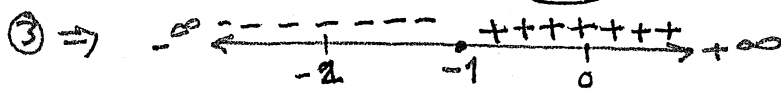
ج. أوجد نقاط الانقلاب ومناطق التفرع والتحدب للدوال التالية:

①. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

sol: $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 \Rightarrow$ نستخدم لإيجاد النهايات والفترات التزايدية والتناقصية

① $\Rightarrow f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow$ نستخدم لإيجاد نقاط الانقلاب ومناطق التفرع والتحدب

② $\Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow 6(x+1) = 0 \xrightarrow{\div 6} x+1=0 \Rightarrow x = -1$
تحدب تفرع



$$\begin{aligned} \text{نختبر لـ } f''(x) &\Rightarrow f''(x) = 6x + 6 \\ f''(0) &= 6(0) + 6 = +6 \\ f''(-2) &= 6(-2) + 6 = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{نوجد نقطة الانقلاب} &\Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ f(-1) &= (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1 = 0 \end{aligned}$$

نقطة الانقلاب $\Rightarrow (-1, 0)$

تفرع * نقطة الانقلاب
 (-1, 0)

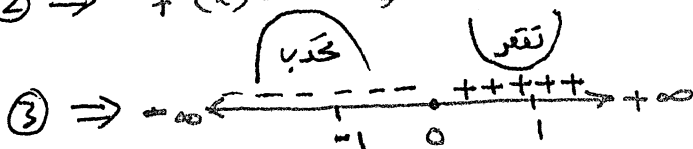
مناطق التفرع $\Rightarrow x \in (-1, +\infty)$

مناطق التحدب $\Rightarrow x \in (-\infty, -1)$

②. $f(x) = 4x^3 - 3x + 4$

sol: $f'(x) = 12x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 24x \rightarrow$ ①

② $\Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 24x = 0 \xrightarrow{\div 24} x = 0$



تطبيقات التفاضل [الاشتقاق]

نختبر $f(x) = 24x$

$f'(x) \Rightarrow f'(1) = 24(1) = 24$ مناطق تفر $\rightarrow$

$f'(-1) = 24(-1) = -24$ مناطق تفر $\rightarrow$

نقطة الانقلاب $\Rightarrow f(x) = 4x^3 - 3x + 4$

$f(0) = 4(0)^3 - 3(0) + 4 = 4$

نقطة الانقلاب $\Rightarrow (0, 4)$

فترات التفر $\Rightarrow x \in (0, +\infty)$

فترات التفر $\Rightarrow x \in (-\infty, 0)$

نقطة انقلاب (0, 4)

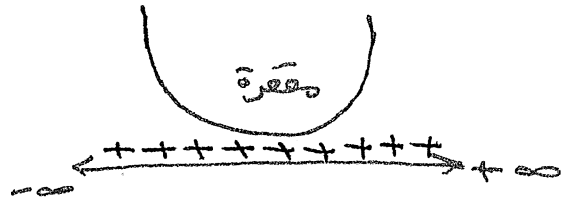
③. $f(x) = 5 - 2x + x^2$

sol: - $f'(x) = -2 + 2x$

① $\Rightarrow f'(x) = 2$

② $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$

$\therefore$ لا توجد نقاط انقلاب للدالة لأن $[2 \neq 0]$ ولا يوجد متغير (x) .



ملاحظة: ولكن الدالة تكون مقعرة بمجالها والسبب في أن إشارة (2) موجبة، ولو كانت الإشارة سالبة تكون الدالة محدبة في مجالها.