كشك الهندسة ENGINEERING

تمارين إضافية عن المتباينات

① $\sqrt{x^2+2x+1} \geq x+3$

للتخلص من الجذر نربع طرفين

$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2+2x+1}\right)^2 \geq (x+3)^2$

↳ (مربع الحدانية)

$\Rightarrow x^2+2x+1 \geq x^2+6x+9$

(في المتباينات من الدرجة الثانية نجعل المقدار الجبري في طرف واحد)

$\Rightarrow x^2-x^2+2x-6x+1-9 \geq 0$

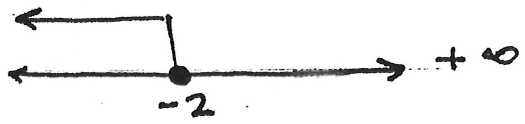
$\Rightarrow -4x-8 \geq 0$ $\quad +(+8)$

(وبالتالي اصبحت متباينة من الدرجة الأولى نجعل المتغير في طرف لوحده)

$\Rightarrow -4x \geq 8$ $\quad \div(-4)$

$\Rightarrow \frac{-4x}{-4} \leq \frac{8}{-4}$

$\Rightarrow \boxed{x \leq -2}$



$\boxed{x \in (-\infty, -2]}$

② $|2x-3| < |x+2|$

نتخلص من القيمة المطلقة بالتربيع للطرفين

$\Rightarrow (2x-3)^2 < (x+2)^2$

$(4x^2-12x+9) < (x^2+4x+4)$ نقوم بتحليل مربع الحدانية:

(في المتباينات من الدرجة الثانية نجعل المقدار في طرف وطرف الآخر صفر)

$\Rightarrow 4x^2-x^2-12x-4x+9-4 < 0$

امثلة إضافية عن المتباينات

$\Rightarrow 3x^2 - 16x + 5 < 0$

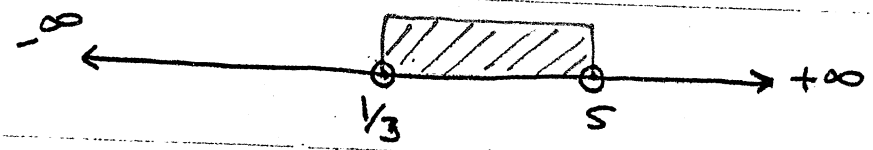
هذا المقدار الثلاثي لا تمثل مقدار مربع كامل وبالتالي نحلل بالتجربة

$\Rightarrow (3x-1)(x-5) < 0$

$\Rightarrow 3x-1=0 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}}$

$x-5=0 \Rightarrow \boxed{x=5}$

	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	2	5	6	$+\infty$
$3x-1$		−		+		+	
$x-5$		−		−		+	
$(3x-1)\cdot(x-5)$		+		−		+	



$\boxed{\int x \in (\frac{1}{3}, 5)}$

③ $-2 < 3x+4 < x^2$

نقسم المتباينة إلى جزئين ونوجد فترات التقاطع في الحل

$x^2 > 3x+4$

(متباينة من الدرجة الثانية نجعل المقدار في طرف)

$x^2 - 3x - 4 > 0$

مقدار ثلاثي ليس مربع كامل

$(x-4)(x+1) > 0$

$\Rightarrow x-4=0 \Rightarrow \boxed{x=4}$

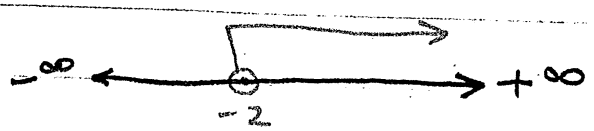
$\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

$3x+4 > -2 \quad +(-4)$

$3x+4-4 > -2-4$

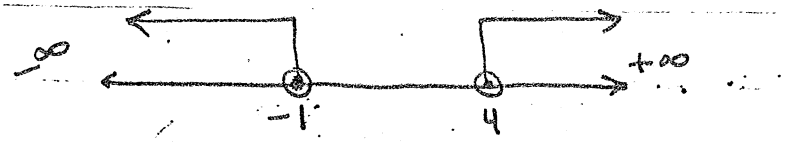
$3x > -6 \quad (\div 3)$

$\boxed{x > -2}$

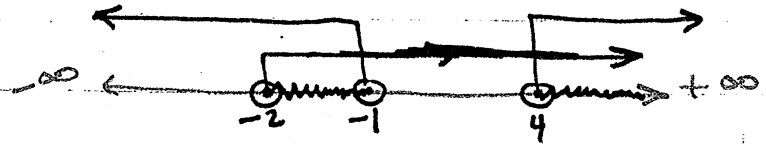


تمارين إضافية عن المتباينات

	$-\infty$	-2	-1	0	4	5	$+\infty$
$x-4$		$-$	$-$		$+$		
$x+1$		$-$		$+$	$+$		
$(x-4)\cdot(x+1)$		$\oplus$		$-$	$\oplus$		



فرات التقاطع $\Rightarrow$



$$\Rightarrow \int x \in (-2,-1) \cup (4,+\infty)$$

④ $\dfrac{2x-3}{3x-5} \geq 3$

$\dfrac{2x-3}{3x-5} - 3 \geq 0$ (نوحد المقام)

$\Rightarrow \dfrac{(2x-3)-3(3x-5)}{3x-5} \geq 0$

$\Rightarrow \dfrac{2x-3-9x+15}{3x-5} \geq 0$

$\Rightarrow \dfrac{-7x+12}{3x-5} \geq 0$

(متباينة كسرية ننظر للمقام يجب أن يكون موجب أو سالب)

تمارين اضافية عن المتباينات

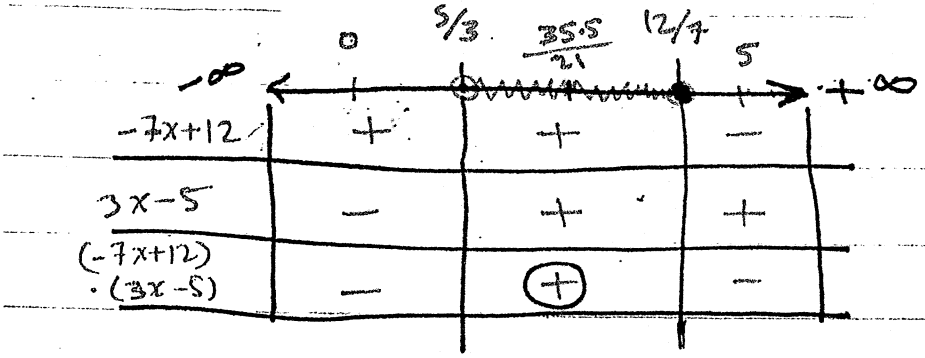
$$\frac{(-7x+12)(3x-5)^2}{3x-5} \geq 0$$

$*\ (3x-5)^2$

$$\Rightarrow (-7x+12)(3x-5) \geq 0$$

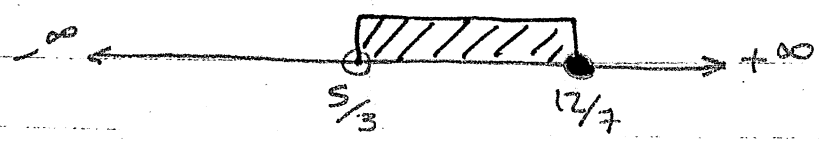
$$\Rightarrow -7x+12=0 \Rightarrow 7x=12 \Rightarrow x=\frac{12}{7}$$

$$\Rightarrow 3x-5=0 \Rightarrow 3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$



