



كلية الهندسة - جامعة مصراتة

القسم العام

رياضة "2"

الشيت السادس

أ. عُمَرُ علي بن ساسي

تطبيقات على التفاضل

٢٤

① المساحات :

لايجاد المساحة المحصورة بين منحنى اي دالة واحد محور

الاحداثيات أو بين منحنيين . تتبع هذه الخطوات :

• نوجد نقاط تقاطع المنحنى مع محور الاحداثيات او مع منحنى آخر .

• نجزئ المساحة المحصورة إلى عدة مساحات حسب حدود التفاضل .

• اذا لانا نقاط تقع خارج المنحنيين الأفقيين أو الرأسيين نعين إحمالها .

• اذا وجد منحنيان أفقيين أو رأسيين فإنهما يدخلان ضمن حدود التفاضل .

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

شريحة رأسية

$$A_{\pm} = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots$$

$$A = \int_a^b (f(y) - g(y)) dy$$

شريحة أفقية

ملاحظة : مراعات $f(x) \leftarrow$ المنحنى الأعلى
 $g(x) \leftarrow$ المنحنى الأسفل

$f(y) \leftarrow$ المنحنى اليمين
 $g(y) \leftarrow$ المنحنى اليسار

① $y = x^2 - 4$, $y = 3x$.

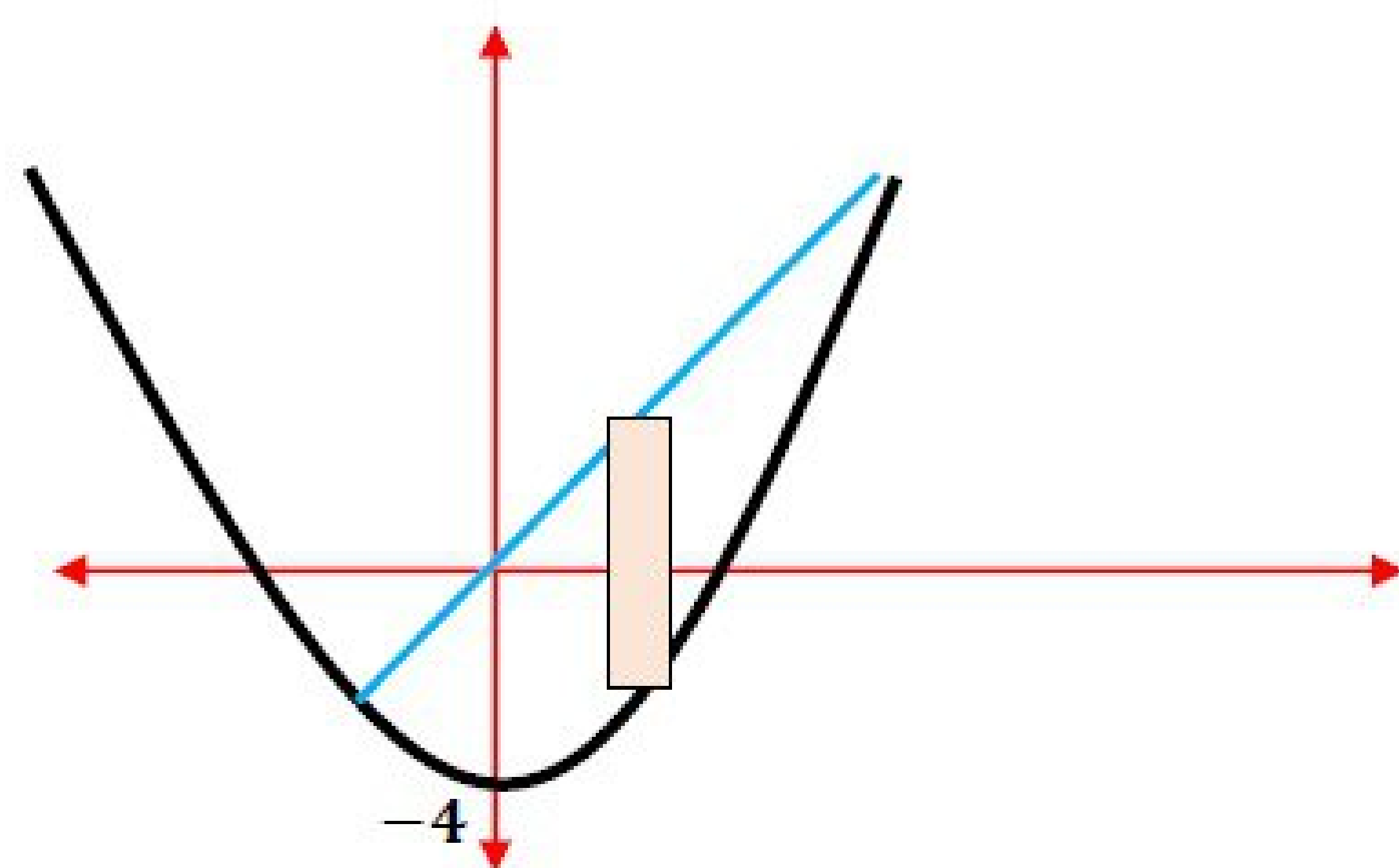
$f(x) = 3x$, $g(x) = x^2 - 4$.

$x^2 - 4 = 3x \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$.

$x_1 = 4$, $x_2 = -1$

$A = \int_{-1}^4 [3x - (x^2 - 4)] dx$.

$A = \left. \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 4x \right|_{-1}^4 = \boxed{\frac{125}{6}}$ مساحت



② $x = y^2 + 1$, $y = x - 3$.

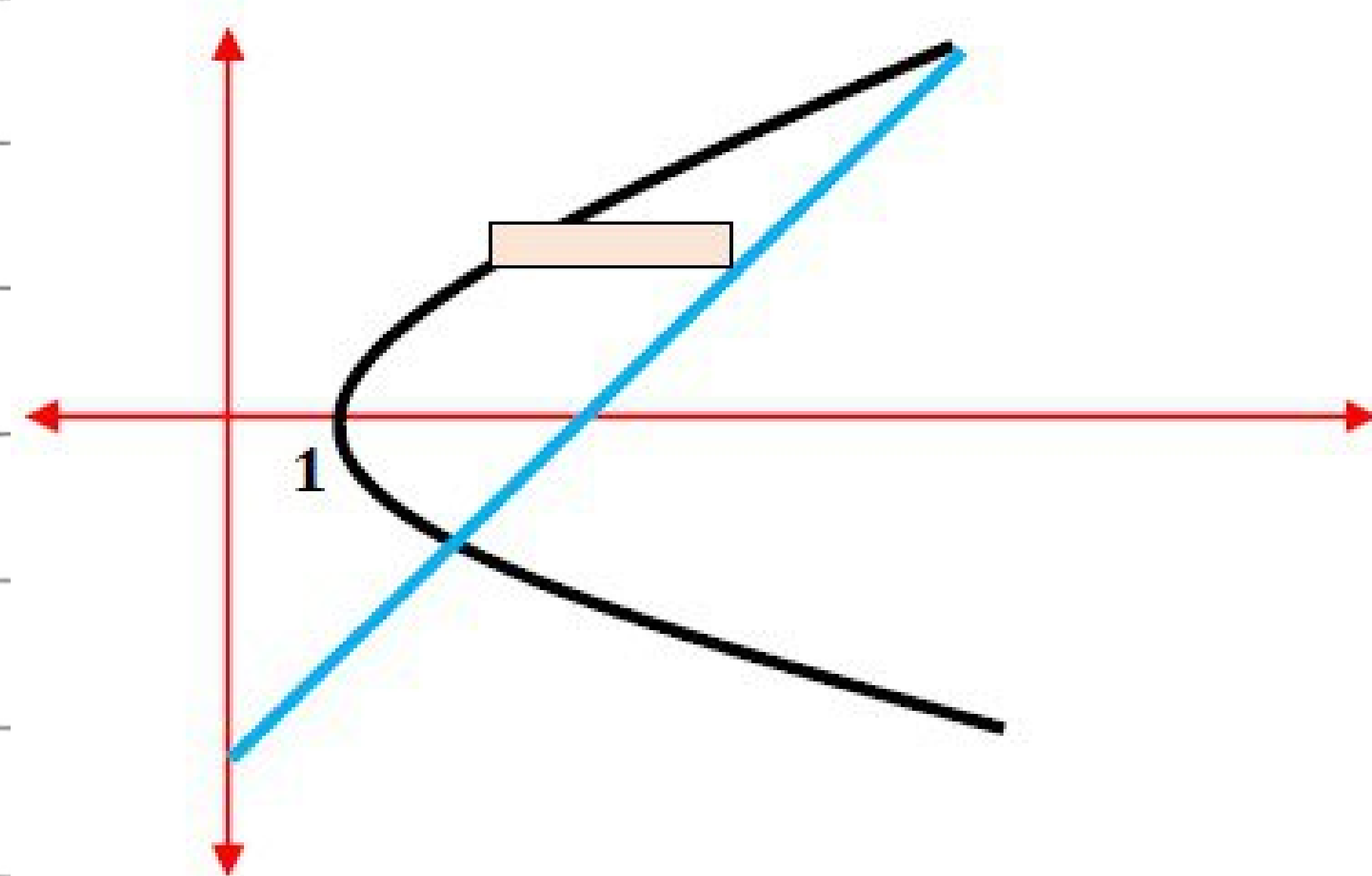
$f(y) = y + 3$, $g(y) = y^2 + 1$

$y^2 + 1 = y + 3 \rightarrow y^2 - y - 2 = 0$.

$y_1 = -1$, $y_2 = 2$

$A = \int_{-1}^2 [(y + 3) - (y^2 + 1)] dy$.

$A = \left. \frac{y^2}{2} + 3y - \frac{y^3}{3} + y \right|_{-1}^2 \rightarrow \left. -\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 4y \right|_{-1}^2 = \boxed{\frac{9}{2}}$ مساحت

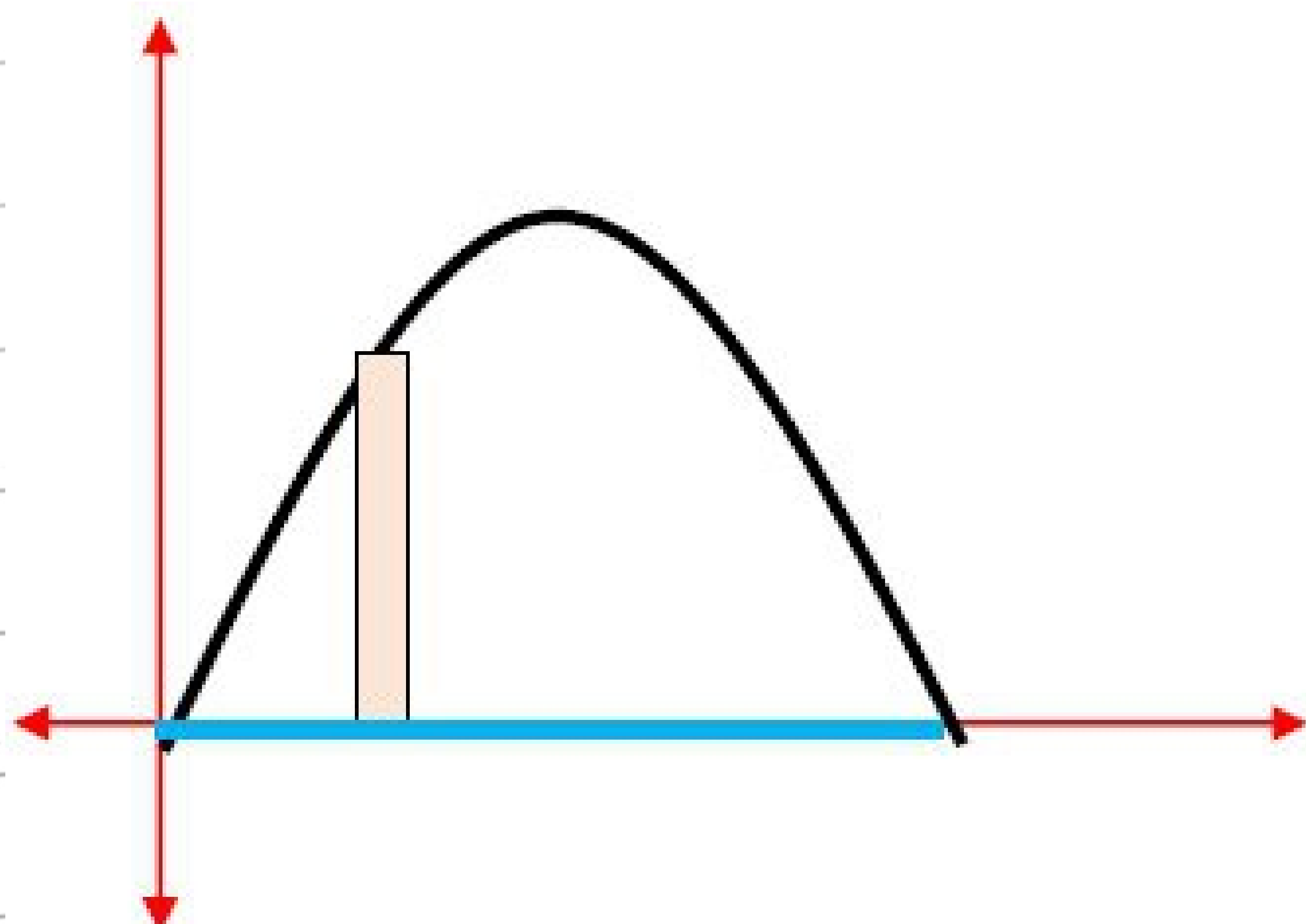


$$\textcircled{3} \quad y = \sin x, \quad x \in [0, \pi]$$

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = 0.$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \pi.$$

