القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

كشك الهندسة ENGINEERING

تعريف: المصفوفة المميزة

اذا كانت A مصفوفة مربعة، $\lambda \in R$ فإن المصفوفة المميزة للمصفوفة A هي $A-\lambda I$

تعريف: المعادلة المميزة

هي المعادلة الناتجة من ايجاد محدد المصفوفة المميزة

$$|A-\lambda I| = 0$$

تعريف: القيمة الذاتية والمتجه الذاتي

اذا كانت A مصفوفة مربعة فإن $\lambda \in R$ يسمى قيمة ذاتية للمصفوفة A اذا كان هناك متجه غير صفري X بحيث

$$AX = \lambda X \qquad [X \text{ هو متجه عمود}]$$

ويسمى المتجه X بالمتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية λ الناتج من المعادلة

$$(A-\lambda I)X = 0$$

ex أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

sol

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies -\lambda(3-\lambda)+2 = 0$$

$$\implies \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

$$\implies \boxed{\lambda_1 = 1} \quad , \quad \boxed{\lambda_2 = 2}$$

الآن نحسب المتجهات الذاتية المناظرة للقيم الذاتية

نفرض أن المتجه الذاتي المناظر هو $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow (A - \lambda I)X = 0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; *$$

1) عندما $\boxed{\lambda = 1}$ بالتعويض في *

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2a + 2b = 0$$
$$-a - b = 0 \quad \Rightarrow a = -b \quad \text{or} \quad b = -a$$

لحل هذه المعادلة نفرض أن

$\boxed{a = \alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{b = -\alpha}$$

$$\therefore X_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in R$$

كحالة خاصة إذا كان $\alpha = 1$ فإن $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2) عندما $\boxed{\lambda = 2}$ بالتعويض في *

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{matrix} a + 2b = 0 \\ -a - 2b = 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

نفرض أن $\boxed{a = \alpha}$

$$2b = -a \Rightarrow \boxed{b = \frac{-\alpha}{2}}$$

$$\therefore X_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{-\alpha}{2} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \quad \therefore X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

تعريف الفضاء الذاتي هو مجموعة كل المتجهات الذاتية X_i المناظرة للقيم الذاتية λ_i بالاضافة إلى المتجه الصفري

مثال من المثال السابق أوجد الفضاء الذاتي للمصفوفة A ؟

sol الفضاء الذاتي $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

مثال أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

sol

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)+2\right] = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 2}, \quad \boxed{\lambda_2 = 2}, \quad \boxed{\lambda_3 = 3}$$

الآن نوجد المتجهات الذاتية X_i المناظرة للقيم الذاتية λ_i

نفرض ان المتجه الذاتي X_i المناظر هو

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad *$$

1 عندما $\lambda_1 = 2$ بالتعويض في *

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$b = 0$ ، $-b - c = 0 \Rightarrow c = 0$

نضع $a = \alpha$

$$\therefore X_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 عندما $\lambda_2 = 2$ نفس الخطوات السابقة

$$\therefore X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3 عندما $\lambda_3 = 3$ بالتعويض في *

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow -a + b = 0 \Rightarrow b = a$

$-2b - c = 0 \Rightarrow c = -2b$

نفرض أن $b = \alpha \Leftarrow a = \alpha \Leftarrow c = -2\alpha$

$$\therefore X_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- يمكن معرفة ما اذا كانت المتجهات الذاتية التي حصلنا عليها مستقلة أم مرتبطة خطياً من العلاقة

$$k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$$ المتجهات غير مستقلة خطياً

ex أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A وبين فيما اذا كانت المتجهات الذاتية مستقلة أو مرتبطة خطياً ؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

sol ∵ المصفوفة A هي مصفوفة مثلثية عليا

∴ القيم الذاتية هي عناصر القطر الرئيسي

∴ القيم الذاتية هي $\boxed{\lambda_1 = 1}$ ، $\boxed{\lambda_2 = 5}$ ، $\boxed{\lambda_3 = 7}$

باقي الحل يترك للطالب

ex للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ومتعددة الحدود $P(x) = x^2 - 5x + 5$

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $P(A)$

sol نوجد المصفوفة $P(A)$ $\quad P(A) = A^2 - 5A + 5$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 - 5\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية للمصفوفة $P(A)$ هي

لماذا ؟ $\boxed{\lambda_1 = -1}$ ، $\boxed{\lambda_1 = 2}$

ex اذا كانت $A=\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد القيم الذاتية للمصفوفات

$$A^2 \ , \ A^3 \ , \ A^{-1}$$

sol ∴ القيم الذاتية للمصفوفة A هي 2 , 1

• القيم الذاتية للمصفوفة A^2 هي

$$\lambda_1 = 1^2 = 1$$
$$\lambda_2 = 2^2 = 4$$

• القيم الذاتية للمصفوفة A^3 هي

$$\lambda_1 = 1^3 = 1$$
$$\lambda_2 = 2^3 = 8$$

• القيم الذاتية للمصفوفة A^{-1} هي

$$\lambda_1 = (1)^{-1} = 1$$
$$\lambda_2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

ex أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

sol

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(-2-\lambda)+5=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda^2=-1 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