$\frac{5}{7} = \frac{35}{21}$

$\frac{12}{7} = \frac{36}{21}$



$3\left(\frac{5}{3}\right)-5$

$5-5=0$

$x \notin \left(\frac{5}{3}\right)$

$$\Rightarrow \int x \in \left(\frac{5}{3}, \frac{12}{7}\right]$$

⑤. $\left|\frac{1}{x}-2\right| < 4$ متباينة القيمة المطلقة

$$-4 < \frac{1}{x}-2 < 4$$

$$\Rightarrow -4 < \frac{1-2x}{x} < 4 \quad ; \boxed{x \neq 0}$$

$$\frac{1-2x}{x} < 4 \qquad \Big| \qquad \frac{1-2x}{x} > -4$$

تمارين اضافية عن المتباينات

⑥ $\frac{2}{x} < 3$

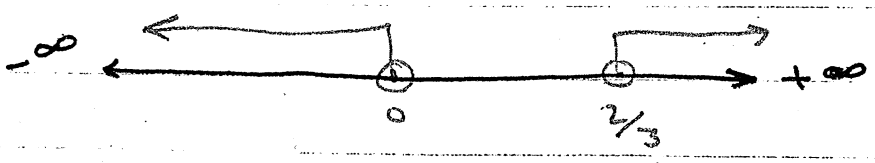
$\Rightarrow \frac{2}{x} - 3 < 0$ (نوحد المقام)

$\Rightarrow \frac{2-3x}{x} < 0$; $x \neq 0$

$\Rightarrow 2-3x = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow x = 0$

	$-\infty$		-1		0		$1/3$		$2/3$		4		$+\infty$
x		−		−	0	+		+		+			
$2-3x$		+		+		+		+	0	−			
$\frac{2-3x}{x}$		−	‖	−	‖	+	‖	+	0	−			



$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$

⑦ $0 < |3x+1| < \frac{1}{3}$

نقوم بتقسيم المتباينة المطلقة إلى جزئين:

$3x+1 > 0 \quad +(-1)$

$3x+1-1 > 0-1$

$3x > -1$

$-\frac{1}{3} < 3x+1 < \frac{1}{3} \quad +(-1)$

$-1-\frac{1}{3} < 3x+1-1 < \frac{1}{3}-1$

تمارين اضافية عن المتباينات

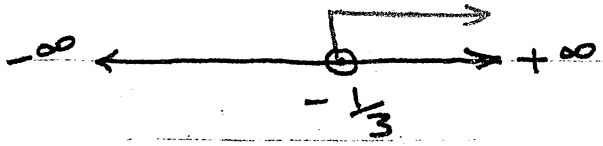
$$\frac{-3-1}{3} < 3x < \frac{1-3}{3}$$

$$\frac{-4}{3} < 3x < \frac{-2}{3} \quad (\div 3)$$

$$\frac{-4/3}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{-2/3}{3}$$

$$\boxed{\frac{-4}{9} < x < \frac{-2}{9}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x > \frac{-1}{3}}$$

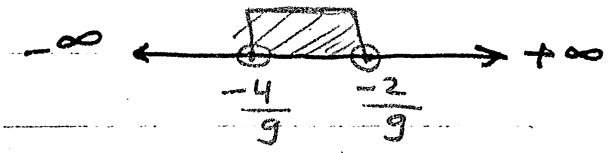


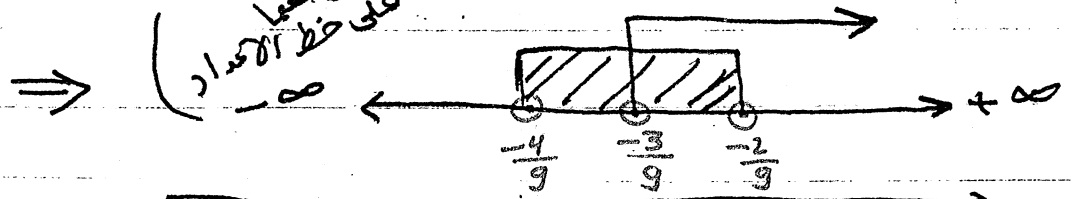
$$\frac{-4}{9}, \frac{-2}{9}, \left(\frac{-1}{3}\right) *3$$

$$\boxed{\frac{-4}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{-3}{9}}$$

توحيد المقام.

لتحديد موضعها على خط الاعداد





$$\Rightarrow \boxed{\int x \in \left(\frac{-4}{9}, \frac{-3}{9}\right) \cup \left(\frac{-3}{9}, \frac{-2}{9}\right)}$$

$$\text{Or} \Rightarrow \boxed{\int x \in \left(\frac{-4}{9}, \frac{-2}{9}\right) \cap x \neq \frac{-3}{9}}$$

⑧ $\sqrt{4x+2} + \sqrt{2x} - \sqrt{2} \geq 0$

بالتربيع لنتخلص من الجذور

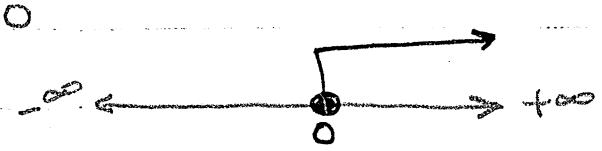
$$\left(\sqrt{4x+2}\right)^2 + \left(\sqrt{2x}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 \geq (0)^2$$

$$\Rightarrow (4x+2) + 2x - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 6x \geq 0 \quad \div 6$$

تمارين اضافية عن المتباينات

$\Rightarrow x \geq 0$



$\Rightarrow \boxed{\int x \in [0, +\infty)}$

⑨. $-2 < \frac{1}{x} + 1 \leq 2$

نوحد المقام :

$-2 < \frac{1+x}{x} \leq 2$; $\boxed{x \neq 0}$

نقسم المتباينة إلى جزئين لسهولة العمل معها :

$\Rightarrow \frac{1+x}{x} \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1+x}{x} - 2 \leq 0$

$\Rightarrow \frac{1+x-2x}{x} \leq 0$

$\Rightarrow \frac{1-x}{x} \leq 0$

$\Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$\boxed{x=0}$

$\frac{1+x}{x} > -2$

$\Rightarrow \frac{1+x}{x} + 2 > 0$

$\Rightarrow \frac{1+x+2x}{x} > 0$

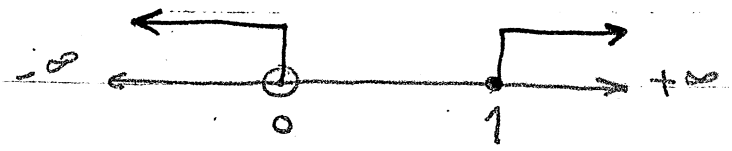
$\Rightarrow \frac{1+3x}{x} > 0$

$\Rightarrow 1+3x=0 \Rightarrow 3x=-1$

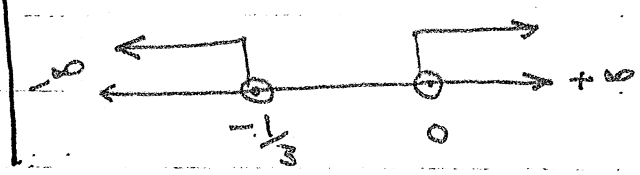
$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}}$, $\boxed{x=0}$

تمارين اضافية عن المتباينات

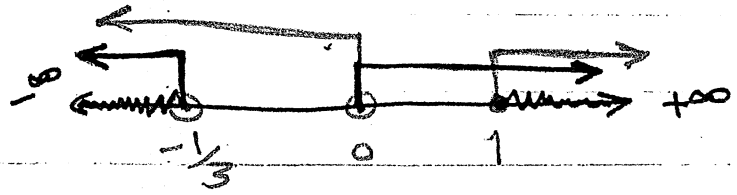
	$-\infty$	-4	0	0.5	1	2	$+\infty$
$1-x$		+		+	0	−	
x		−	0	+		+	
$\frac{1-x}{x}$		⊖	‖	+	0	⊖	