$$A = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos x \Big|_0^{\pi}$$



$$A = (-\cos(0)) - (-\cos(\pi)) = \boxed{2}$$

$$\textcircled{4} \quad x = y^2, \quad y = x^2.$$

$$x = y^2 \rightarrow y = \pm \sqrt{x}.$$

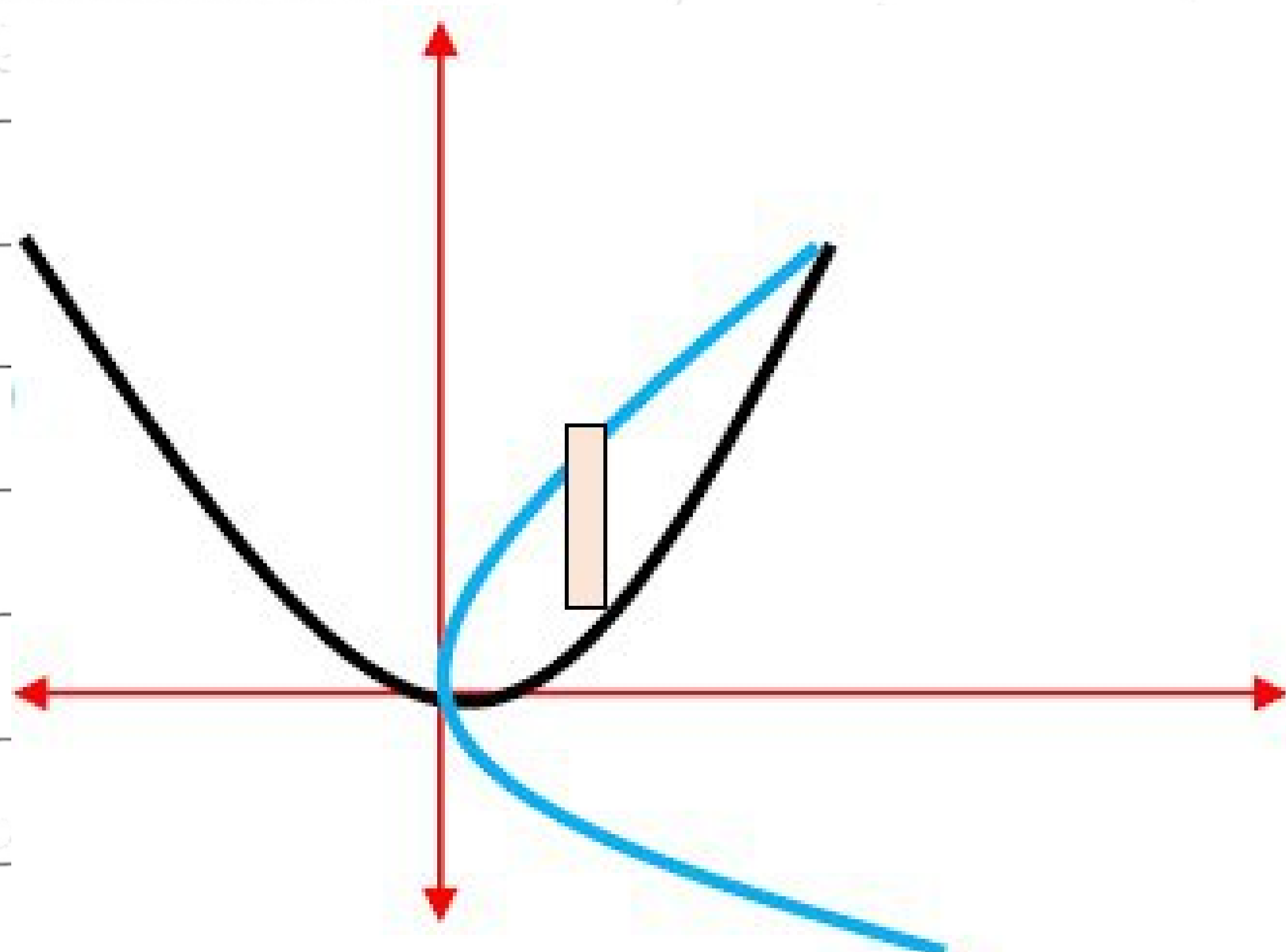
$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2.$$

$$x^2 = \sqrt{x} \rightarrow x^4 = x$$

$$x(x^3 - 1) = 0.$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$$



$$A = \left. \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right|_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

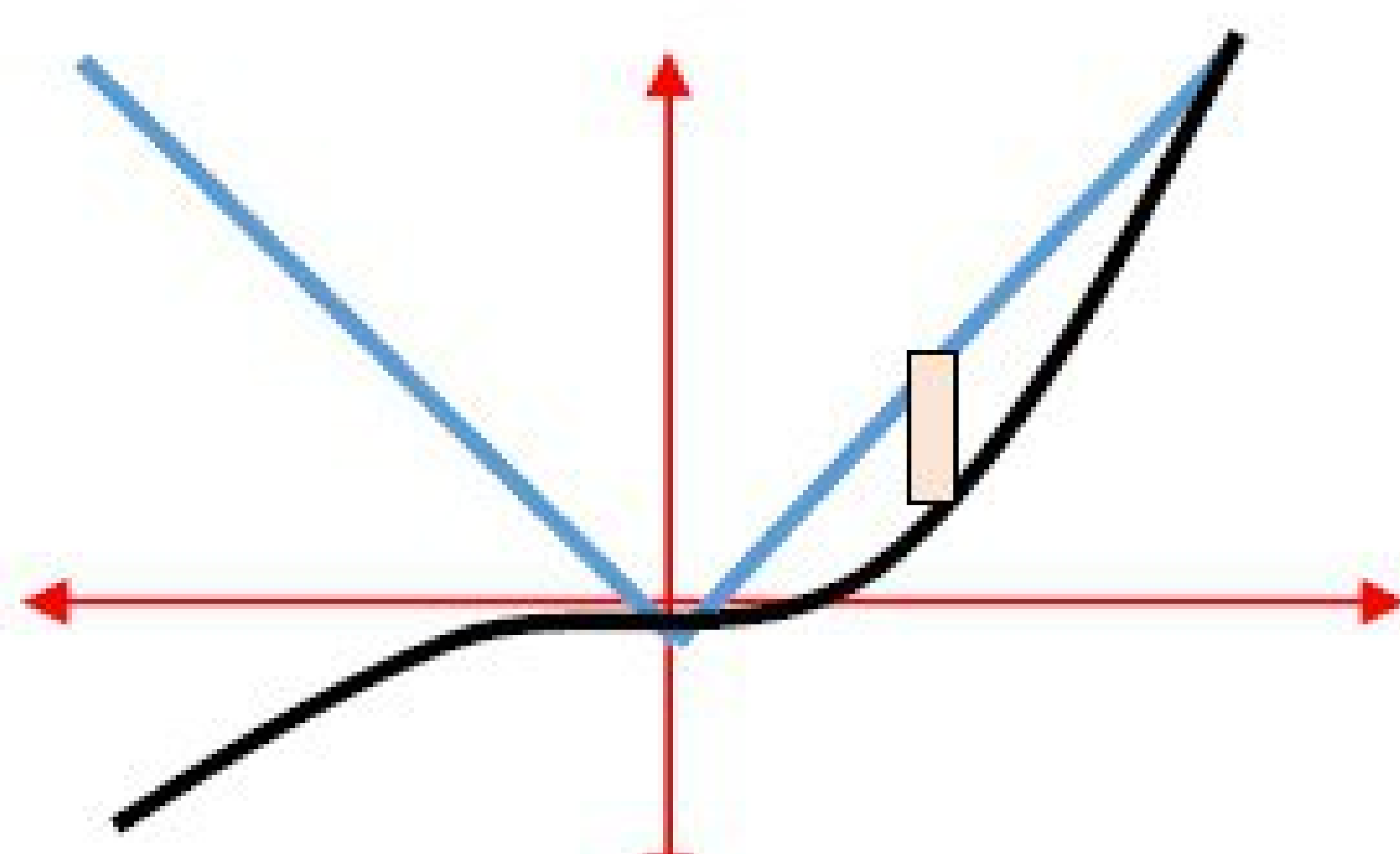
⑤ $y = |x|$, $y = x^3$.

$f(x) = x$, $g(x) = x^3$

$x = x^3 \rightarrow x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0$.

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$A = \int_0^1 (x - x^3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$



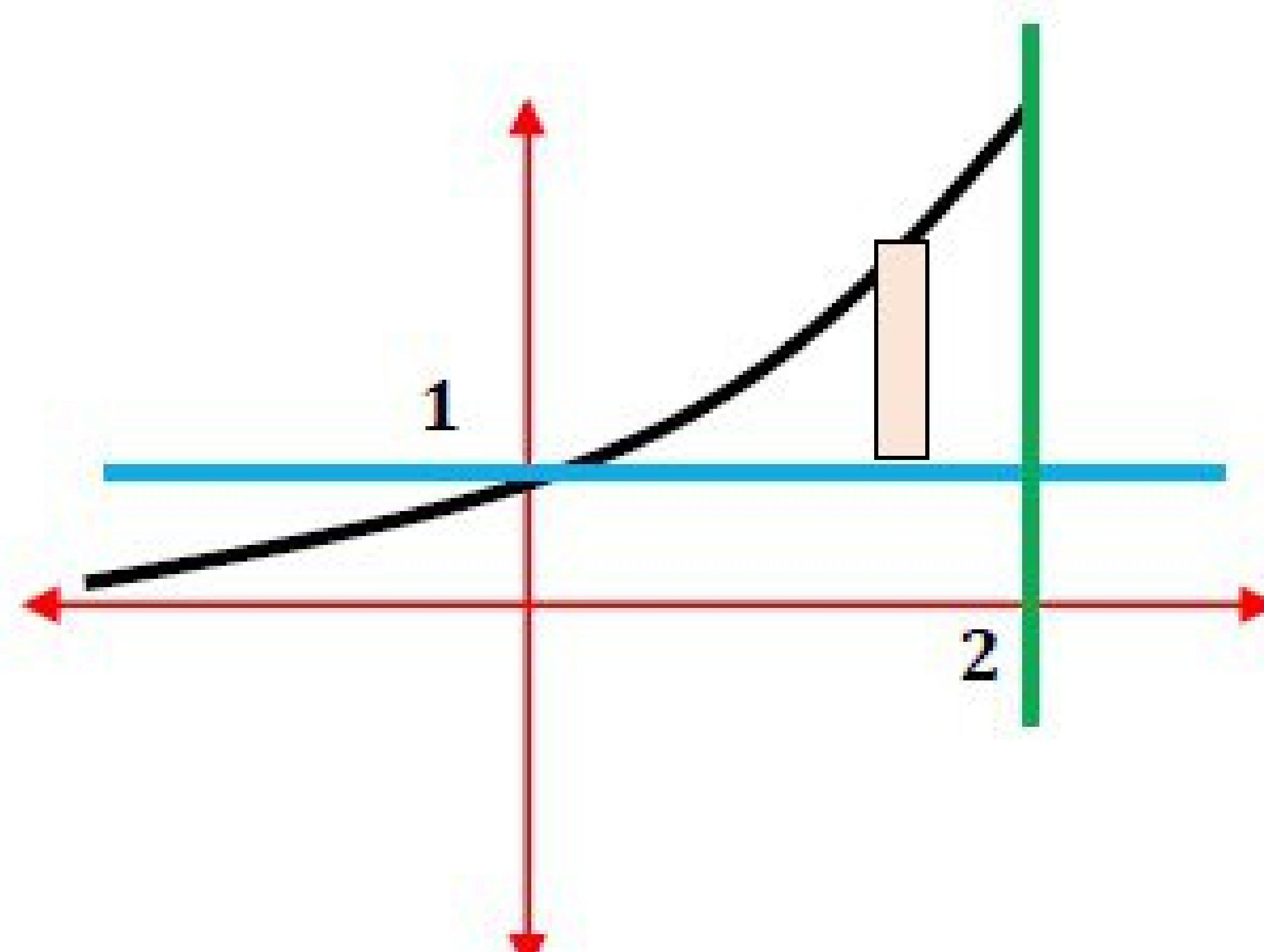
⑥ $y = e^{2x}$, $y = 1$, $x = 2$.

$f(x) = e^{2x}$, $g(x) = 1$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$

$A = \int_0^2 (e^{2x} - 1) dx$

$A = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - x \right]_0^2 = \frac{e^4}{2} - \frac{5}{2}$

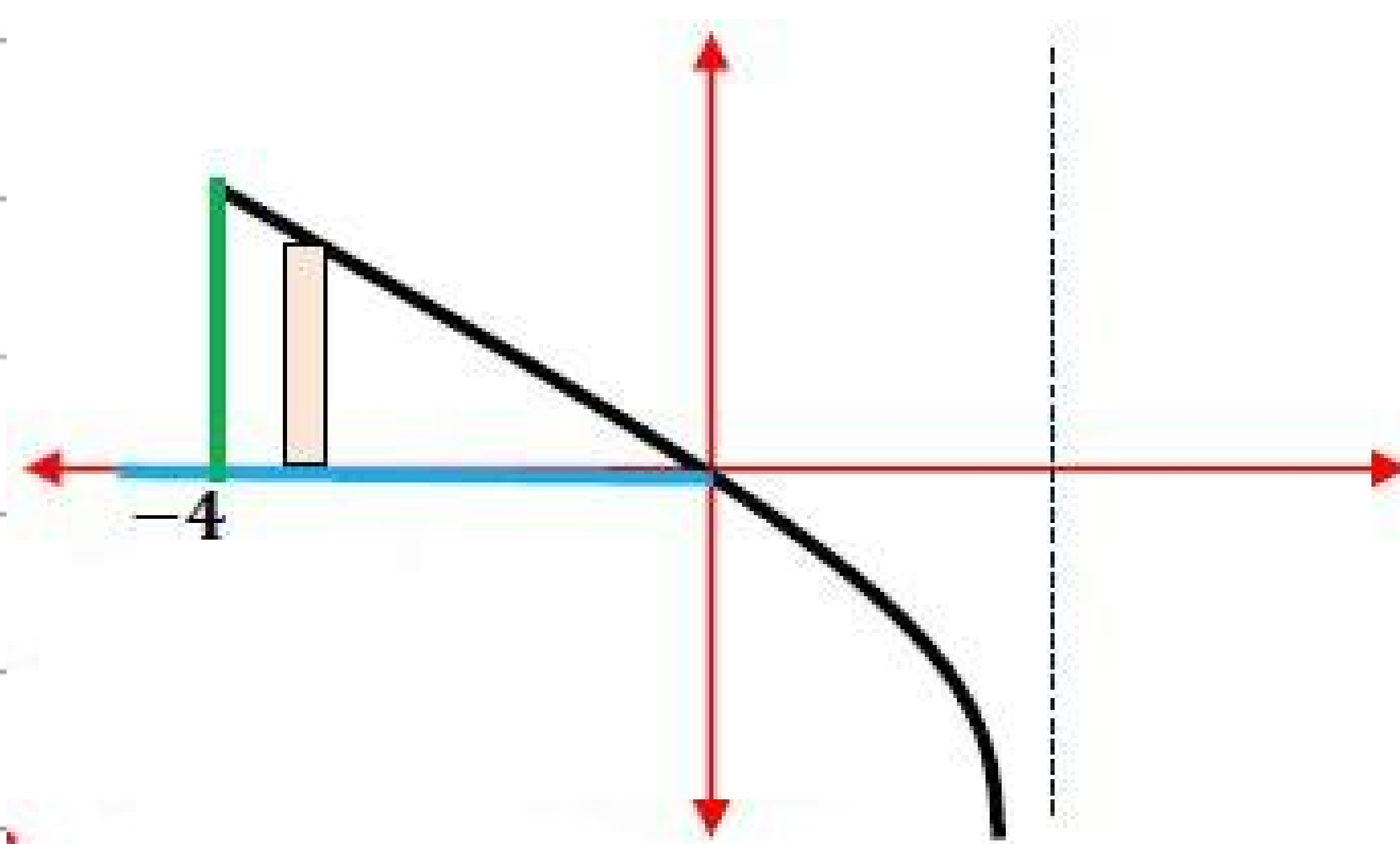


⑦ $y = \ln(1-x)$, $y = 0$, $x = -4$

$f(x) = \ln(1-x)$, $g(x) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = -4$