ايجاد المتجهات الذاتية تترك للطالب

المصفوفة القابلة للقطرية

مصفوفة التحويل إلى الصورة القطرية

هي مصفوفة مربعة P أعمدتها المتجهات الذاتية المستقلة خطياً والتي حصلنا عليها من المعادلة المميزة

المصفوفة القابلة للقطرية

تكون المصفوفة المربعة A قابلة للقطرية اذا وجدت مصفوفة P قابلة للانعكاس بحيث تكون

$$\boxed{D=P^{-1}AP}$$ مصفوفة قطرية

خطوات التحويل إلى الصورة القطرية

1. نوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A
(يجب ان تكون المتجهات الذاتية مستقلة خطياً)

2. نكون المصفوفة P حيث $P=(V_1, V_2, \dots\dots V_n)$

3. نوجد معكوس المصفوفة P

4. نحول إلى الصورة القطرية من العلاقة $D=P^{-1}AP$

مثال سابق اذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ أوجد

الصورة القطرية للمصفوفة A ؟

الحل ①

$\because \lambda_1=1 \Rightarrow X_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=2 \Rightarrow X_2=\begin{bmatrix}1\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

2) نكون المصفوفة P

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$|P|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\neq 0$$

∴ X_1 ، X_2 متجهات مستقلة خطيا و P^{-1} موجود

3) نوجد P^{-1}

$$\Delta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

4) نوجد D من العلاقة

$$D=P^{-1}AP$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

ex حول المصفوفة $A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ إلى الصورة القطرية ؟

sol نوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

$$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(4-4\lambda-\lambda+\lambda^2+2) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$\therefore$ $\boxed{\lambda_1 = 1}$ ، $\boxed{\lambda_2 = 2}$ ، $\boxed{\lambda_3 = 3}$

الآن نوجد المتجهات الذاتية .

نفرض أن $X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow (A-\lambda I)X = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad *$$

1) $\boxed{\lambda = 1}$ بالتعويض في *

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a + c = 0 \quad \boxed{a = 0} \Rightarrow \boxed{c = 0} \Rightarrow \boxed{b = \alpha}$$

$$\therefore X_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) $\boxed{\lambda = 2}$ بالتعويض في *

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2a + c = 0 \Rightarrow c = -2a$$

$$-2a - b = 0 \Rightarrow b = -2a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \alpha}, \boxed{b = c = -2\alpha}$$

$$\therefore X_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

* بالتعويض في $\boxed{\lambda=3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow a+c=0 \Rightarrow \boxed{c=-a}$ $\boxed{a=\alpha}$

$-2a-2b=0 \Rightarrow \boxed{b=-a} \Rightarrow \boxed{c=b=-\alpha}$

$$\therefore X_3=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

[2] نكون المصفوفة P

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|P|=(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-(-1+2)=-1 \neq 0$$

∴ المتجهات مستقلة خطياً و P^{-1} موجود

[3] نوجد P^{-1} بأي طريقة

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[4] نوجد D من العلاقة $D=P^{-1}AP$

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

مصفوفة القوى

اذا كانت $D=P^{-1}AP$

بالضرب يساراً في P

بالضرب يميناً في P^{-1}

$\Rightarrow PD=AP$

$\boxed{PDP^{-1}=A}$ $\Leftarrow$

$$A^k = P D^k P^{-1} \quad , D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}$$

ex من المثال السابق أوجد A^4 ؟

sol

$$\because P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad , P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = P D^4 P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 81 \\ 1 & -32 & -81 \\ 0 & -32 & -81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 146 & 0 & 65 \\ -130 & 1 & 8- \\ -130 & 0 & 49- \end{bmatrix}$$

نظرية كايلي هاملتون

كل مصفوفة مربعة تحقق معادلتها المميزة

ex اثبت ان المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ تحقق نظرية هاملتون ؟

$$\because |A - \lambda I| = 0 \implies \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = 0 \quad \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\Rightarrow A^2 + A - 2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ A تحقق نظرية كايلي هاملتون

ex أوجد A^{-1} للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ باستخدام نظرية هاملتون ؟

sol

$\because |A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & -2-\lambda\end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (1-\lambda)(-2-\lambda)-4=0 \Rightarrow -2-\lambda+2\lambda+\lambda^2-4=0$

$\Rightarrow \lambda^2+\lambda-6=0$

∴ كل مصفوفة مربعة تحقق معادلتها المميزة

$\therefore A^2+A-6=0$

لايجاد A^{-1}

بالضرب في A^{-1}

$A^{-1}A^2+A^{-1}A-A^{-1}6=0$

$\Rightarrow A+I-6A^{-1}=0$

$\Rightarrow 6A^{-1}=A+I \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}(A+I)$

$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

exe أوجد المصفوفة المربعة من النوع 3×3 التي لها القيم الذاتية ٥، ١، ١- واتجاهات الذاتية $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ على التوالي ؟

ارشاد $A=PDP^{-1}$