	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$1+3x$	−	0	+	
x	−	‖	+	
$\frac{1+3x}{x}$	⊕	‖	⊕	



(فترة التقاطع للحل) $\Rightarrow$



$$\Rightarrow \boxed{\int x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup [1, +\infty)}$$

⑩ $\frac{5}{7x} - \frac{5}{6} > \frac{1}{6x}$

$\Rightarrow \frac{5}{7x} - \frac{5}{6} - \frac{1}{6x} > 0$

$\Rightarrow \frac{5}{7x} - \frac{1}{6x} - \frac{5}{6} > 0$

$\Rightarrow \frac{30-7}{42x} - \frac{5}{6} > 0$ (نوحد المقام)

$\Rightarrow \frac{23}{42x} - \frac{5}{6} > 0$ (نوحد المقام)

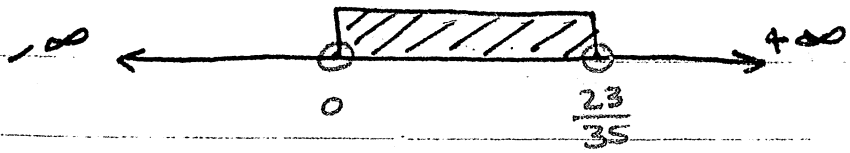
تمارين اضافية عن المتباينات

$$\Rightarrow \frac{23-35x}{42x} > 0 \quad ; \quad x \neq 0 \Rightarrow (\text{يجعل المقام} \neq \text{صفر})$$

$$\Rightarrow 23-35x=0 \Rightarrow 35x=23 \Rightarrow \boxed{x=\frac{23}{35}}$$

$$42x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

	$-\infty$		-1		0		0.2		$23/35$		2		$+\infty$
$23-35x$			$+$		$+$		$+$		0		$-$		
$42x$			$-$		0		$+$		$+$		$+$		
$\frac{23-35x}{42x}$			$-$		$\nexists$		$+$		0		$-$		



$$\Rightarrow \boxed{\therefore x \in \left(0, \frac{23}{35}\right)}$$

تمارين اضافية عن المتباينات

$$\frac{1-2x}{x} + 4 > 0$$

نوحد المقام:

$$\Rightarrow \frac{1-2x+4x}{x} > 0$$

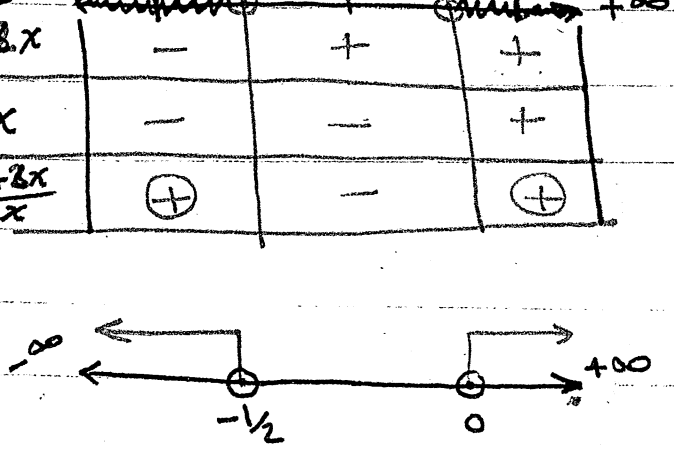
$$\Rightarrow \frac{1+2x}{x} > 0$$

$$\Rightarrow 1+2x = 0 \Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0}$$

	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	2	$+\infty$
$1+2x$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{1+2x}{x}$		$\oplus$	0	$-$	$\nexists$	$\oplus$	



$$\frac{1-2x}{x} - 4 < 0$$

نوحد المقام:

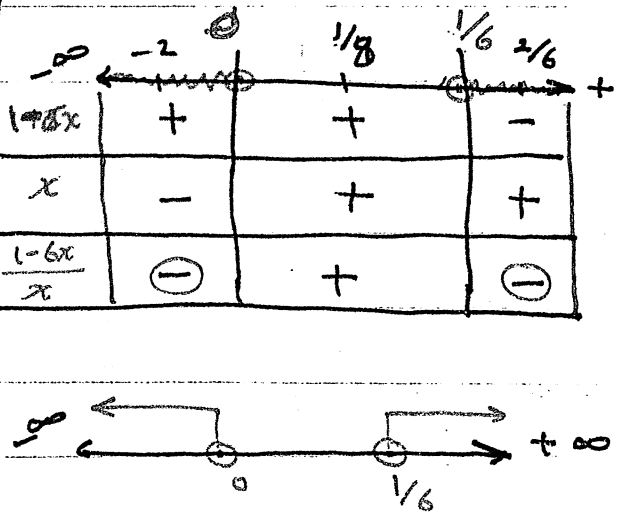
$$\Rightarrow \frac{1-2x-4x}{x} < 0$$

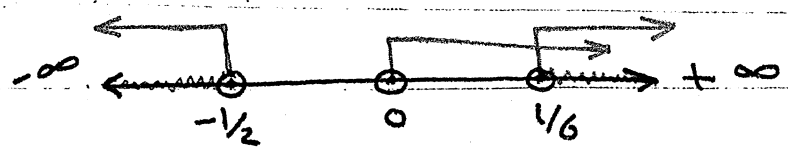
$$\Rightarrow \frac{1-6x}{x} < 0$$

$$\Rightarrow 1-6x = 0 \Rightarrow 6x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0}$$

	$-\infty$	-2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$+\infty$
$1-6x$		$+$	$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{1-6x}{x}$		$\ominus$	$\nexists$	$+$	0	$\ominus$





$$\Rightarrow \boxed{\int x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{6}, +\infty\right)} \quad \#$$

تمارين اضافية من معادلة الخط المستقيم

مثال: أوجد قيم (n) التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(1-2n, n)$ و $(n, 3n+1)$ أكبر من 4.

الحل:

$$m > 4$$

يمكن ايجاد الميل بدلالة نقطتين:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(3n+1) - n}{n - (1-2n)} = \boxed{\frac{2n+1}{3n-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{3n-1} > 4$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{3n-1} - 4 > 0$$

نوحد المقام:

$$\Rightarrow \frac{2n+1-4(3n-1)}{3n-1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1-12n+4}{3n-1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-10n+5}{3n-1} > 0$$

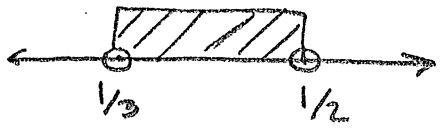
$$\Rightarrow -10n+5 = 0 \Rightarrow 10n = 5 \Rightarrow \boxed{n = \frac{1}{2}}$$

$$3n-1 = 0 \Rightarrow 3n = 1 \Rightarrow \boxed{n = \frac{1}{3}}$$

→ النقاط الحرجة

	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	0.4	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$-10n+5$		+	+	+	−		
$3n-1$		−	0	+	+		
$\frac{-10n+5}{3n-1}$		−	∄	+	0	−	

تمارين اضافية عن معادلة الخط المستقيم



$\Rightarrow \forall n \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

مثال1 : أوجد ميل المستقيم $(2x = 3 - 5y)$ و احداثيات نقطة تقاطعه مع محور y.