$A = \int_{-4}^0 (\ln|1-x| - 0) dx$



$$A = \int_{-4}^0 (\ln|1-x| - 0) dx$$

بالجزئة

$$u = \ln|1-x| \rightarrow du = \frac{-1}{1-x} dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$A = x \ln(1-x) - x - (\ln(1-x)) \Big|_{-4}^0$$

$$A = (5 \ln(5) - 4) \text{ وحدة مربعة}$$

⑧ $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin x = \cos x \rightarrow \tan x = 1$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$A_1: f(x) = \cos(x), g(x) = \sin(x)$$

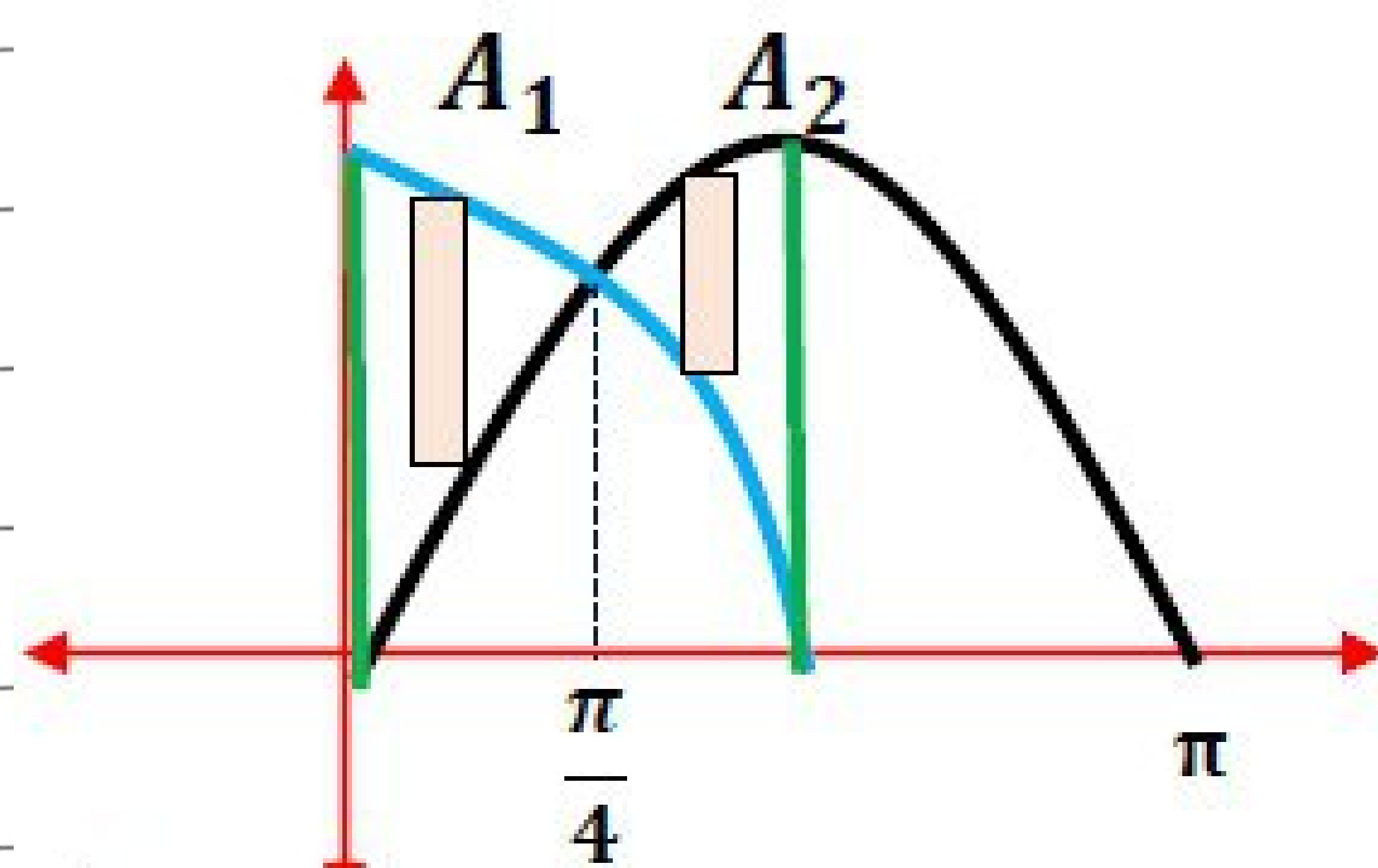
$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$A_1 = \sin x + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2} - 1) \text{ وحدة مربعة}$$

$$A_2: f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x)$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$$

$$A_2 = -\cos x - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = (\sqrt{2} - 1) \text{ وحدة مربعة}$$



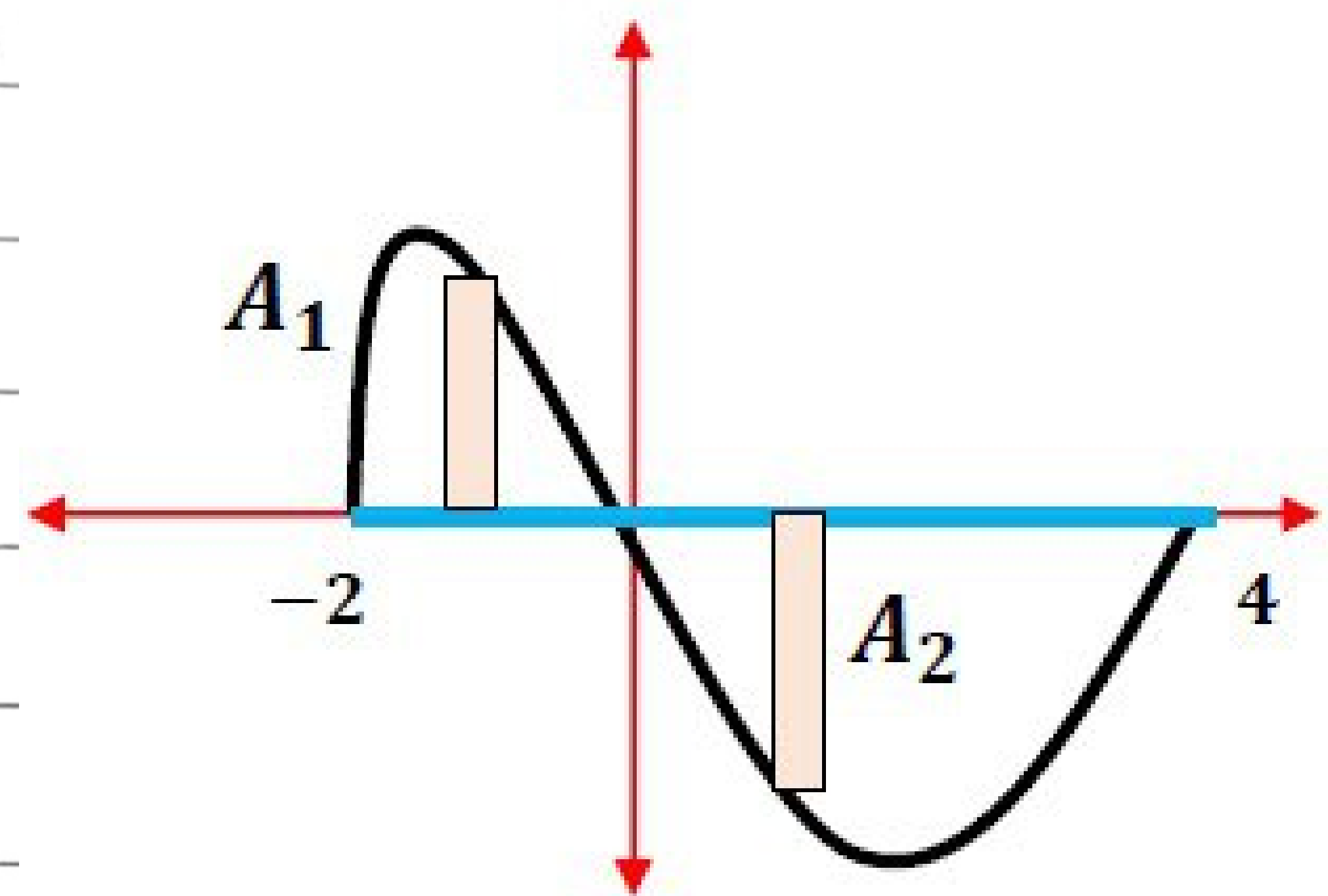
$$A_t = A_1 + A_2 = \boxed{2(\sqrt{2}-1)} \text{ وحدة مربعة}$$

⑨ $y = x^3 - 2x^2 - 8x, y=0.$

$$x^3 - 2x^2 - 8x = 0.$$

$$x(x^2 - 2x - 8) = 0.$$

$$x = 0, -2, 4$$



$$A_1 \rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x, g(x) = 0.$$

$$x_1 = -2, x_2 = 0.$$

$$A_1 = \int_{-2}^0 (x^3 - 2x^2 - 8x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 4x^2 \right]_{-2}^0$$

$$A_1 = \boxed{\frac{20}{3}} \text{ وحدة مربعة}$$

$$A_2 \rightarrow f(x) = 0, g(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4.$$

$$A_2 = \int_0^4 -(x^3 - 2x^2 - 8x) dx = -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 4x^2 \right) \Big|_0^4$$

$$A_2 = \boxed{\frac{128}{3}} \text{ وحدة مربعة}$$

$$A_t = A_1 + A_2 = \frac{20}{3} + \frac{128}{3} = \boxed{\frac{148}{3}} \text{ وحدة مربعة}$$

⑩ $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = e$

$x = \ln|y|$, $x = -\ln|y|$.

$f(y) = \ln|y|$, $g(y) = -\ln|y|$.

$y_1 = 1$, $y_2 = e$.

$A = \int_1^e (\ln y + \ln y) dy$.

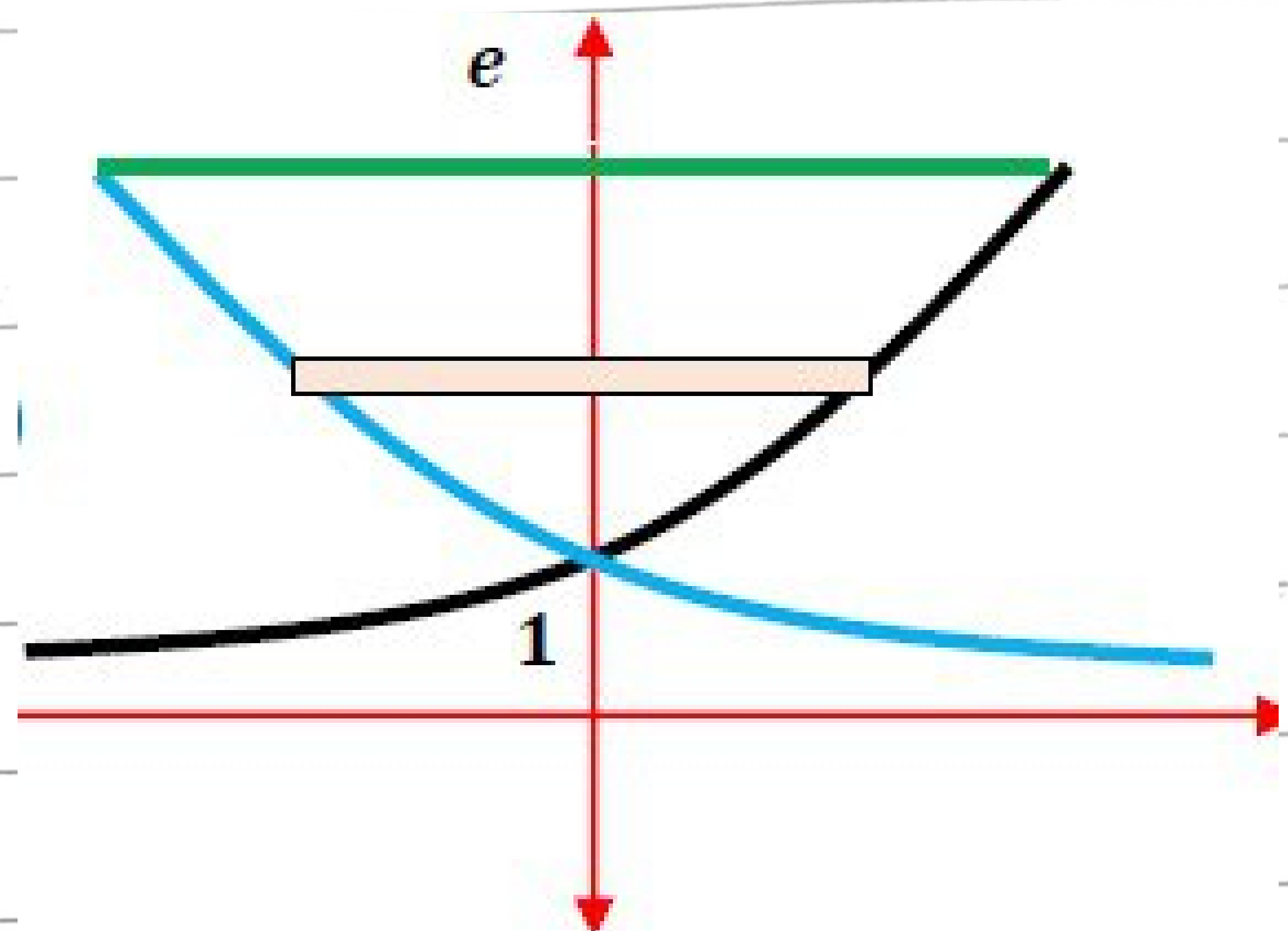
$A = \int_1^e 2 \ln|y| dy$.

