الأعداد المركبة
Complex Numbers

$\mathbb{C} = \{ a+ib \; ; \; a,b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \}$ مجموعة الاعداد المركبة

ظهرت لتسمح بحلول معادلات مثل $x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

وحلها هو

$\therefore x = \pm\sqrt{-1}$

وقد اصطلح على أن $i = \sqrt{-1}$ ويسمى بالوحدة التخيلية

$\therefore x = \pm i$

* كل زوج مرتب من الاعداد الحقيقية هو عدد مركب

مثل $(-3, 1)$ ، $(0, 2)$

* الاعداد الحقيقية جزء من الاعداد المركبة اى ان كل عدد حقيقي هو عدد مركب

* العدد المركب يمثل هندسياً في المستوى الكارتيزي

ويعرف العدد المركب كما يلي

$\mathbb{C} = \{ z = (x, y) \; ; \; x, y \in \mathbb{R} \}$

المرافق هو عدد ثاني تغير فيه اشارة الحد الثاني

$+x +y$ ربع الاول $+x -y$ ربع الرابع

$-x +y$ ربع الثاني

$-x -y$ ربع الثالث

أنواع الحلول لمعادلة الدرجة الثانية

حل المعادلة $ax^2+bx+c=0$

هي $x=\frac{-b\pm\sqrt{\text{المقدار المميز}}}{2a}$ حيث المقدار المميز $=b^2-4ac$

① المميز $=0$ يوجد حل وحيد

② المقدار المميز >0 يوجد حلان حقيقيان

③ المقدار المميز <0 يوجد حلان = الأعداد المركبة

مثل حل المعادلة $x^2-2x+2=0$

$a=1 \quad b=-2 \quad c=2$

المقدار المميز

$=(-2)^2-4(1)(2)=-4$

∴ يوجد حلان ينتميان إلى الأعداد المركبة وهما

$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{-4}}{2(1)}$ ، $\sqrt{-4}=\sqrt{4\times(-1)}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=2i$

∴ $x=\frac{2\pm2i}{2}=1\pm i$

∴ الحلول هي $\{1+i,\ 1-i\}$

والأعداد $1+i$ ، $1-i$ تسمى أعداد مركبة لأنها تتركب من الجزء الحقيقي 1 والتخيلي $\pm i$

* $\sqrt{-9}=\sqrt{9}\sqrt{-1}=3i$ *

* $\sqrt{-7}=\sqrt{7}\sqrt{-1}=\sqrt{7}i$

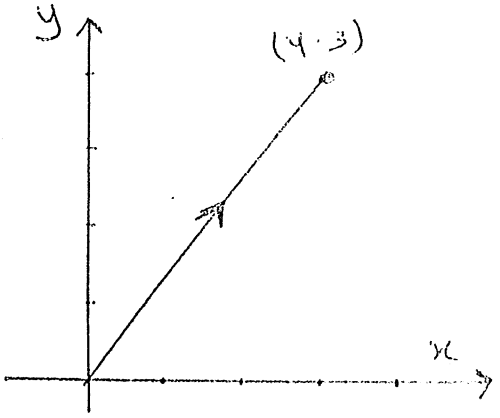
الصور المختلفة للعدد المركب

١) الصورة الكارتيزية

وتكتب إما على صورة جبرية $z = x + iy$

أو

زوج مرتب $z = (x, y)$



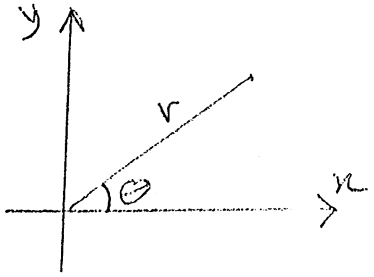
وتمثل بيانياً كالآتي

مثلاً $z = 3 + 4i$

٢) الصورة القطبية

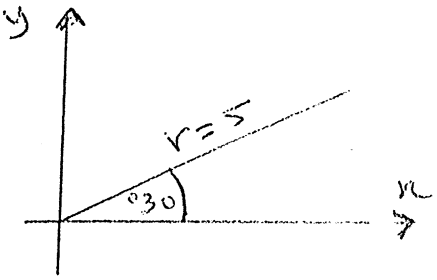
وتكتب على الصورة $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