الحل:

نضع معادلة المستقيم على صورة $(y = mx + c)$ لان عندما تكون المعطيات نقطة تقاطعه مع محور (y) هي (c) و الميل (m) :

$$\Rightarrow y = mx + c$$

نرتب المعادلة على الصورة:

$$5y = -2x + 3 \qquad (\div 5)$$

$$y = \frac{-2}{5}x + \frac{3}{5}$$

$$y = m\,x + c$$

$$\therefore m = \frac{-2}{5} \quad , \quad c = \frac{3}{5}$$

احداثيات نقطة التقاطع هي: $(\overset{x}{0}, \overset{y}{\frac{3}{5}})$

مثال2 : أوجد قيمة العدد الحقيقي (a) الذي يجعل المسافة : $d(A,B) \geq \sqrt{26}$

حيث $A(\overset{x_1}{a}, \overset{y_1}{3})$ ، $B(\overset{x_2}{5}, \overset{y_2}{2a})$

الحل:

البعد $d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \geq \sqrt{26}$

التخلص من الجذر بتربيع الطرفين

تمارين إضافية عن معادلة الخط المستقيم

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(5-a)^2+(2a-3)^2}\right)^2 > \left(\sqrt{26}\right)^2$$

$$\Rightarrow (5-a)^2+(2a-3)^2 > 26$$

نقوم بتحليل مربع الحدانية :

$$\Rightarrow 25-10a+a^2+4a^2-12a+9 > 26$$

نجعل مقدار الجبري في طرف ونضع الطرف الآخر :

$$\Rightarrow a^2+4a^2-10a-12a+25+9-26 > 0$$

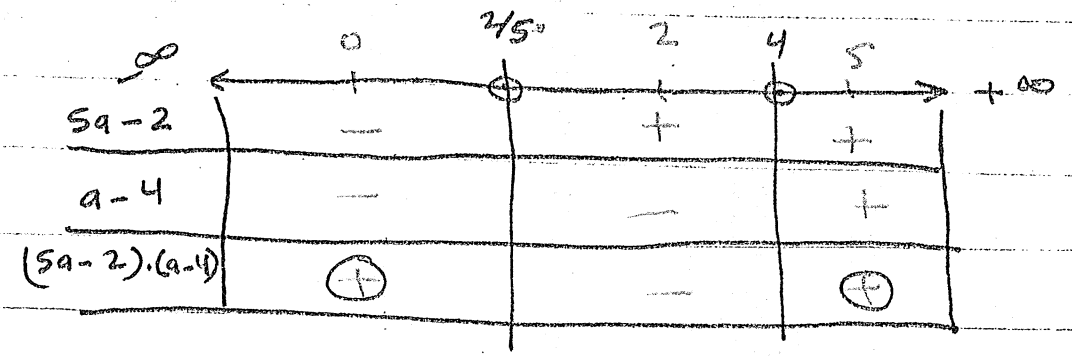
$$\Rightarrow 5a^2-22a+8 > 0$$

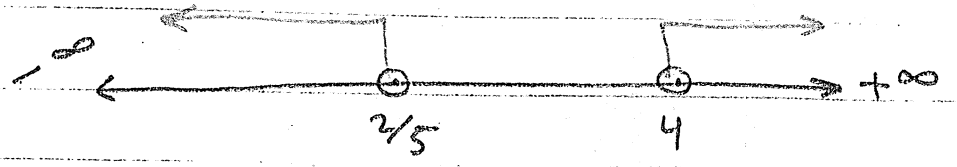
لاتحلل مربع كامل وبالتالي نقوم بالتحليل بالتجربة :

$$\Rightarrow (5a-2)(a-4) > 0$$

$$-2a$$
$$-2a$$
$$-22a$$ ✓

$$\Rightarrow 5a-2=0 \Rightarrow 5a=2 \Rightarrow \boxed{a=\frac{2}{5}}$$
$$a-4=0 \Rightarrow \boxed{a=4}$$





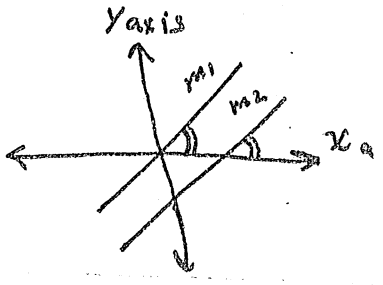
$$\Rightarrow a \in (-\infty, \tfrac{2}{5}) \cup (4, +\infty)$$

تمارين إضافية عن معادلة الخط المستقيم

مثال 4 : اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين $(\overset{x_1}{3}, \overset{y_1}{6})$ $(\overset{x_2}{5}, \overset{y_2}{7})$ يوازي المستقيم المار بالنقطتين $(3, 6)(5, 7)$

الحل :

$\because L_1 // L_2 \Rightarrow \boxed{m_1 = m_2}$



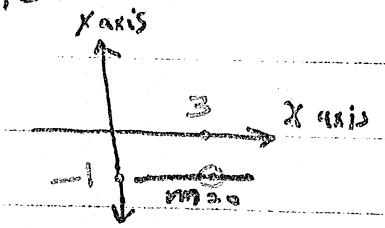
$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-6}{5-3} = \frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-7}{3-5} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ المستقيمان متوازيان

مثال 5 : أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $(\overset{x}{3}, \overset{y}{-1})$ وميله يساوي صفر .

الحل :



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$\frac{y-(-1)}{x-3} = 0 \Rightarrow y+1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

مثال 6 : ماهو العدد الحقيقي (k) الذي يجعل نقطة منتصف المسافة بين النقطتين $(\overset{x_2}{5}, \overset{y_2}{1})$ $(\overset{x_1}{-7}, \overset{y_1}{3})$ تقع على المستقيم : $kx + 2y = 7$.

الحل :

∵ نقطة منتصف المسافة يمكن ايجادها بالقانون :

$$(x, y) = \left(\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right), \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) \right)$$

تمارين إضافية عن معادلة الخط المستقيم

$$\Rightarrow (x,y) = \left(\frac{-7+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (-1, 2)$$

∴ النقطة $(-1, 2)$ تقع على المستقيم : $Kx + 2y = 7$ ، وبالتالي فهي تحققه ، وبالتعويض بقيمة (x, y) :

$$\therefore K(-1) + 2(2) = 7$$

$$-K + 4 = 7$$

$$\Rightarrow K = 4 - 7 = \boxed{-3}$$

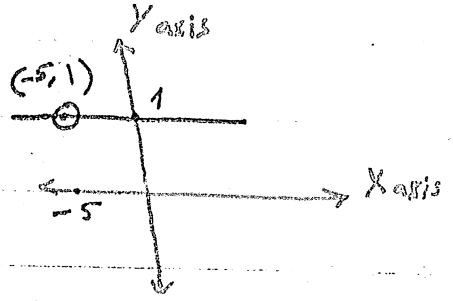
مثال : أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(\vec{i} - 5, \vec{j})$ وعمودي على محور y

الحل :

لكي يكون المستقيم عمودي على محور (y) فهو يوازي محور (x) بالضرورة.

∴ المستقيم يوازي محور (x) ويمر بالنقطة $(-5, 1)$ وبالتالي :

$$\boxed{y = 1}$$



والتأكد منها :

بحيث سيكون إيجاد نقطة تقاطعه مع y : $(0, 1)$ و $(-5, 1)$ ← (معطى بالمسألة)

(الميل) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-1}{0+5} = \frac{0}{5} = 0$ ← لأنه يقطع (y)

للتحقق غير مطلوب من الإجابة

$\therefore y = mx + c \Rightarrow y = (0)x + (1)$

صفر

$\Rightarrow \boxed{y = 1}$

m ← ميل (0) ، c ← الجزء المقطوع من (y)

تمارين إضافية عن معادلة الخط المستقيم
Straight line

مثال 8 : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (1, 4) ويصنع زاوية قدرها 60° مع محور السينات الموجب.

الحل :

$$\theta = 60^\circ \Rightarrow m = \tan\theta = \tan(60) = \boxed{\sqrt{3}}$$

$$\because \frac{y_2 - y_1}{x - x_1} = m$$

$$\Rightarrow \frac{y-4}{x-1} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y - 4 = \sqrt{3}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} + 4}$$

مثال 9 : إذا كانت النقطة $(2^{x_1}, K^{y_1})$ تقع على المستقيم الذي ميله يساوي 3 ويمر بالنقطة $(1^{x_2}, 6^{y_2})$ أوجد قيمة (K).