$u = 2 \ln y \rightarrow du = \frac{2}{y} dy$

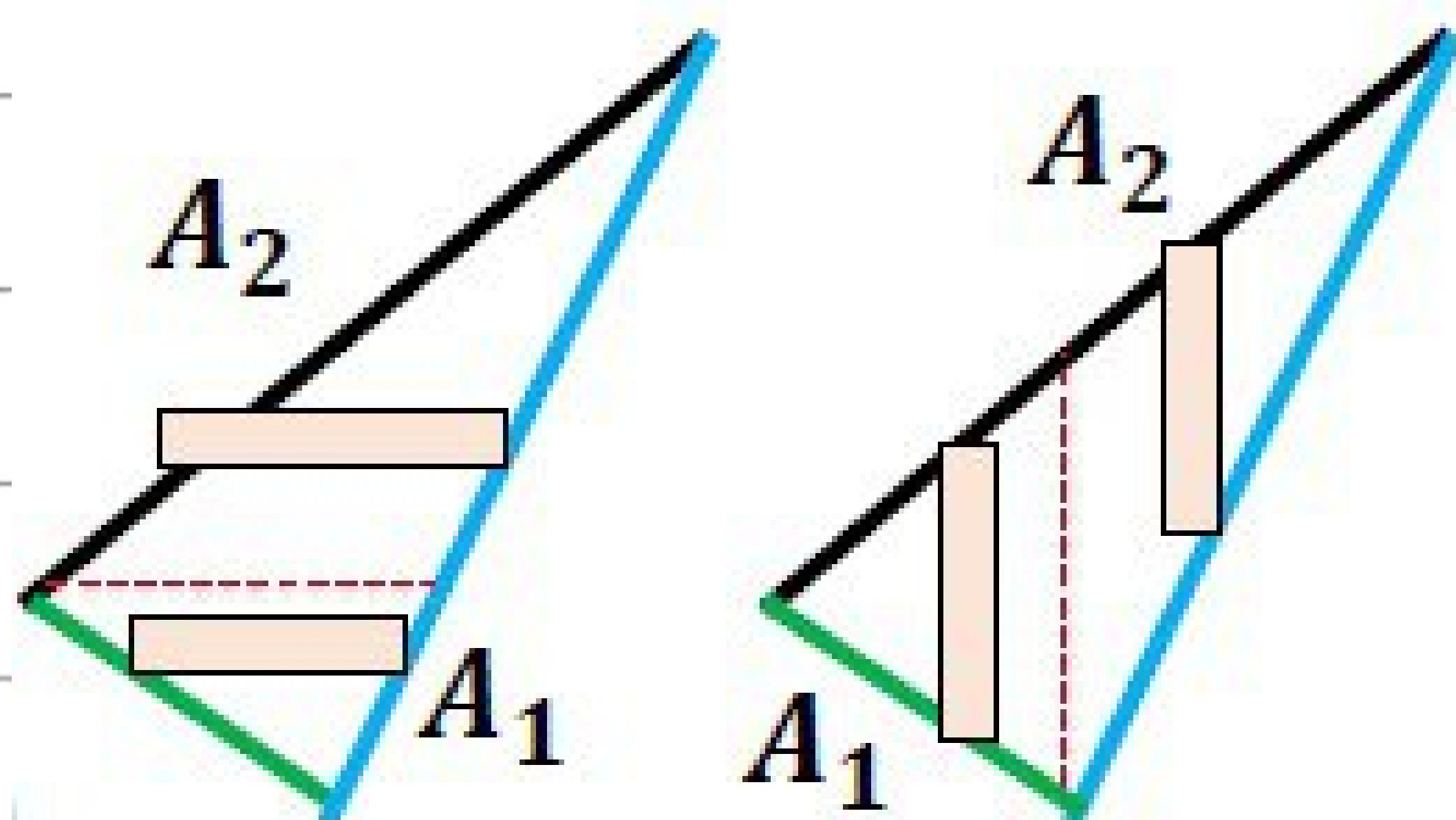
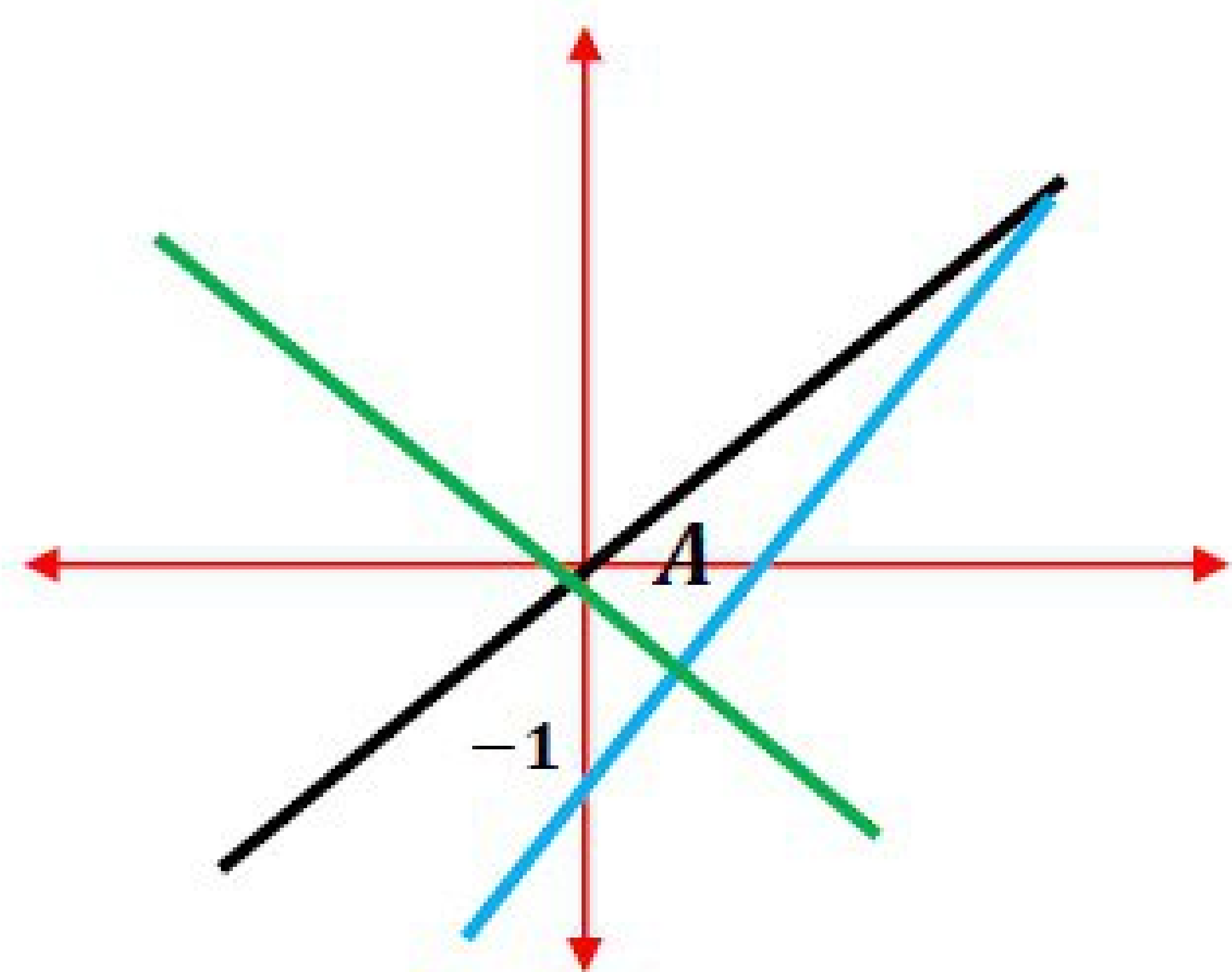
$dv = dy \rightarrow v = y$

$A = 2y \ln y \Big|_1^e - 2 \int_1^e dy$

$A = (2y \ln y - 2y) \Big|_1^e = [2]$ وحدة مساحة



⑪ $y = x$, $y = 2x$, $y = -x$



$A_1 \Rightarrow$

$$f(x) = x, g(x) = -x.$$

الحالة الأولى: الفصل باستخدام خط رأسي:

الحد الثاني ينحني من يساري

$$x_1 = 0. \quad \text{الحد الأول.}$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \quad \text{الحد الثاني}$$

$$2x - 1 = -x$$

$$3x = 1 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

نقطة التقاطع

$$A_1 = \int_0^{\frac{1}{3}} (x + x) dx = x^2 \Big|_0^{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{1}{9}} \text{ وحدة مربعة}$$

$$A_2 \rightarrow f(x) = x, g(x) = 2x - 1$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad \text{الحد الأول}$$

$$x_2 = 1. \quad \text{الحد الثاني}$$

الحد الثاني A_2 من يساري

$$2x - 1 = x$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$A_2 = \int_{\frac{1}{3}}^1 (x - 2x + 1) dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 (-x + 1) dx$$

$$A_2 = -\frac{x^2}{2} + x \Big|_{\frac{1}{3}}^1 = \boxed{\frac{2}{9}} \text{ وحدة مربعة}$$

$$A_f = A_1 + A_2$$

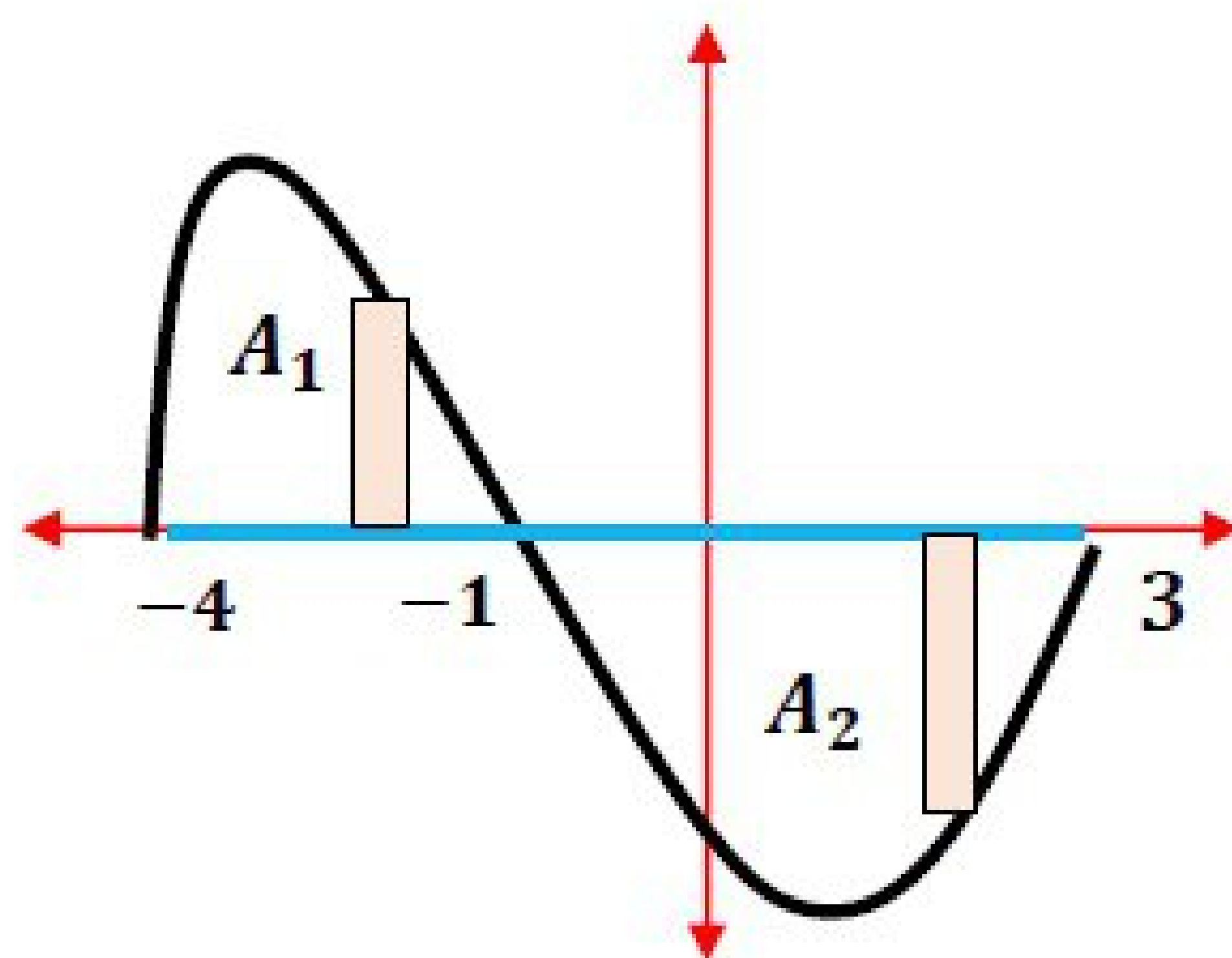
$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}} \text{ وحدة مربعة}$$

$$(12) \quad y = x^3 + 2x^2 - 11x - 12, \quad y = 0.$$

$$x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0.$$

$$(x+1)(x+4)(x-3) = 0.$$

$$x = -1, -4, 3$$



$$A_1 \rightarrow f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12, \quad g(x) = 0.$$

$$x_1 = -4, \quad x_2 = -1$$

$$A_1 = \int_{-4}^{-1} (x^3 + 2x^2 - 11x - 12) dx.$$

$$A_1 = \left. \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 12x \right|_{-4}^{-1} = \boxed{\frac{99}{4}} \text{ وحدة مربعة}$$

$$A_2 \rightarrow f(x) = 0, \quad g(x) = -x^3 + 2x^2 - 11x - 12.$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

$$A_2 = \int_{-1}^3 (-x^3 + 2x^2 - 11x - 12) dx.$$

$$A_2 = \left. -\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 12x \right|_{-1}^3 = \boxed{\frac{160}{3}} \text{ وحدة مربعة}$$

$$A_f = A_1 + A_2 = \frac{99}{4} + \frac{160}{3} = \boxed{\frac{937}{12}} \text{ وحدة مربعة}$$