حيث $x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$



وتمثل بيانياً كالآتي

مثلاً $z = 5(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$



ملاحظة في العدد المركب $x + iy$

x يسمى بالجزء الحقيقي ويرمز له بالرمز $Re(z) = x$

y يسمى بالجزء التخيلي ويرمز له بالرمز $Im(z) = y$

تنبيه x ، y أعداد حقيقية

العمليات على الأعداد المركبة

ولتكن: في مجموعة الزوج المرتب

اذا كانت $Z_1=(x_1,y_1)$ ، $Z_2=(x_2,y_2)$ فإن

① الجمع والطرح $(x_1,y_1)\pm(x_2,y_2)=(x_1\pm x_2, y_1\pm y_2)$

ex $Z_1=(2,-1)$ ، $Z_2=(5,7) \Rightarrow Z_1+Z_2=(7,6)$

② المعكوس الجمعي

if $Z=(x,y) \Rightarrow -Z=(-x,-y)$

ex $Z=(-2,4) \Rightarrow -Z=(2,-4)$

③ المحايد الجمعي هو $(0,0)$

ex $(2,-1)+(0,0)=(2,-1)$

④ ضرب عدد حقيقي في عدد مركب

اذا كان k عدد حقيقي ، $Z=(x,y)$

فإن $kZ=(kx,ky)$

ex if $k=-2$ ، $Z=(-1,3) \Rightarrow -2(-1,3)=(2,-6)$

⑤ مقياس أو مقدار العدد المركب

اذا كان $Z=(x,y)$ فإن $|Z|=\sqrt{x^2+y^2}$

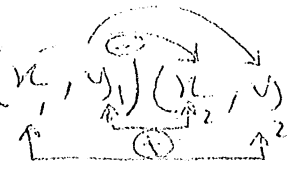
ex $Z=(-3,4) \Rightarrow |Z|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

عدد مركب ← مزاوجة = عدد تخيلي
عدد مركب ← مزاوجة = عدد حقيقي

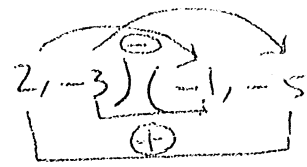
ضرب الأعداد المركبة

if $Z_1 = (x_1, y_1)$, $Z_2 = (x_2, y_2)$ عدد مركب ← مزاوجة = (الأول) - (الثاني)

then $Z_1 \cdot Z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 \ominus y_1 y_2 , x_1 y_2 \oplus x_2 y_1)$



en $(2,-3)(-1,-5) = (-2 \ominus 15 , -10 \oplus 3) = (-17 , -7)$



المحايد الضربي هو $(1,0)$

ولا يجوز أن يكون $(1,1)$ أو $(0,1)$

en $(5,7)(1,0) = (5,7)$

المعكوس الضربي للعدد المركب

إذا كان

$$Z = (x,y) \Rightarrow Z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2} , \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

en $Z = (3,-4) \Rightarrow Z^{-1} = \left(\frac{3}{9+16} , \frac{-(-4)}{9+16} \right) = \left(\frac{3}{25} , \frac{}{2} \right.$

قسمة الأعداد المركبة

القسمة هي الضرب في المعكوس الضربي للمقام

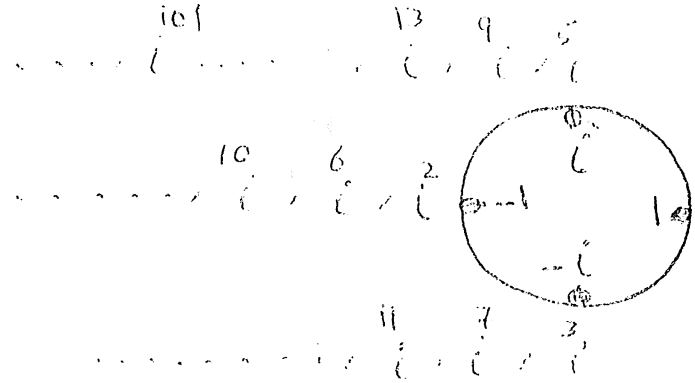
$$\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 \cdot Z_2^{-1}$$

en $\frac{(4,6)}{(1,1)} = (4,6)(1,1)^{-1} = (4,6)\left(\frac{1}{2} , \frac{-1}{2} \right)$

$$= \left(\frac{4-(-6)}{2} , \frac{-4+6}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{10}{2} , \frac{2}{2} \right) = (5,1)$$

العدد i ليكن وضح قاعدة الاختيار (i) ذات اى عدد صحيح



اذا كان أس (i) عدد زوجي يقبل القسمة على 4 فالناتج هو 1

مثل $i^{4}=1$ ، $i^{8}=1$ ، $i^{100}=1$

اذا كان أس (i) عدد زوجي ولا يقبل القسمة على 4 فالناتج هو -1

مثل $i^{2}=-1$ ، $i^{22}=-1$ ، $i^{202}=-1$

اذا كان أس (i) عدد فردي ، لكن n زائد $1-n$ يقبل القسمة على 4 فالناتج هو i

مثل $i^{25}=i$ ، $i^{97}=i$ ، $i^{-23}=i$

اذا كان أس (i) عدد فردي ، لكن n زائد $1-n$ لا يقبل القسمة على 4 فالناتج هو $-i$

مثل $i^{19}=-i$ ، $i^{51}=-i$ ، $i^{179}=-i$

الأس السالب : يتحول إلى موجب بالمقلوب واجراء نفس السابق

مثل $i^{-31}=\frac{1}{i^{31}}=\frac{1}{-i}$ ، $i^{6}=-1$

$i^{-3}=\frac{1}{i^{3}}=\frac{1}{-(-i)}=i$