الحل :

$$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow 3 = \frac{6-K}{1-2}$$

$$\Rightarrow 3(1-2) = 6 - K$$

$$\Rightarrow 3 - 6 = 6 - K \Rightarrow -3 = 6 - K$$

$$\Rightarrow K = 6 + 3 = \boxed{9}$$

مثال 10 : اوجد قيمة الثابت (a) الذي يجعل المستقيم المار بالنقطتين A(-1, 2) ، B(1, 5) ويوازي المستقيم $(x + 2y + 3 + a(3x + 4y + 5) = 0)$.

الحل :

$$\because L_1 // L_2 \Rightarrow m_1 = m_2$$

ميل المستقيم = ميل المستقيم الموازي

تمارين إضافية عن معادلة الخط المستقيم

$$L_2 \Rightarrow x + 2y + 3 + 3ax + 4ay + 5a = 0$$

نرتب الحدود المتشابهة:

$$\Rightarrow x + 3ax + 2y + 4ay + 3 + 5a = 0$$

$$\Rightarrow x(1+3a) + y(2+4a) + 3 + 5a = 0$$

∴ المعادلة على الصورة العامة:

$$\text{(ميل الموازي)} \Rightarrow m_2 = \frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-(1+3a)}{(2+4a)} = \boxed{\frac{-1-3a}{2+4a}}$$

$$\because m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{1-(-1)} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{-1-3a}{2+4a}$$

$$\Rightarrow 2(-1-3a) = 3(2+4a)$$

$$\Rightarrow -2-6a = 6+12a$$

$$\Rightarrow -2-6 = 12a+6a$$

$$\Rightarrow -8 = 18a$$

$$\Rightarrow a = \frac{-8}{18} = \boxed{\frac{-4}{9}}$$

مثال 11: أوجد كافة قيم (r) التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(\overset{x_1}{1}, \overset{y_1}{3-2r})$ و $(\overset{x_2}{r}, \overset{y_2}{5})$ أقل من 5.

الحل:

نوجد الميل: m (الميل) $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(3-2r)}{r-1}$

$$\Rightarrow = \frac{5-3+2r}{r-1} = \boxed{\frac{2+2r}{r-1}}$$

تمارين إضافية عن معادلة الخط المستقيم

$$\frac{2+2r}{r-1} < 5 \Rightarrow \frac{2+2r}{r-1} - 5 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2+2r-5(r-1)}{r-1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2+2r-5r+5}{r-1} < 0$$

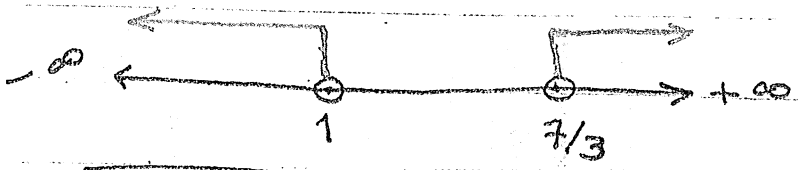
$$\Rightarrow \frac{7-3r}{r-1} < 0$$

$$\Rightarrow 7-3r=0 \Rightarrow 3r=7 \Rightarrow \boxed{r=\frac{7}{3}}$$

$$\Rightarrow r-1=0 \Rightarrow \boxed{r=1}$$

← النقاط الحرجة

	$-\infty$	0	1	2	$7/3$	5	$+\infty$
$7-3r$		+		+		−	
$r-1$		−		+		+	
$\frac{7-3r}{r-1}$		(−)		+		(−)	



$$\Rightarrow \boxed{\int r \in (-\infty, 1) \cup (7/3, +\infty)} \quad //$$

Sheet (تمارين 03)

تمارين إضافية عن الدوال

السؤال : أوجد نطاق الدوال الآتية :

① $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^3-27}$

$\Rightarrow x^3 - 27 = 0$

$(x-3)(x^2+3x+9) = 0$

$x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$

$x^2+3x+9 \neq 0$ (غير ممكن دائما أكبر من الصفر)

$\boxed{D: x \in \mathbb{R}/\{3\}}$

② $\dfrac{3x+1}{x^2-5x+6}$

$\Rightarrow x^2-5x+6=0$

$(x-3)(x-2)=0$

$x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$

$x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$\therefore D: x \in \mathbb{R}/\{3,2\}$

③ $f(x) = \dfrac{3x+1}{|x-2|}$

$\Rightarrow |x-2| = 0$

$x-2 = \pm 0$

$\Rightarrow \boxed{x=2}$

$\boxed{D: x \in \mathbb{R}/\{2\}}$

④ $f(x) = \dfrac{3x+1}{|x+1|-3}$

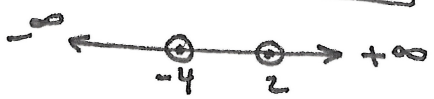
$\Rightarrow |x+1| - 3 = 0$

$x+1 = \pm 3$

$x+1=3 \quad x+1=-3$

$x=3-1 \quad x=-3-1$

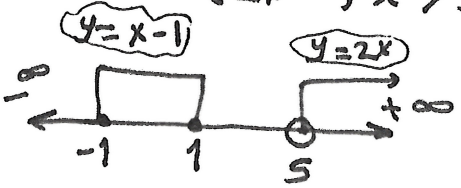
$\boxed{x=2} \quad \boxed{x=-4}$



$\Rightarrow D: x \in (-\infty,+\infty)/\{-4,2\}$

أو : $\boxed{x \in \mathbb{R}/\{-4,2\}}$

⑤ $f(x) = \begin{cases} x-1 & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & ; x > 5 \end{cases}$



$\Rightarrow D: x \in [-1,1] \cup (5,+\infty)$

⑥ $f(x) = \sqrt{x+2} + 2\sqrt{4-x}$

هذه الدالة من دالتين وبالتالي نقوم بتقسيمها إلى دالتين :

$h(x) = \sqrt{x+2}$; $r(x) = 2\sqrt{4-x}$

أولا : نوجد نطاق الدالة ($h(x)$) :

$h(x) = \sqrt{x+2}$

دالة جذرية : $x+2 \geq 0$

$x \geq -2$

ثانيا : نطاق الدالة $[r(x)]$:

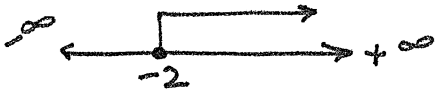
$r(x) = 2\sqrt{4-x}$

$4-x \geq 0$

$x \leq 4$

$D: x \in (-\infty, 4]$

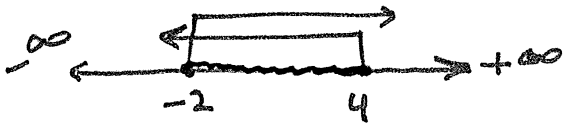
تمارين إضافية عن الدوال



$D: x \in [-2, +\infty)$

∴ نطاق الدالة $f(x)$:

$D_f = D_r \cap D_h$



$D_{f(x)}$: $\boxed{x \in [-2, 4]}$

⑦. $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{2x+3}{x-5}$

نقسم الدالة إلى دالتين:

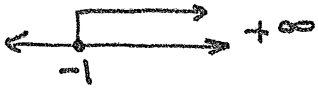
$p(x) = \sqrt{x+1}$ ، $g(x) = \frac{2x+3}{x-5}$

أولا: نوجد نطاق الدالة $p(x)$:

$p(x) = \sqrt{x+1}$

$\Rightarrow x+1 \geq 0$

$x \geq -1$



∴ $D_{p(x)}$: $x \in [-1, +\infty)$

ثانيا: نوجد نطاق الدالة $g(x)$:

$g(x) = \frac{2x+3}{x-5}$

$\Rightarrow x-5 = 0 \Rightarrow \boxed{x=5}$

∴ $D_{g(x)}$: $x \in \mathbb{R}/\{5\}$

∴ نطاق الدالة $f(x)$:

$D_f = D_p \cap D_g$

$\Rightarrow \boxed{D_f: x \in [-1, +\infty) \cap x \neq 5}$

or: $x \in [-1, 5) \cup (5, +\infty)$

⑧. $f(x) = \frac{2x+1}{(x-2)\cdot\sqrt{x-5}}$

يمكن تقسيم الدالة إلى دالتين للتبسيط:

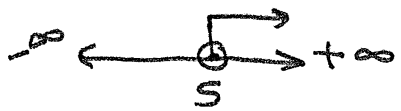
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}} \cdot \frac{2x+1}{(x-2)}$

$R(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$; $S(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

أولا: نوجد نطاق الدالة $R(x)$:

$R(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$

$\Rightarrow x-5 \geq 0 \Rightarrow x > 5$



D_R: $x \in (5, +\infty)$

ثانيا: نوجد نطاق الدالة $S(x)$:

$S(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

$x-2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

D_S: $x \in (-\infty, +\infty)/\{2\}$

∴ نطاق الدالة $f(x)$:

$D_f = D_R \cap D_S$

$\boxed{D_f: x \in (5, +\infty)}$

9). $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-5}{\sqrt{x-2}-3}$

Domain ①:

$\sqrt{x+1}$: $x+1\geq 0$

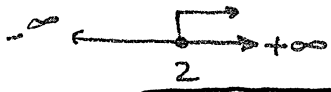
$\Rightarrow x\geq -1$

$D_1: x\in[-1,+\infty)$

Domain ②:

$\sqrt{x-2}$: $x-2\geq 0$

$\Rightarrow x\geq 2$



$D_2: x\in[2,+\infty)$

Domain ③:

$(\sqrt{x-2})-3=0$

$(\sqrt{x-2})^2=(3)^2$ بالتربيع

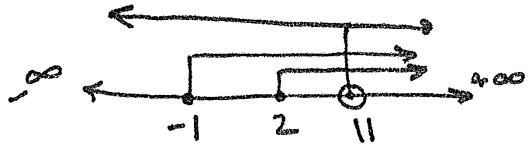
$x-2=9$

$x=9+2=\{11\}$

$D_3: x\in[2,+\infty)$

∴ نطاق الدالة $f(x)$:

$D_f=D_1\cap D_2\cap D_3$



$D_f: x\in[2,+\infty)/\{11\}$

or: $x\in[2,11)\cup(11,+\infty)$

10). $f(x)=\sqrt{5+\sqrt{x-1}}$

Domain ①:

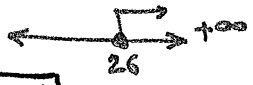
$\Rightarrow 5+\sqrt{x-1}\geq 0$

$\sqrt{x-1}\geq -5$ بالتربيع

$x-1\geq 25$

$x\geq 25+1$

$x\geq 26$

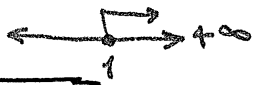


$D_1: x\in[26,+\infty)$

Domain ②:

$\sqrt{x-1}$: $x-1\geq 0$

$x\geq 1$



$D_2: x\in[1,+\infty)$

Domain ③:

$\sqrt{x-1}\geq -5$

$D_3: x\in[-5,+\infty)$

∴ نطاق الدالة $f(x)$:

$D_f=D_1\cap D_2\cap D_3$

$\therefore D_f: x\in[26,+\infty)$

11). $f(x)=(x^2-x-2)^{3/2}$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{(x^2-x-2)^3}$ ← يمكن تحويلها إلى دالة جذرية

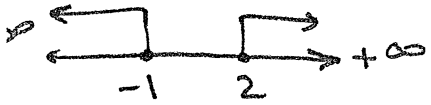
∴ دالة جذرية ونطاقها:

$x^2-x-2\geq 0$

$(x-2)(x+1)\geq 0$

$x=2$; $x=-1$

تمارين إضافية عن الدوال



$D: x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

السؤال 2 : أوجد تركيب الدوال التالية :

① $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \sqrt{1-x}$

$fog = ??$, $gof = ??$

sol:

$(Fog)_x = f(g(x))_x$

$= \sqrt{(\sqrt{1-x})} = (\sqrt{1-x})^{1/2}$

$(Fog)_x = ((1-x)^{1/2})^{1/2} = \boxed{(1-x)^{1/4}}$

$\downarrow$

$\boxed{\sqrt[4]{(1-x)}}$

$(gof)_x = g(f(x))_x$

$= \sqrt{1-(\sqrt{x})}$

$= (1-(\sqrt{x}))^{1/2}$

$= (1-(x)^{1/2})^{1/2}$

$\therefore (gof)_x = \sqrt{1-\sqrt{x}}$

---

② $f(x) = \sqrt{x-3}$; $g(x) = \frac{1}{x-1}$

$(fog)_x = ??$, $(gof)_x = ??$

sol:

$(fog)_x = f(g(x))_x$

$= \sqrt{(\frac{1}{x-1}) - 3}$

$(fog)_x = \sqrt{\frac{1-3x+3}{x-1}} = \boxed{\sqrt{\frac{4-3x}{x-1}}}$

$(gof)_x = \frac{1}{(\sqrt{x-3})-1}$

$\boxed{(gof)_x = \frac{1}{-1+\sqrt{x-3}}}$

---

③ $F(x) = x^2$; $Fog = (1+x)^2$

sol: أوجد $g(x)$ ؟

$\therefore (Fog)_x = F(g(x))_x$

$(1+x)^2 = x^2$

$(1+x)^2 = (g(x))^2$ بأخذ الجذر التربيعي

$\Rightarrow (1+x) = \pm g(x)$

$\Rightarrow g(x) = +(1+x) = \boxed{1+x}$

$\Rightarrow g(x) = -(1+x) = \boxed{-1-x}$

---

④ $f(x) = \sqrt{x-1}$; $Fog = x^2$

sol: أوجد $g(x)$ ؟

$\therefore (Fog)_x = f(g(x))_x$

$x^2 = \sqrt{(g(x))-1}$ بالتربيع:

$\Rightarrow x^4 = g(x) - 1$

$\Rightarrow \boxed{g(x) = x^4 + 1}$

تمارين إضافية عن الدوال

⑤. $f(x) = \frac{1-2x}{x-4}$, $fog = 2x$

أوجد $g(x)$ ؟

Sol:

$$(fog)_x = f(g(x))_x$$

$$2x = \frac{1-2(g(x))}{(g(x))-4}$$

$$\Rightarrow 1-2(g(x)) = 2x(g(x)) - 8x$$

$$2x(g(x)) + 2(g(x)) = 1 + 8x$$

$$g(x)[2x+2] = 1+8x$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = \frac{1+8x}{2x+2}}$$

⑥. $(fog)_x = \sqrt{(x-3)(x+2)}$

أوجد: $f(x)$ ، $g(x)$ ؟

Sol:

لإيجاد الحل في هذا النوع من المسائل لابد أن نقوم بوضع فرضية كالتالي:

نفرض: $\boxed{\begin{matrix} f(x) = fog(x) \\ g(x) = x \end{matrix}}$ إذا كان معطى fog نفرض $f(x) = fog$

$$\Rightarrow \therefore f(x) = (fog)_x = \sqrt{(x-3)(x+2)}$$

$$\underline{\underline{g(x) = x}}$$

وللتأكد من صحة الفرضية:

$$(fog)_x = f(g(x))_x$$

$$= \sqrt{((g(x))-3)+((g(x))+2)}$$

$$(fog)_x = \sqrt{((x)-3)+((x)+2)}$$

⑦. $(Fog)_x = 2x - 3$; $g(x) = x+1$

أوجد $f(x)$ ؟

Sol:

لإيجاد $f(x)$ يجب أن نلغي تأثير $g(x)$ على $(Fog)_x$ فيصبح تأثير $f(x)$ فقط كالتالي:

$$F(x) = (Fog)_x \circ \bar{g}^1(x)$$

تلغي تأثير الدالة $g(x)$ فتبقى الدالة المطلوبة $f(x)$

وبالتالي نوجد أولا الدالة $\bar{g}^1(x)$:

$\because g(x) = x+1$

$y = x+1$

$x = y+1$

$\Rightarrow y = x-1$

$\therefore \boxed{\bar{g}^1(x) = x-1}$

$\therefore (Fog)_x \circ \bar{g}^1(x) = Fog(\bar{g}^1(x))_x$

$F(x) = 2(x-1) - 3$

$F(x) = 2x - 2 - 3$

$\boxed{F(x) = 2x - 5}$

تمارين إضافية عن الدوال

$K(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & ;x<0\\ \sqrt{x} & ;x\geq 0\end{cases}$; $h(x)=\begin{cases}x^2 & ;x\geq 0\\ x^3 & ;x<0\end{cases}$; $g(x)=7$; $f(x)=4$ إذا كانت ⑧.

فأوجد كل من : $[(fog)_x\ ,\ (gof)_x\ ,\ (hog)_x\ ,\ (goh)_x\ ,\ (hok)_x]$

الحل:

① $(fog)_x = f(g(x))_x = f(7)_x = \boxed{4}$

② $(gof)_x = g(f(x))_x = g(4)_x = \boxed{7}$

③ $(hog)_x = h(g(x))_x = h(7)_x = x^2 = (7)^2 = \boxed{49}$

④ $(goh)_x = g(h(x))_x = \boxed{7}$

⑤ $(hok)_x = h(k(x))_x = h\left(\begin{cases}-\sqrt{-x} & ;x<0\\ \sqrt{x} & ;x\geq 0\end{cases}\right) = \boxed{\begin{cases}x & ;x\geq 0\\ -x^3 & ;x<0\end{cases}}$

ملاحظات مهمة عن مسائل الدوال التركيبية :

① - إذا كان معطى في المسألة الدالة التركيبية $(Fog)_x$ والدالة $f(x)$ (الدالة الأولى في التركيب) ومطلوب إيجاد الدالة $g(x)$ فيمكن إيجادها بالتعويض في الدالة $f(x)$ بالدالة $g(x)$ مباشرة وإيجادها

$$\because \underbrace{(Fog)_x}_{\text{معطى}} = F\left(\underbrace{g(x)}_{\text{نعوضها بما في الدالة } f(x)}\right)_x$$

وعكس أن يكون العكس صحيح إذا كان معطى الدالة $g(x)$ (الدالة الأولى في التركيب) ومعطى الدالة التركيبية $(gof)_x$

$$\because \underbrace{(gof)_x}_{\text{معطى}} = g\left(\underbrace{f(x)}_{\text{نعوضها بما في الدالة } g(x)}\right)_x$$

② - إذا كان معطى في المسألة الدالة التركيبية $(Fog)_x$ والدالة $g(x)$ (الدالة الثانية في التركيب) ومطلوب إيجاد الدالة $f(x)$

$$\therefore \boxed{F(x) = (Fog)_x \circ \bar{g}(x)}$$

والسبب في ذلك بإدخال الدالة $\bar{g}(x)$ تلغى تأثير الدالة $g(x)$ في التركيب $(Fog)_x$ ويبقى تأثير الدالة $F(x)$ فقط وهو المطلوب إيجاده.

تمارين إضافية عن الدوال

الدالة الثانية في التركيب

ويكون العكس صحيح إذا كان معطى الدالة التركيبية $(gof)_x$ والدالة $f(x)$ ومطلوب إيجاد $g(x)$

$$\therefore \boxed{g(x) = (gof)_x \circ f^{-1}(x)}$$

والسبب في ذلك بإدخال الدالة $f^{-1}(x)$ في التركيب $(gof)_x$ تلغى تأثير الدالة $f(x)$ ويبقى تأثير $g(x)$ فقط وهو المطلوب إيجاده.

③. إذا كان في المسألة معطى الدالة التركيبية $(fog)_x$ أو الدالة التركيبية $(gof)_x$ ومطلوب إيجاد الدوال: $g(x)$ ، $f(x)$ ، يتم حل هذه المسائل بفرض كالتالي:

إذا كان معطى $\Rightarrow (fog)_x \Rightarrow$ نفرض $f(x) = (fog)_x$ ، $g(x) = x$

إذا كان معطى $\Rightarrow (gof)_x \Rightarrow$ نفرض $g(x) = (gof)_x$ ، $f(x) = x$

السؤال 3 : المطلوب إيجاد الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ للدوال التالية:

① $f(x) = \dfrac{x+4}{2x-5}$

sol:

$$y = \frac{x+4}{2x-5}$$

$\Rightarrow x = \dfrac{y+4}{2y-5}$ (نستبدل x مكان y و y مكان x)

$\Rightarrow y+4 = x(2y-5)$

$y+4 = 2xy - 5x$

$y - 2xy = -5x - 4$

$y(1-2x) = -5x - 4$

$\Rightarrow \boxed{y = \dfrac{-5x-4}{1-2x} = f^{-1}(x)}$

② $f(x) = (x^3+8)^{1/5} - 1$

sol:

$$y = (x^3+8)^{1/5} - 1$$

نستبدل مكان x بـ y ومكان y بـ x:

$\Rightarrow x = (y^3+8)^{1/5} - 1$

نأخذ أس (5) لكل أطراف:

$(x+1)^5 = \left((y^3+8)^{1/5}\right)^5$

$(x+1)^5 = y^3 + 8$

$\Rightarrow y^3 = (x+1)^5 - 8$

$\Rightarrow y = [(x+1)^5 - 8]^{1/3}$

$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = [(x+1)^5 - 8]^{1/3}}$

Sheet (تمارين 03)

تمارين إضافية عن الدوال

السؤال الرابع: حدد ما إذا كانت الدوال التالية زوجية أو فردية أو حيادية :

① $f(x) = \sqrt[5]{x + \frac{1}{x}}$

$\Rightarrow f(-x) = \sqrt[5]{(-x) + \frac{1}{-x}}$

$f(-x) = \sqrt[5]{-x - \frac{1}{x}} \neq f(x)$

$f(-x) = \sqrt[5]{-(x + \frac{1}{x})} = -\sqrt[5]{x + \frac{1}{x}} = -f(x)$

∴ الدالة فردية (odd function)

حل آخر: $f(x) = \sqrt[5]{(odd) + \frac{(even)}{(odd)}}$

$f(x) = \sqrt[5]{(odd) + (odd)}$

$f(x) = odd$ فردية

② $f(x) = |x| + x \sin(2x)$

$\Rightarrow f(-x) = |-x| + (-x)\sin(-2x)$

$f(-x) = |x| + x\sin(2x) = f(x)$

∴ الدالة زوجية (even function)

حل آخر: $f(x) = (even) + (odd)(odd)$

$f(x) = even + even = even$

∴ الدالة زوجية (even function)

Sheet (تمارين 03)

ع.ع 101

تمارين إضافية عن الدوال

③. $y.\sec(x) - x^2 - \sin^2(x) + \cos^3(x) = 0$

$\Rightarrow y.\sec(-x) - (-x)^2 - \sin^2(-x) + \cos^3(x) = 0$

$\Rightarrow y.\sec(x) - x^2 - \sin^2(x) + \cos^3(x) = 0 \quad = f(x)$

ـ الدالة زوجية (even function)

حل آخر: $y.\sec(x) - x^2 - \sin^2(x) + \cos^3(x) = 0$

$[even \cdot even] - (even) - (odd \cdot odd) + (even \cdot even \cdot even) = (even)$