⑬ $y = \sin(2x)$, $y = 2\sin x$, $x \in [0, \pi]$

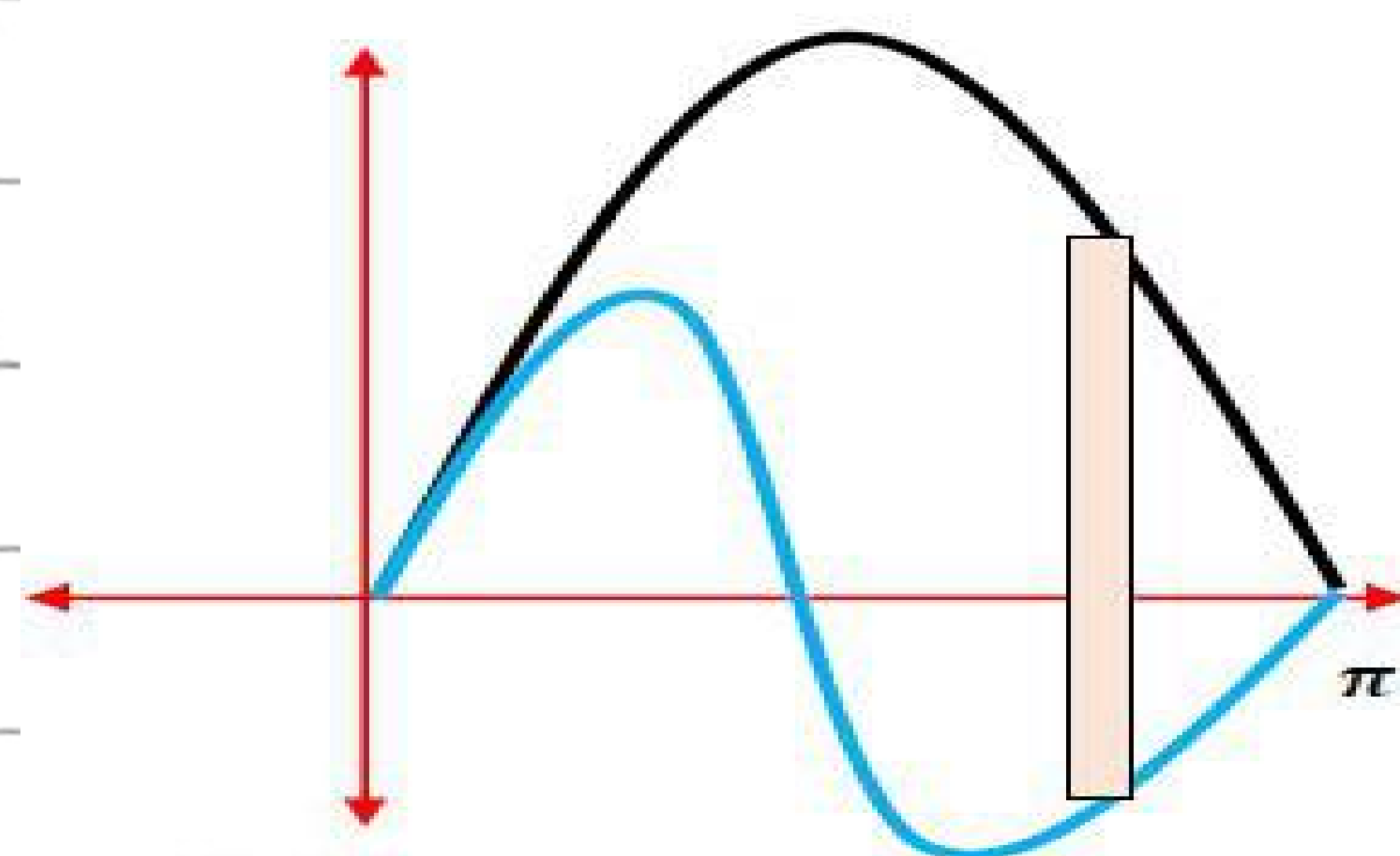
$y = \sin x \rightarrow x = \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

$y = \sin(2x) \rightarrow x = \{\frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$

نقطة البيان

$f(x) = 2\sin x$, $g(x) = \sin(2x)$.

$x_1 = 0$, $x_2 = \pi$.



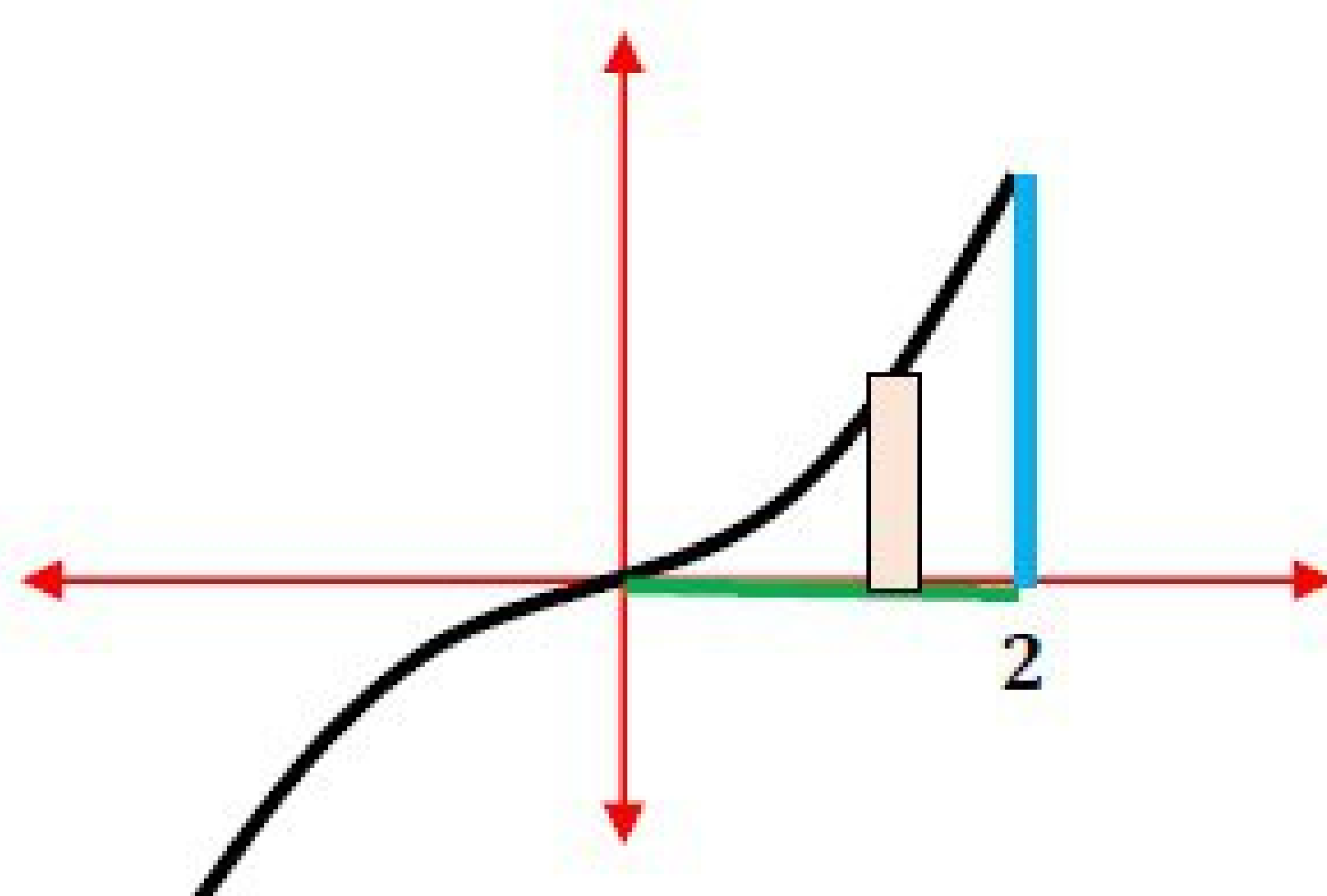
$A = \int_0^{\pi} (2\sin x - \sin 2x) dx$

$A = -2\cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) \Big|_0^{\pi} = 4$ وحدة مربعة

⑭ $y = x^3 + x$, $x = 2$, $y = 0$.

$f(x) = x^3 + x$, $g(x) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$



$A = \int_0^2 (x^3 + x) dx \rightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \Big|_0^2$

$A = 6$ وحدة مربعة

①⑤ $y = |x - 2|$, $y = \sqrt{x}$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ 2 - x, & x < 2 \end{cases}$$

$A_1 \rightarrow f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2 - x$.

$$2 - x = \sqrt{x} \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$(x_1 = 1, x_2 = 2)$.

$$A_1 = \int_1^2 (\sqrt{x} - 2 + x) dx = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{7}{6} \right) \text{ وحدة مساحة} = A$$

$A_2 \rightarrow f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$.

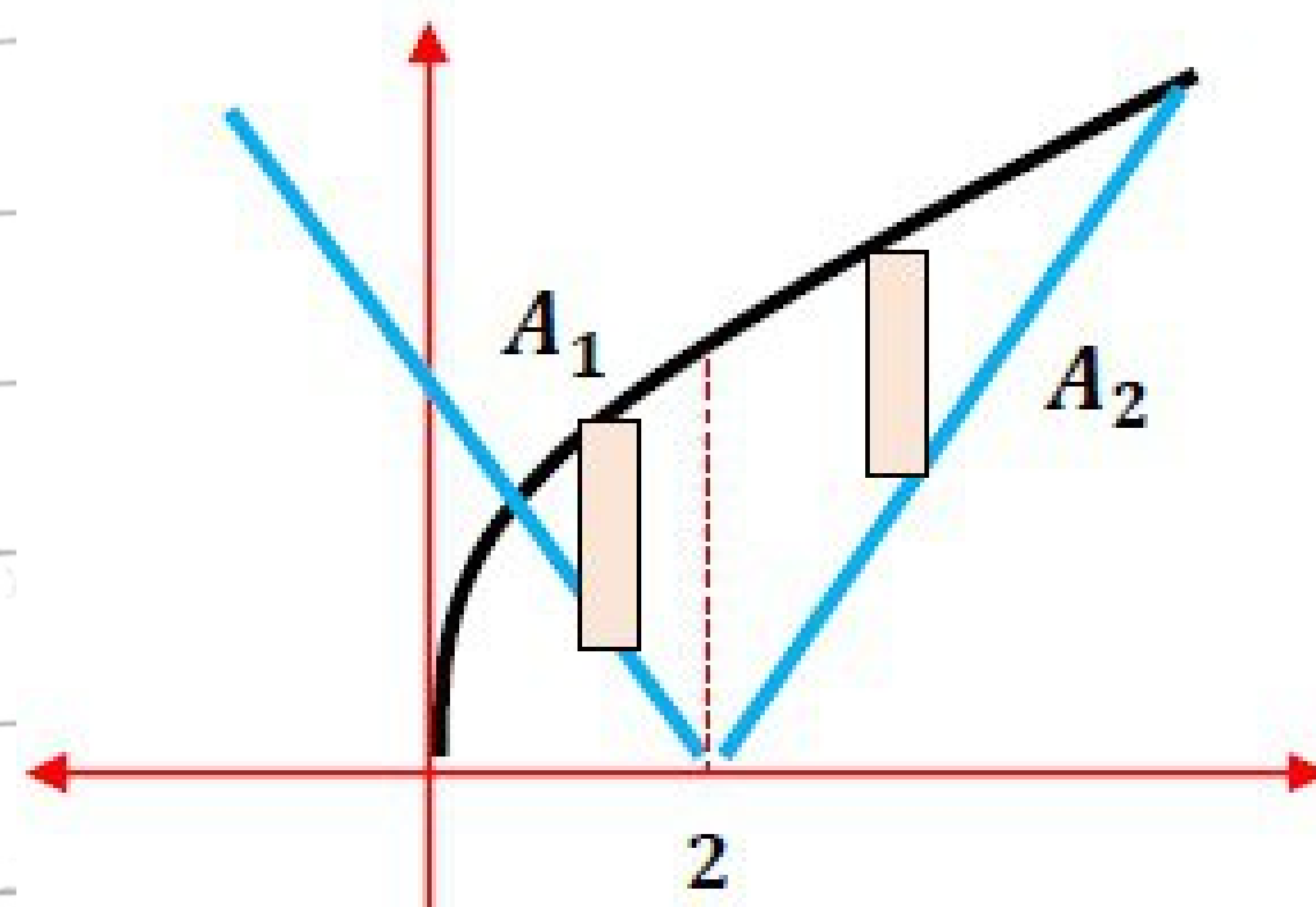
$$\sqrt{x} = x - 2 \rightarrow \cancel{x^2 - 5x + 4 = 0}.$$

$x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

$$A_2 = \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx = \left(\frac{10 - 4\sqrt{2}}{3} \right) \text{ وحدة مربعة}$$

$A_t = A_1 + A_2 =$

$$\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{7}{6} \right) + \left(\frac{10 - 4\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{13}{6} \text{ وحدة مساحة}$$



② الحجم الدورانية :

① طريقة الحلقات الدورانية : (هذه الطريقة فقط سوف ندرس هذا المصطلح).

- نستخدم لإيجاد الحجم الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين منحنى

$y = b, y = a, g(x), f(x)$ والمسفين $x = b, x = a$ أو $y = b, y = a, g(y), f(y)$

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx \quad \text{حول محور السينات } y=0$$

$$V = \pi \int_a^b [(f(y))^2 - (g(y))^2] dy \quad \text{حول محور الصادات } x=0$$

- دوران حول مستقيم موازي لمحور السينات $y = c$ ، فإن :

$$V = \pi \int_a^b [(c - f(x))^2 - (c - g(x))^2] dx$$

- دوران حول مستقيم موازي لمحور الصادات $x = c$ ، فإن :

$$V = \pi \int_a^b [(c - f(y))^2 - (c - g(y))^2] dy$$

نأوجد الحجم الناشئ من دوران المناطق المحصورة بالآتي دورة كاملة حول المحور المبيّن -

① $x + y^2 + 1 = 0$, $x = -2$, (oy)

$$x = -y^2 - 1$$

$$y^2 + 1 = 2 \rightarrow y = \pm 1$$

$$V = \int_{-1}^1 ((-2)^2 - (-y^2 - 1)^2) dy$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (-y^4 - 2y^2 + 3) dy$$

$$V = 2\pi \left[3y - \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 \right]_0^1 = \frac{64}{15}\pi$$
 وحدة حجم

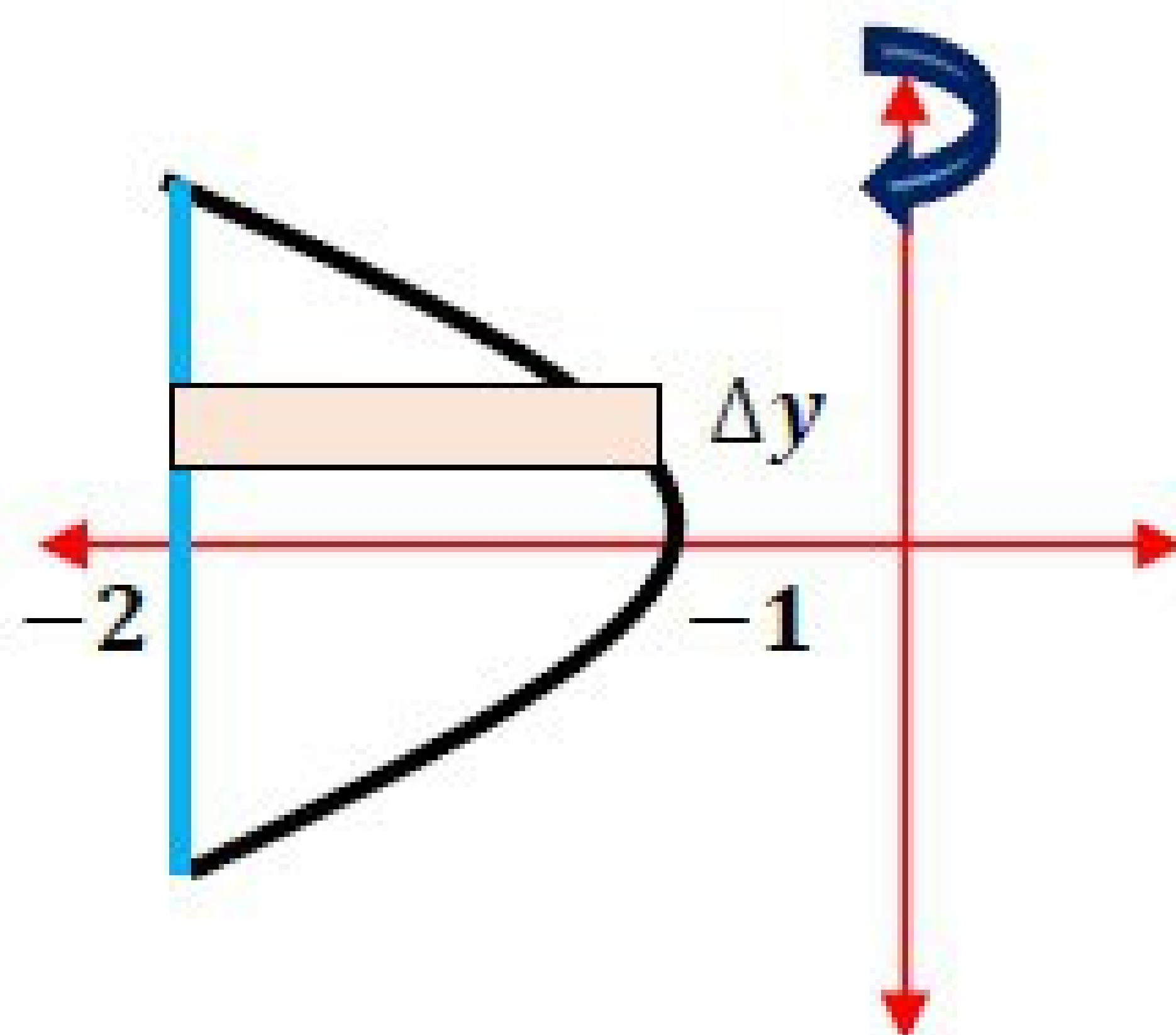
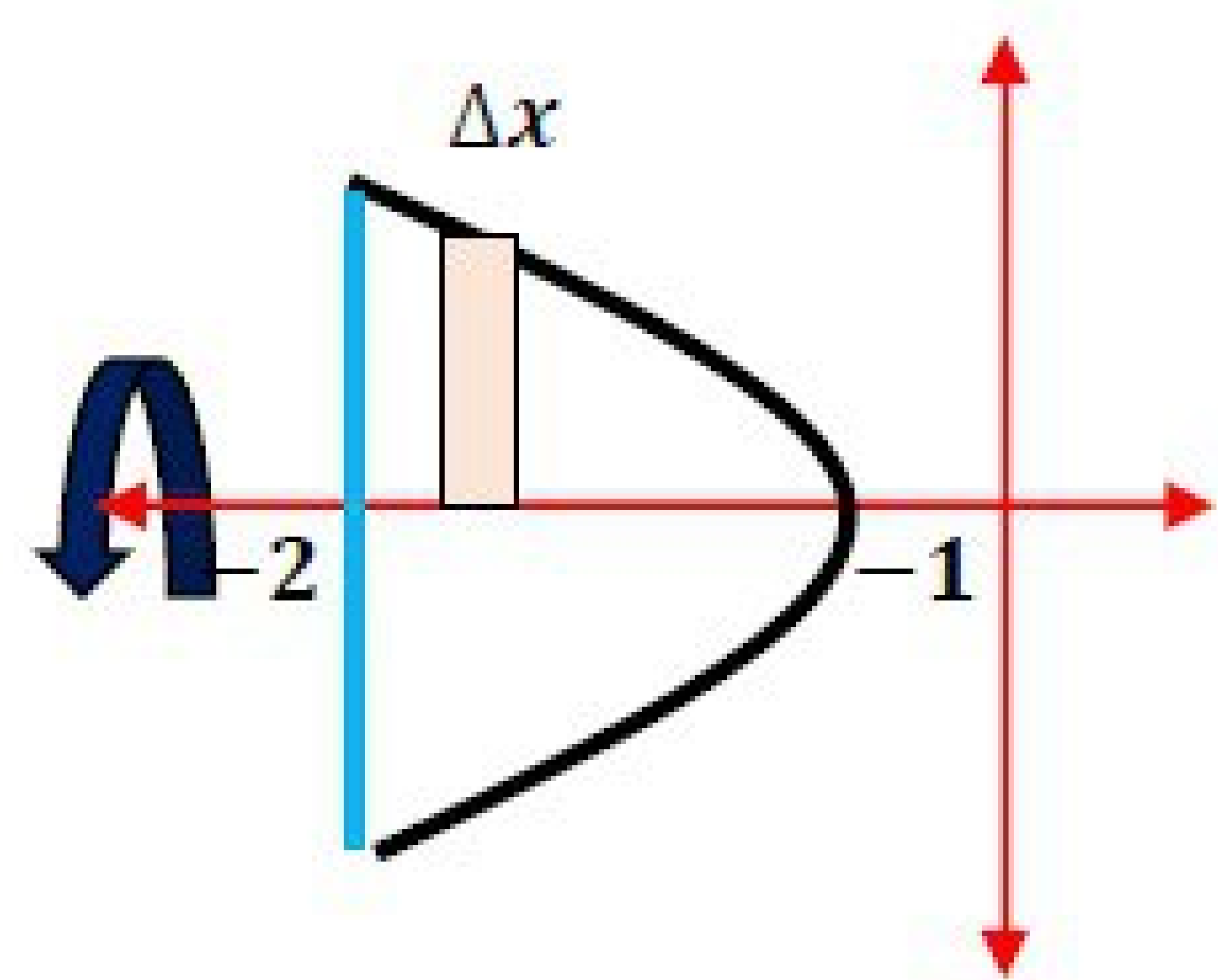
② $x + y^2 + 1 = 0$, $x = -2$, (ox)

$$y^2 = -x - 1 \rightarrow y = \pm \sqrt{-x - 1}$$

نأخذ الحيز الحلوي وذلك لتقابل المتحد حول محور (x) والمطلوب دورانه حول (x)

$$y = +\sqrt{-x - 1}$$

$$V = \pi \int_{-2}^{-1} (\sqrt{-x - 1})^2 dx = \frac{1}{2}\pi$$
 وحدة مكعبة

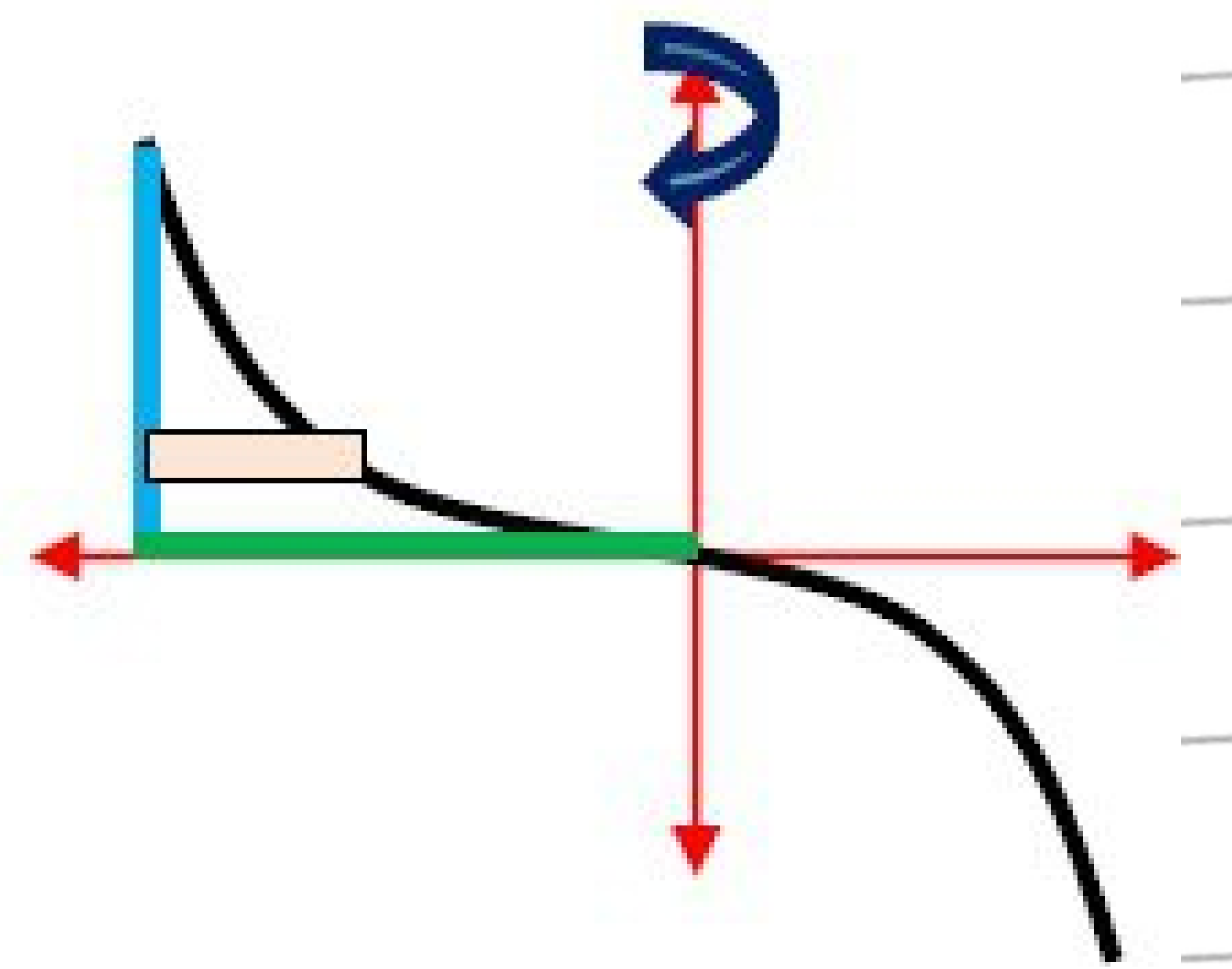


③ $y = -x^3$, $x = -1$, $y = 0$, (oy)

$$y = -x^3 \rightarrow x = -\sqrt[3]{y}$$

$$-\sqrt[3]{y} = -1 \rightarrow \boxed{y = 1}$$

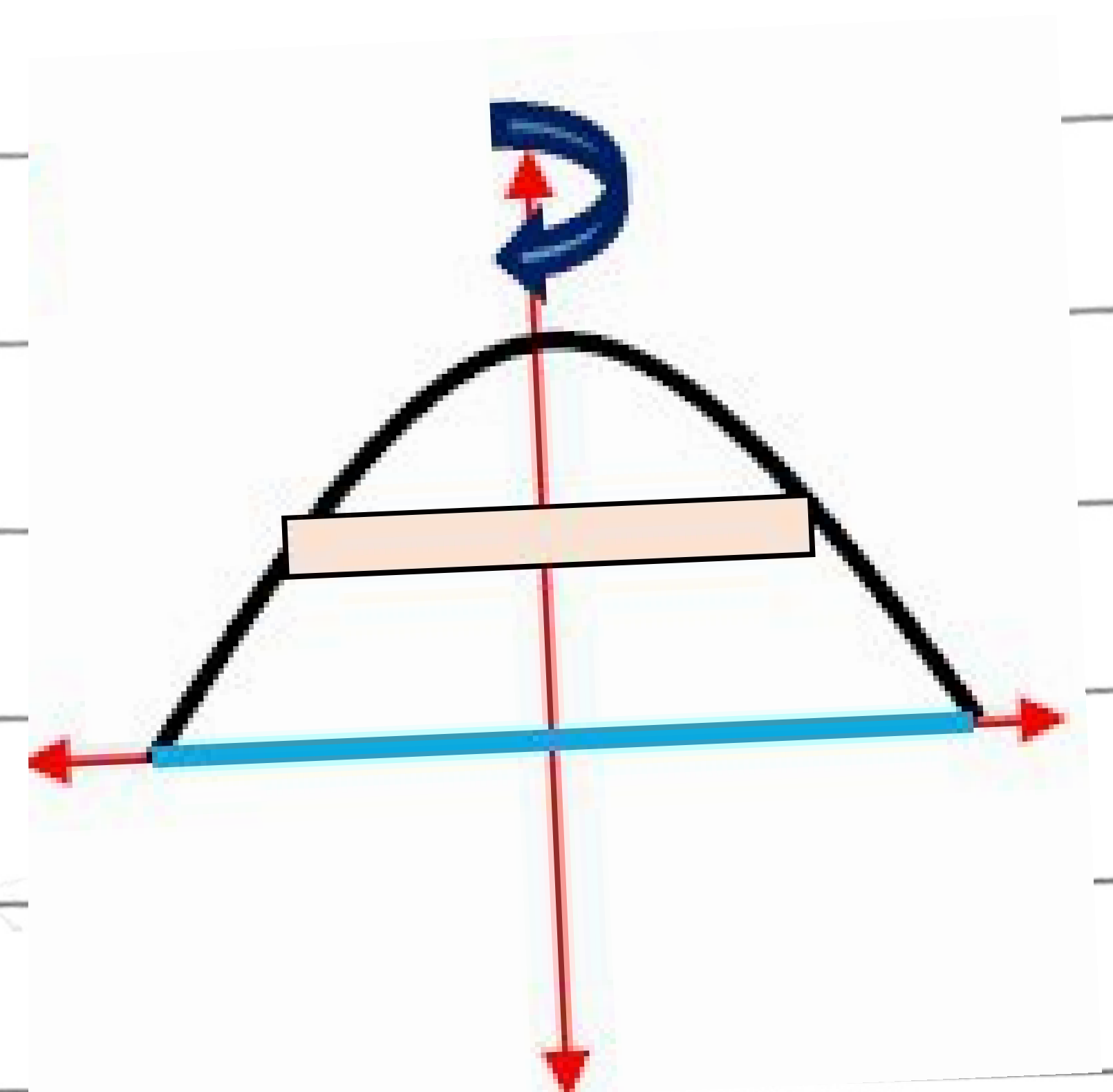
$$V = \pi \int_0^1 ((-1)^2 - (-\sqrt[3]{y})^2) dy = \frac{2}{5} \pi \text{ وحدة حجم}$$