$(even) - (even) - (even) + (even) = even$

ـ الدالة زوجية even function

Sheet (٥٤ تمارين)

تمارين إضافية عن النهايات والاتصال

السؤال الأول : أوجد قيمة كل من النهايات التالية :

① $\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x^4-a^4}$

لا يمكن الحل بالتعويض لأن المقام يساوي صفر

بالتحليل $\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x^2-a^2)(x^2+a^2)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2-ax+a^2)}{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{x^2+ax+a^2}{(x+a)(x^2+a^2)} = \frac{(a)^2+a(a)+a^2}{[(a)+a][a^2+a^2]} = \frac{3a^2}{(2a)(2a^2)}$$

$$= \frac{3a^2}{4a^3} = \boxed{\frac{3}{4a}}$$

② $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^2-2}}$

لا يمكن التعويض المباشر يجعل المقام صفر

$\Rightarrow$ نقسم البسط والمقام على x^2 :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^4}-\frac{2}{x^4}}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^4}}}$$

$$= \frac{3+\frac{2}{\infty^2}}{\sqrt{\frac{1}{\infty^2}-\frac{2}{\infty^4}}} = \frac{3+0}{\sqrt{0-0}} = \frac{3}{0} = \boxed{\infty}$$

③ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$

نضرب بمرافق البسط :

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x} \cdot \frac{\sqrt{3+x}\oplus\sqrt{3}}{\sqrt{3+x}\oplus\sqrt{3}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{3+x-3}{x\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}$$

تمارين إضافية عن النهايات والاتصال

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3+0}+\sqrt{3}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

④. $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x+7\sqrt{x}}$

لإمكانية التعويض المباشر نقوم بالتحليل !

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2x \longrightarrow = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+7\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+7\right)}$$

عامل مشترك

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+7} = \frac{2\sqrt{0}}{\sqrt{0}+7} = \frac{0}{7} = \boxed{0}$$

⑤. $\lim_{x\to 8} (x^2-8)^0$

« يجب اعتبار أي أساس أسه صفر يساوي 1 »

$$\Rightarrow \lim_{x\to 8} 1 = \boxed{1}$$

⑥. $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}$

التعويض المباشر يجعل المقام صفر

نوحد المقامات $\Rightarrow \lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\frac{3+x}{3x}} \Rightarrow \lim_{x\to -3} \frac{3x(x+3)}{3+x}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -3} 3x = 3(-3) = \boxed{-9}$$

تمارين إضافية عن النهايات والاتصال

⑦. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right)$

نوحد المقامات:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} x+1 = (1)+1 = \boxed{2}$$

⑧. $\lim_{h\to 0}\frac{(g+h)^{-1}-g^{-1}}{h}$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g+h}-\frac{1}{g}}{h} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\frac{g-(g+h)}{g(g+h)}}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{g-g-h}{gh(g+h)} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{-h}{gh(g+h)} = \frac{-1}{g^2+gh}$$

$$= \frac{-1}{g^2+g(0)} = \boxed{-\frac{1}{g^2}}$$

⑨. $\lim_{\theta\to -2}\frac{\theta^3+8}{\theta^4-16}$

$$\Rightarrow \lim_{\theta\to -2}\frac{(\theta+2)(\theta^2-2\theta+4)}{(\theta^2-4)(\theta^2+4)} \Rightarrow \lim_{\theta\to -2}\frac{(\theta+2)(\theta^2-2\theta+4)}{(\theta+2)(\theta-2)(\theta^2+4)}$$

$$\Rightarrow \lim_{\theta\to -2}\frac{\theta^2-2\theta+4}{(\theta-2)(\theta^2+4)} = \frac{(-2)^2-2(-2)+4}{(-2-2)((-2)^2+4)} = \frac{4+4+4}{(-4)(8)}$$

$$\Rightarrow = \boxed{\frac{12}{-32}} = \boxed{-\frac{3}{8}}$$

تمارين إضافية عن النهايات والاتصال

⑩. $\lim_{r\to -3} \dfrac{r^2+2r-3}{r^2+7r+12}$

نقوم بالتحليل:

$$\Rightarrow \lim_{r\to -3} \frac{(r+3)(r-1)}{(r+4)(r+3)} \Rightarrow \lim_{r\to -3} \frac{r-1}{r+4}$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to -3} \frac{(-3)-1}{(-3)+4} = \frac{-4}{1} = \boxed{-4}$$

⑪. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{x^2-x}$

نقوم بالضرب في مرافق البسط:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{x^2-x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}\oplus\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}\oplus\sqrt{2x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)-2x}{(x^2-x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{-(-1+x)}{x(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})} = \frac{-1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{2(1)})}$$

$$\Rightarrow = \frac{-1}{(1)(\sqrt{(1)+1}+2\sqrt{1})} = \frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{2(1)}} = \boxed{\frac{-1}{2\sqrt{2}}}$$

⑫. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5}{x^2 \cdot \csc^2 x}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{5}{x^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{5\sin^2 x}{x^2}$$

تمارين إضافية عن النهايات والاتصال

$$\Rightarrow \quad = 5 \lim_{x \to 0} (1)^2 = \boxed{5}$$

(13). $$\lim_{x \to 3} \frac{\tan(x-3)}{x^3-27}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3} \frac{\tan(x-3)}{(x-3)(x^2+3x+9)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3} \frac{1}{x^2+3x+9} = \frac{1}{(3)^2+3(3)+9} = \frac{1}{9+9+9} = \boxed{\frac{1}{27}}$$

(14). $$\lim_{x \to 16} \frac{x-16}{2-\sqrt[4]{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 16} \frac{x-16}{2-(x)^{1/4}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 16} \frac{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}{2-x^{1/4}} \Rightarrow \lim_{x \to 16} \frac{(\sqrt{x}+4)(x^{1/4}+2)(x^{1/4}-2)}{-(2-x^{1/4})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 16} \frac{(x^{1/2}+4)(x^{1/4}+2)}{-1}$$

$$= -\left[(16)^{1/2}+4\right]\left[(16)^{1/4}+2\right] = -(4+4)(2+2)$$

$$= \boxed{-32}$$

Sheet (04 تمارين)

تمارين إضافية عن النهايات والاتصال

السؤال الثاني: بين هل الدوال التالية لها نهاية موجودة أو لا:

① $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 0 \\ x^2 & ; x < 0 \end{cases}$

sol:

$$\lim_{x \to 0^+} 2x+1 = 2(0)+1 = 0+1 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 = (0)^2 = \boxed{0}$$

∴ النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار

∴ النهاية غير موجودة

② $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x > 0 \\ \cos x & ; x \leq 0 \end{cases}$

sol:

$$\lim_{x \to 0^+} x+1 = 0+1 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \cos x = \cos(0) = \boxed{1}$$

∴ النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

∴ النهاية موجودة

السؤال الثالث: حدد هل الدالة التالية مستمرة أو لا:

① $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

نوجد نطاق الدالة:

$D: \quad x^2-1 > 0$

$(x-1)(x+1) > 0$

$\boxed{x=1}$; $\boxed{x=-1}$

$D: x \in \mathbb{R} / \{-1, 1\}$

∴ الدالة تكون مستمرة ضمن النطاق

② $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2} & ; x \neq -2 \\ 2 & ; x = -2 \end{cases}$

نوجد نهاية الدالة عندما $\boxed{x=-2}$:

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{|x+2|}{x+2} = \frac{+(x+2)}{x+2} = \boxed{+1}$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{|x+2|}{x+2} = \frac{-(x+2)}{x+2} = \boxed{-1}$$

$+1 \neq -1$

∴ النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار

$f(a) = \boxed{-2}$

∴ الدالة غير مستمرة عندما $\boxed{x=-2}$