④ $y = 4 - x^2$, $y = 0$, (oy)

$$y = 4 - x^2 \rightarrow x = \sqrt{4 - y}$$

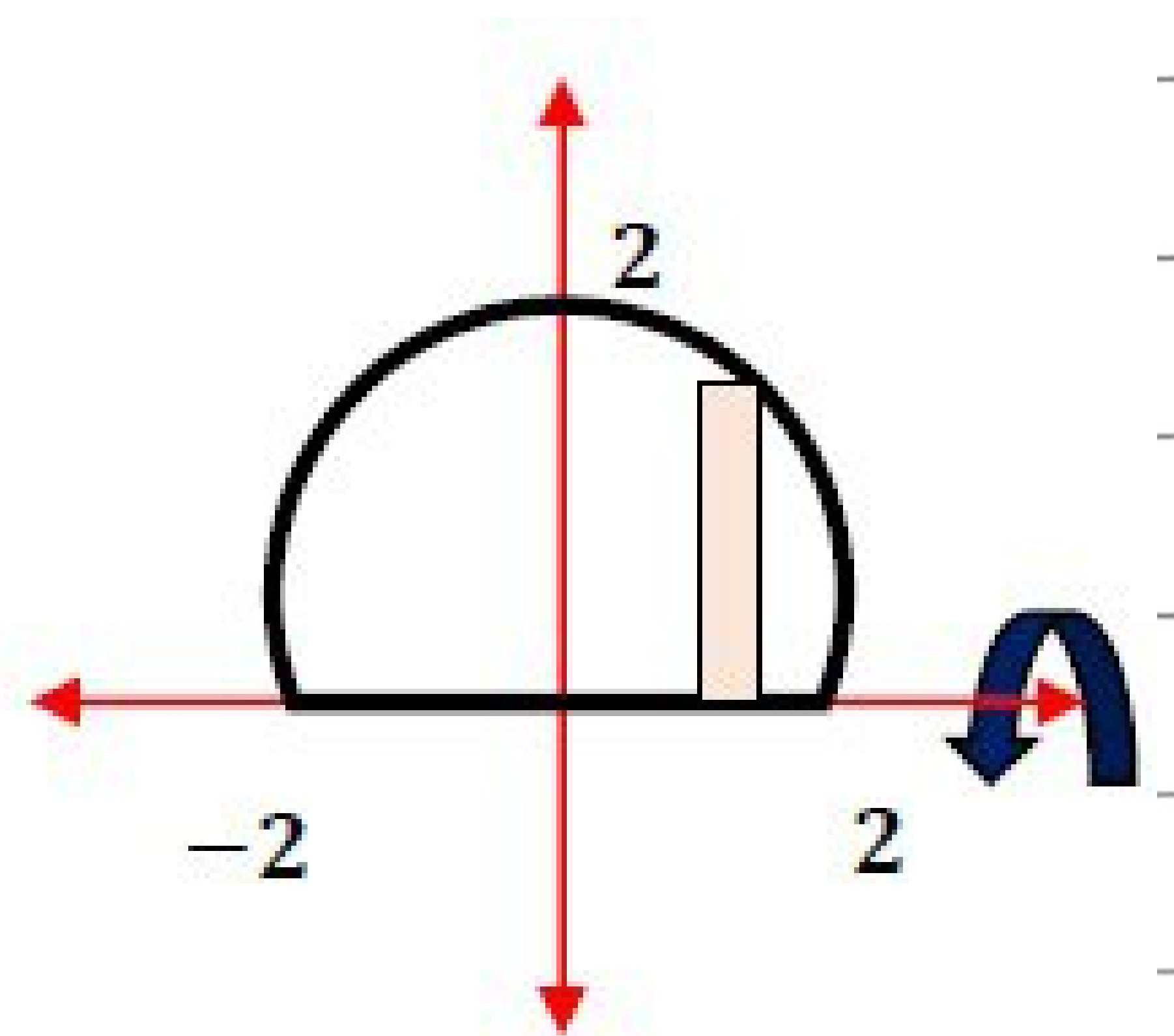
$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{4 - y})^2 dy = 8\pi \text{ وحدة حجم}$$



⑤ $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, (ox)

$$V = \pi \int_{-2}^2 (\sqrt{4 - x^2})^2 dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (\sqrt{4 - x^2})^2 dx = \frac{32}{3} \pi \text{ وحدة حجم}$$



ال دوران حول (x) يشكّل كرة من قانون الحجم

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (2)^3 = \frac{32}{3} \pi \text{ وحدة حجم}$$

$$\boxed{V = \frac{16}{3} \pi} \text{ حول (oy) نصف كرة}$$

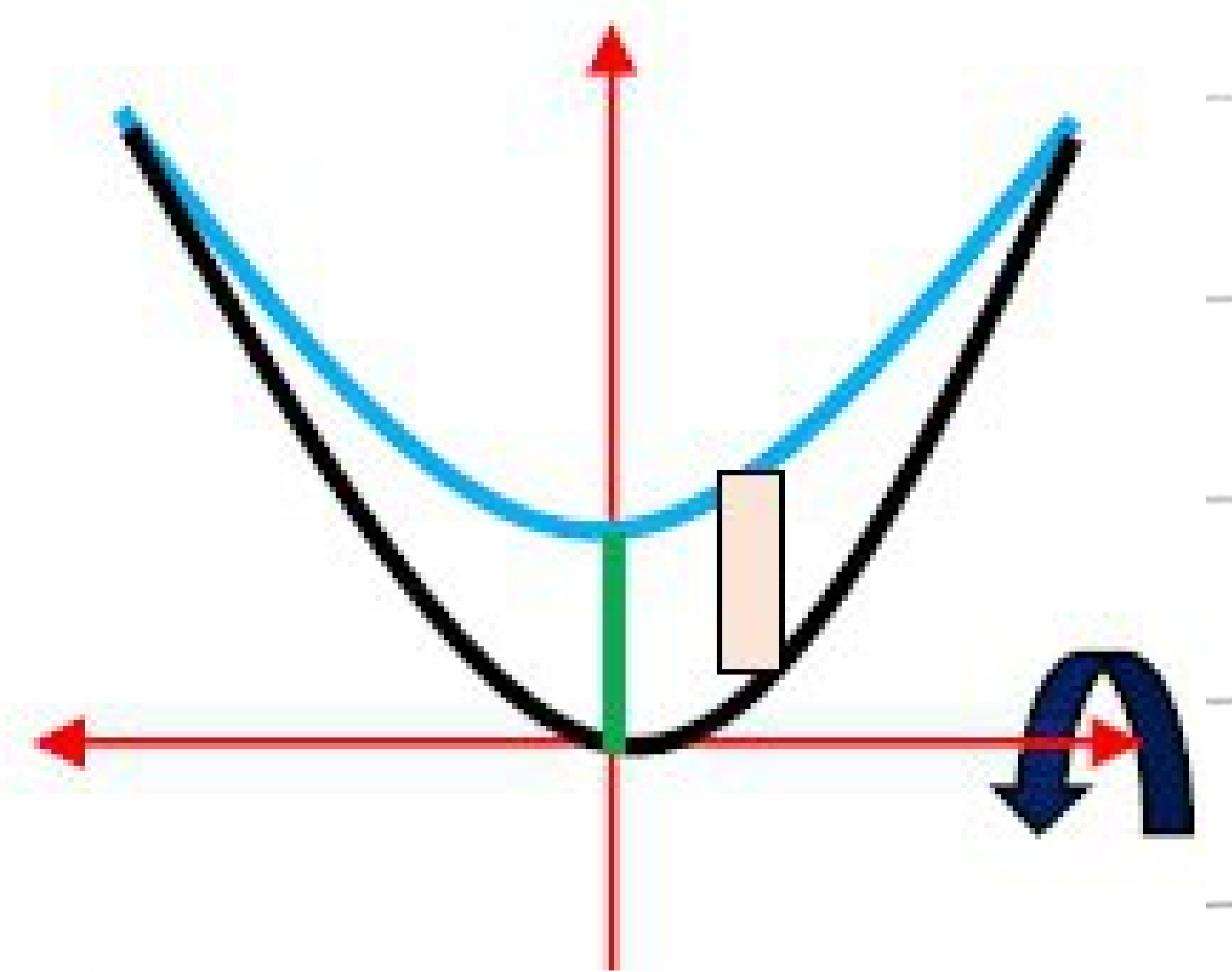
⑥ $y = x^2 + 3$, $y = 4x^4$, $x = 0$, $(0, x)$, $(0, y)$.

① حول محور (x)

$$x^2 + 3 = 4x^4$$

$$x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

$$V = \int_0^1 \pi \left[(x^2 + 3)^2 - (4x^4)^2 \right] dx = 8\pi \text{ وحدة حجم}$$



② حول محور (y)

$$y = x^2 + 3 \rightarrow x = \sqrt{y - 3}$$

$$y = 4x^2 \rightarrow x = \frac{1}{2} \sqrt{y}$$

$$\sqrt{y - 3} = \frac{1}{2} \sqrt{y} \rightarrow \boxed{y = 1}$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2} \sqrt{y} \right)^2 - (\sqrt{y - 3})^2 \right) dy = \frac{21}{8} \pi \text{ وحدة حجم}$$

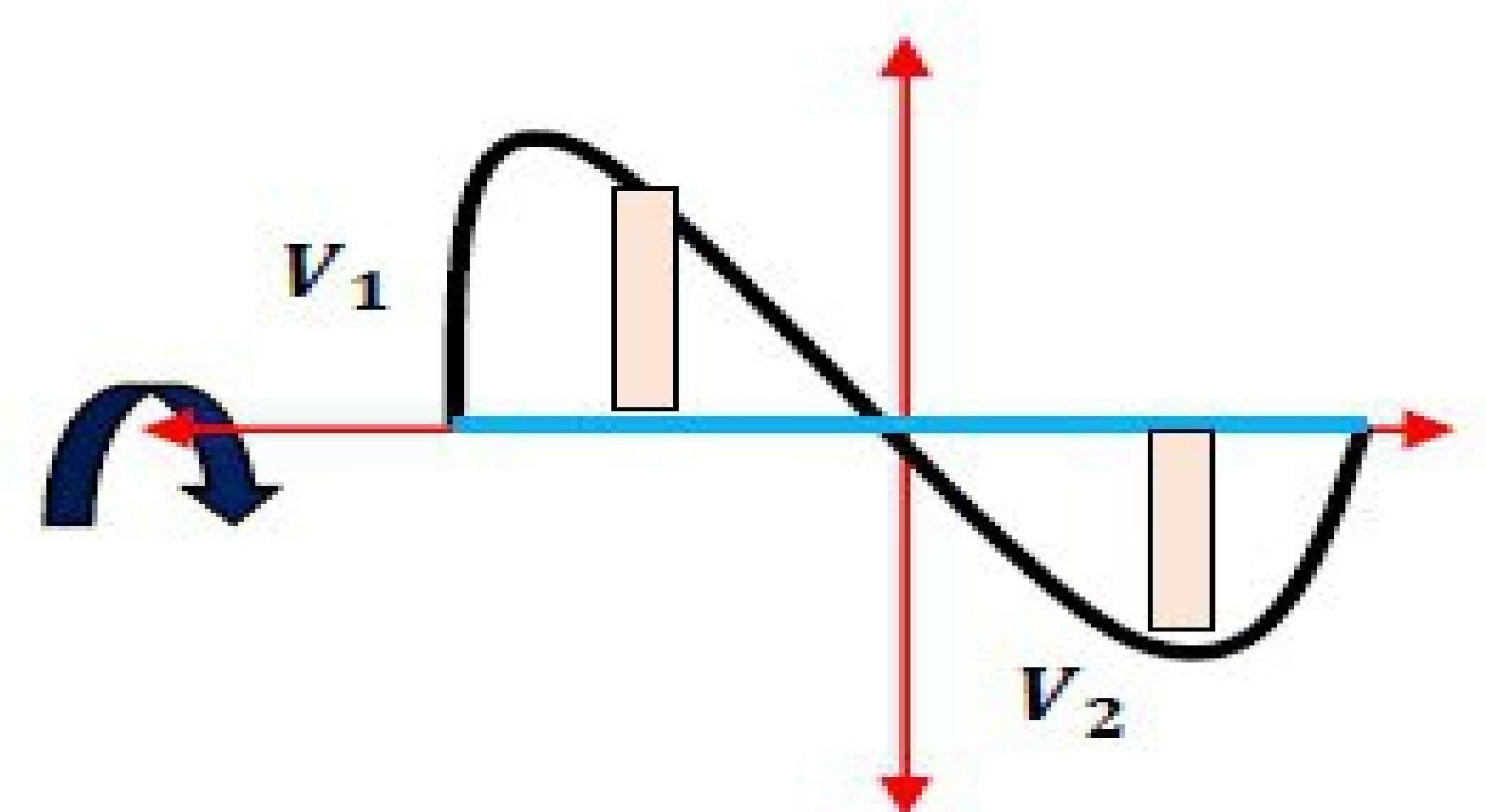
⑦ $y = x^3 - 4x$, $y = 0$, $(0, x)$.

$$x^3 - 4x = 0 \rightarrow x = -2, 0, 2$$

$$V_1 = \pi \int_{-2}^0 (x^3 - 4x)^2 dx = \frac{1024\pi}{105} \text{ وحدة حجم}$$

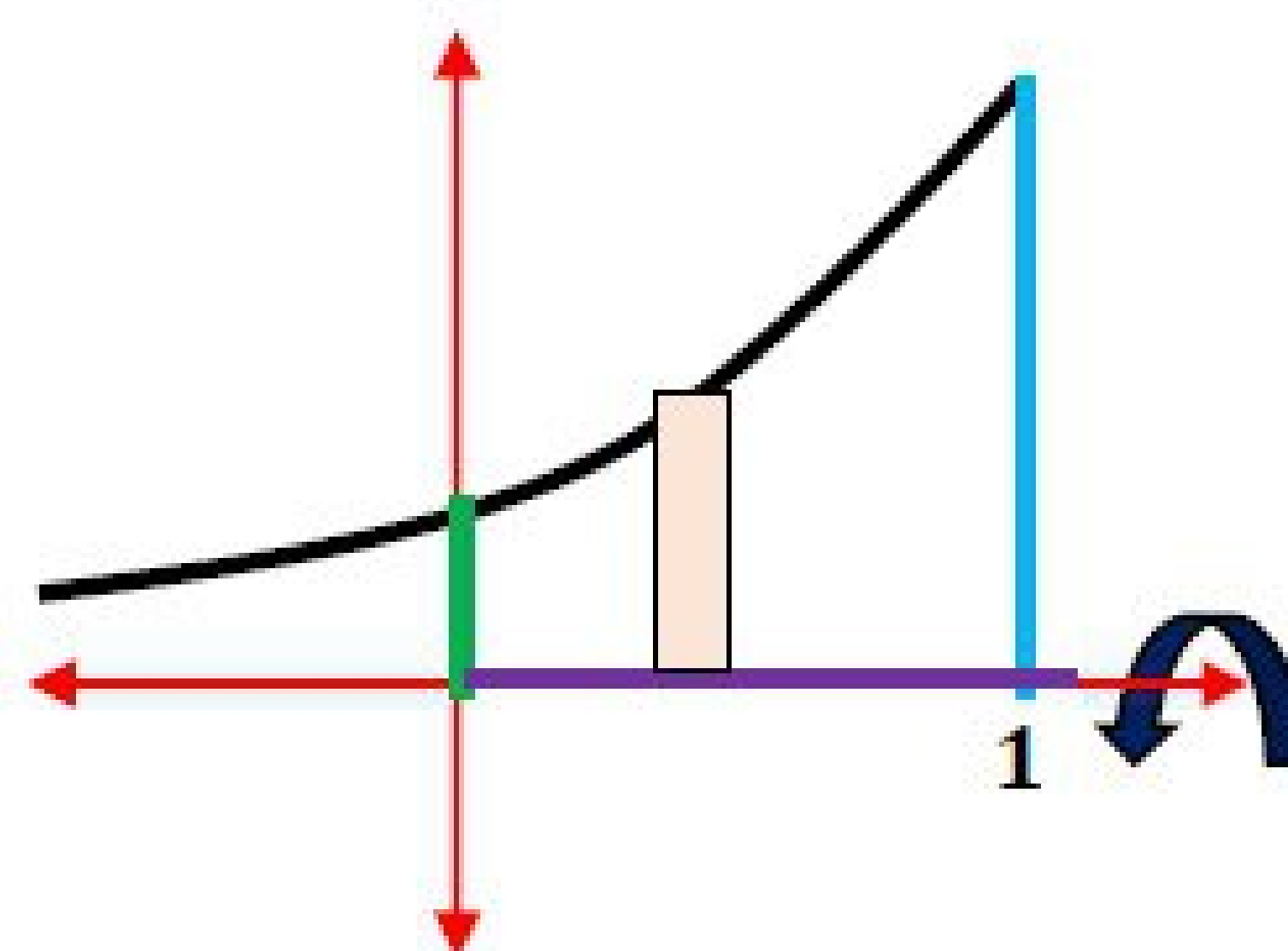
$$V_2 = \pi \int_0^2 (0^2 - (x^3 - 4x)^2) dx = \frac{1024\pi}{105} \text{ وحدة حجم}$$

$$V_t = V_1 + V_2 = \frac{2048\pi}{105} \text{ وحدة حجم}$$



⑧ $y = e^{2x}$, $x = y = 0$, $x = 1$ (OX).

$$V = \pi \int_0^1 (e^{2x})^2 dx = \frac{\pi}{4} (e^4 - 1) \text{ سم}^3$$

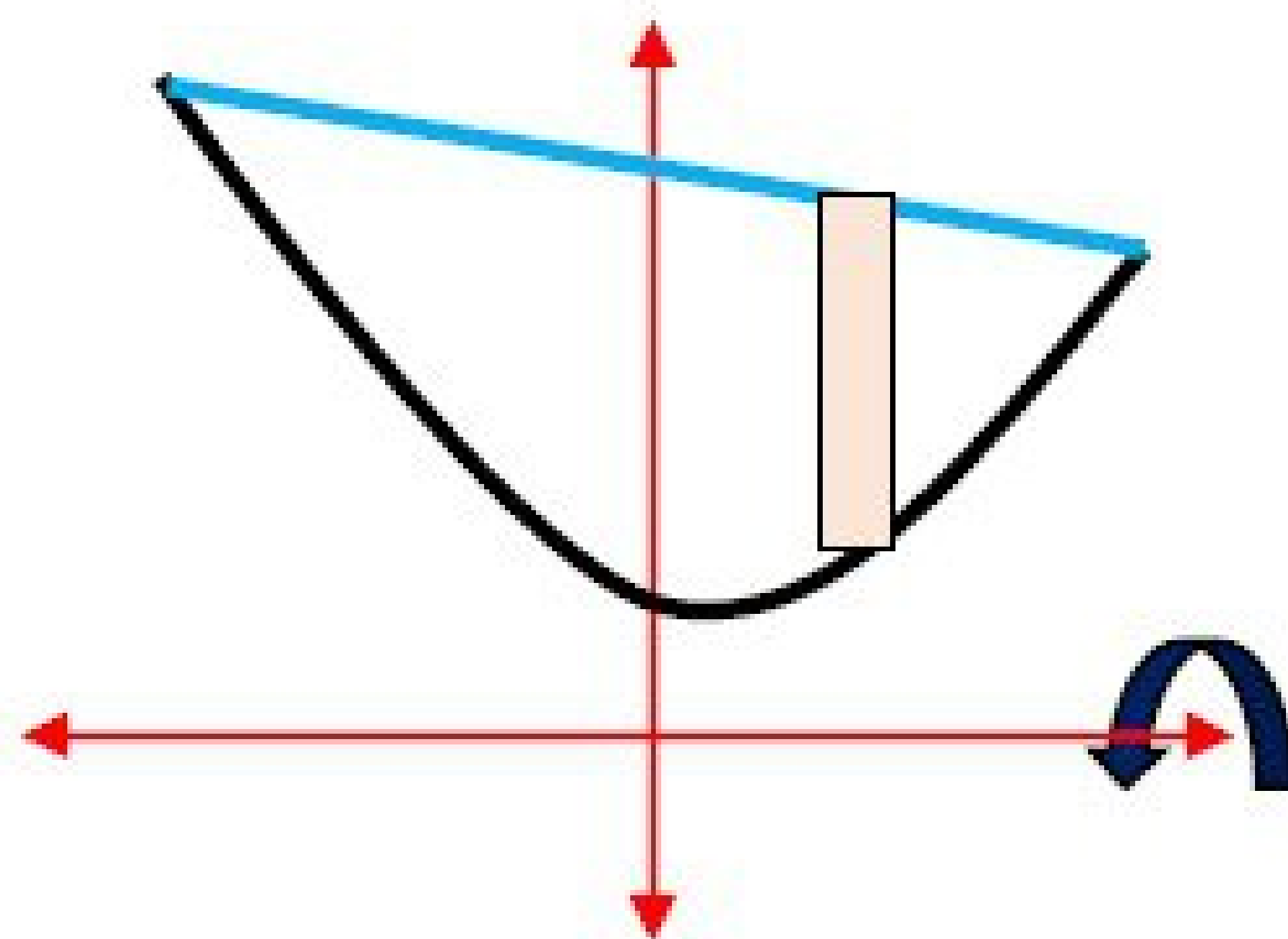


⑨ $y = x^2 + 1$, $y = 3 - x$, (OX)

$$x^2 + 1 = 3 - x \rightarrow x = -2, 1$$

$$V = \pi \int_{-2}^1 ((3-x)^2 - (x^2+1)^2) dx$$

$$V = \frac{117\pi}{5} \text{ سم}^3$$

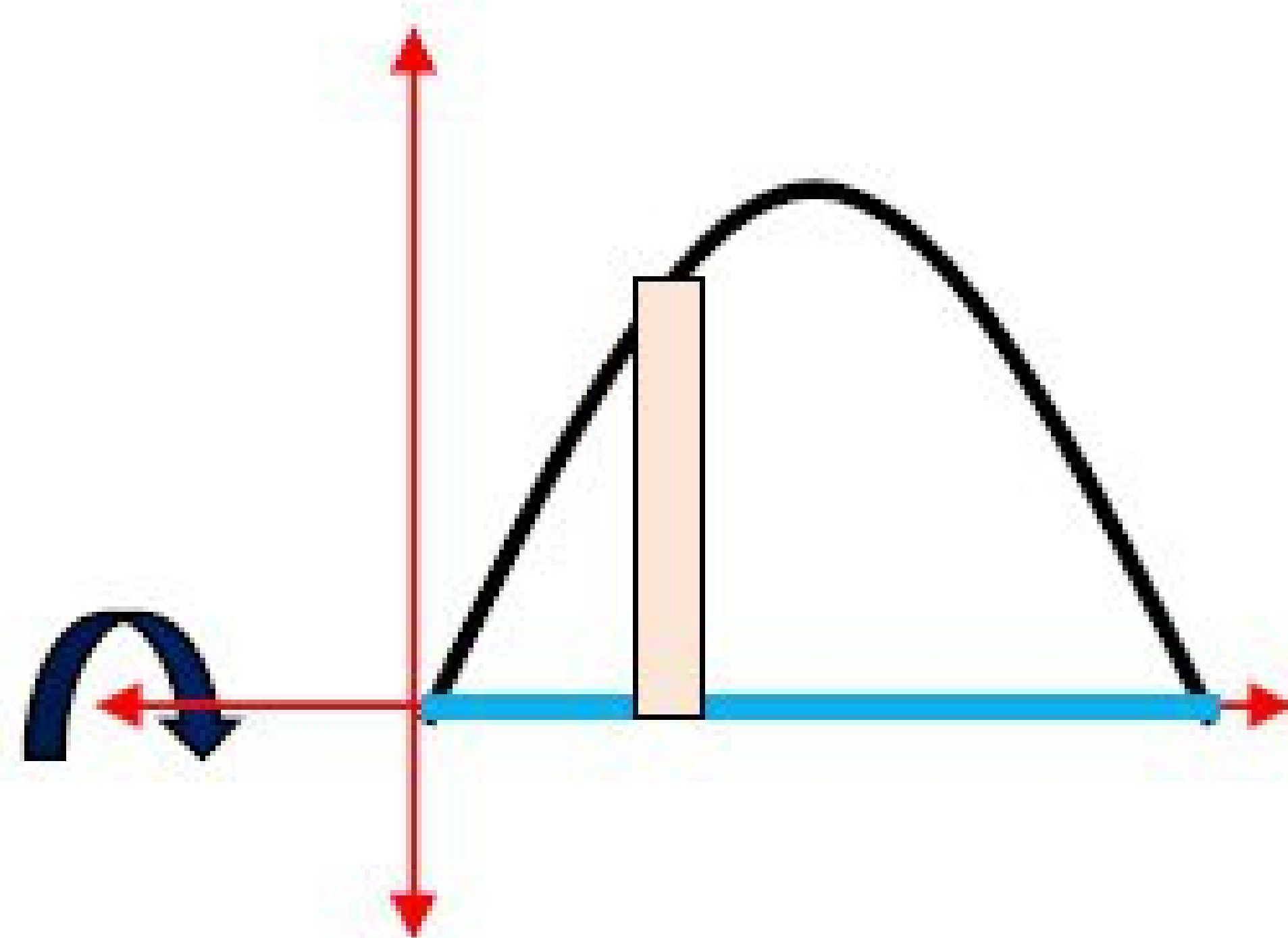


⑩ $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ (OX).

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx$$

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx$$

$$V = \frac{\pi^2}{2} \text{ سم}^3$$

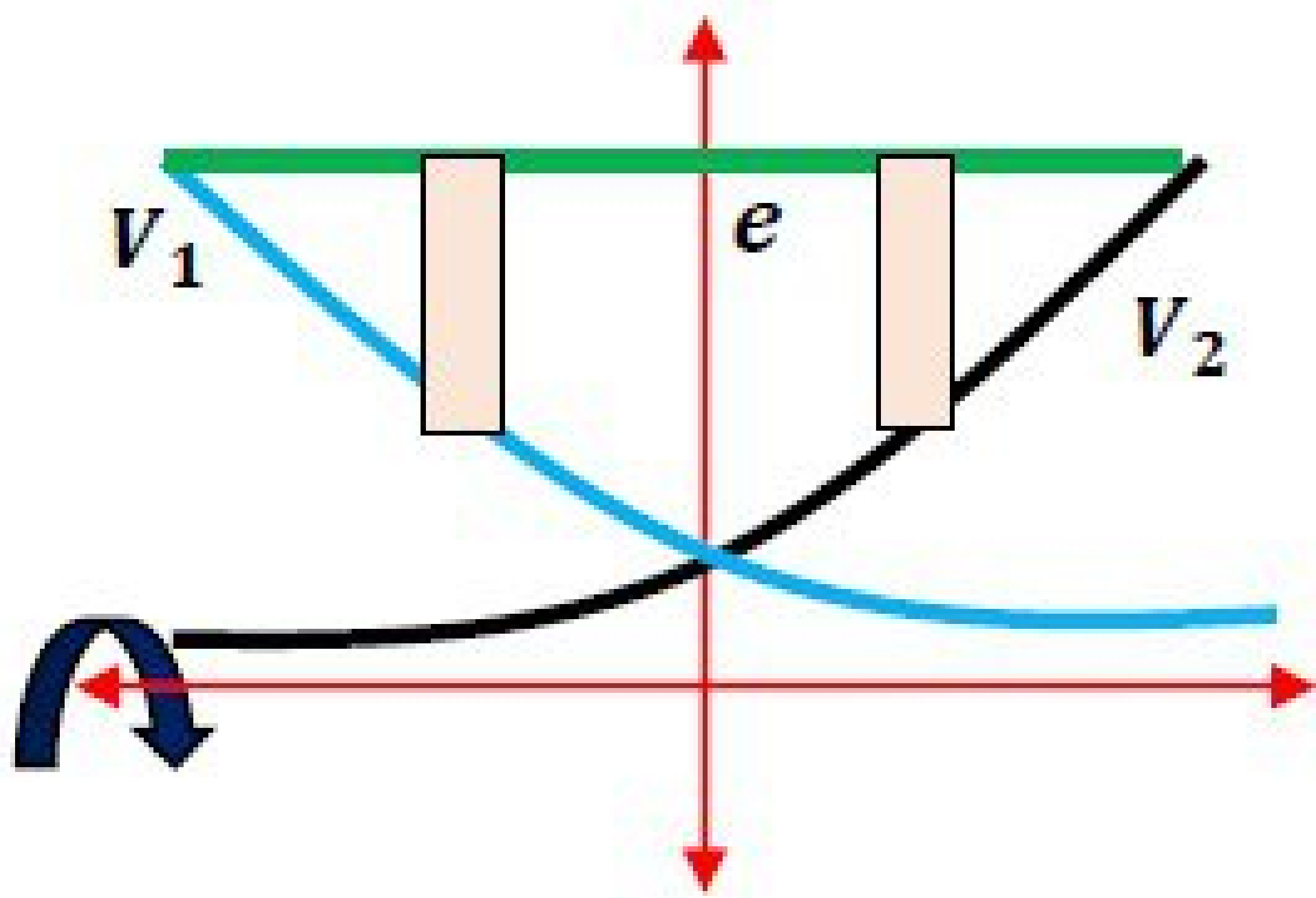


(11) $y = e^{4x}$, $y = e^{-4x}$, $y = e$, $(0, x)$.

~~Pres~~ $\therefore V_1 \rightarrow y = e^{4x}, y = e.$

$$e^{4x} = e \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}}$$

$$V_1 = \pi \int_0^{\frac{1}{4}} (e^2 - (e^{4x})^2) dx$$



$$V_1 = \pi \left(\frac{e^2 + 1}{8} \right) \text{ ج. م.}$$

$$3v_2 \rightarrow y = e^{-4x}, y = e.$$

$$e^{-4x} = e \rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$V_2 = \pi \int_{-\frac{1}{4}}^0 (e^2 - (e^{-4x})^2) dx.$$

$$V_2 = \pi \left(\frac{e^2 + 1}{2} \right)$$

$$V_t = V_1 + V_2 = \pi \left(\frac{e^2 + 1}{4} \right) \text{ سم}^2$$



محور الدوران

(12) $y = \sin x, \quad y = 0, \quad y = 3 \quad x \in [0, \pi]$

$$V = \pi \int_0^{\pi} (3 - 0)^2 - (3 - \sin x)^2 dx.$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} (9 - 6\sin x + \sin^2 x) dx.$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left[6\sin x - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right] dx.$$

$$V = \pi \left[6\cos x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\pi}.$$