العمليات الجبرية على الاعداد المركبة في الصورة الجبرية

• الجمع والطرح :

إذا كان $Z_1 = 3+4i$ ، $Z_2 = 5-7i$

فإن

$Z_1 + Z_2 = 3+4i+5-7i$ جمع الحدود المتشابهة

$= (3+5) + (4i-7i) = 8-3i$

وكذلك

$Z_1 - Z_2 = 3+4i-(5-7i)$ يلزم فتح قوس بعد الاشارة السالبة

$= 3+4i-5+7i$

• الضرب : الضرب المباشر بالطريقة العمودية ثم جمع الحدود المتشابهة

إذا كان

$Z_1 = 3+4i$ ، $Z_2 = 5-7i$

$$\begin{array}{r} 3+4i \\ 5-7i \\ \hline 15+20i \\ -21i-28i^2 \\ \hline 15-i-28(-1) \end{array}$$

$\therefore Z_1 \cdot Z_2 = 15-i-28(-1)$

$= 15-i+28$

$= 43-i$

• مرافق العدد المركب

مرافق $x+iy$ هو $x-iy$ وتغير اشارة i

مرافق $x-iy$ هو $x+iy$

فمثلاً مرافق $7+5i$ هو $7-5i$

مرافق $7-i$ هو $7-i$

مرافق $10i$ هو $-10i$

ملاحظات

① العدد المركب + مرافقه ⇐ $x+iy + x-iy = 2x$ عدد حقيقي

② العدد المركب − مرافقه ⇐ $(x+iy)-(x-iy) = 2iy$ عدد تخيلي

③ العدد المركب × مرافقه ⇐ $(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$ عدد حقيقي

العدد المركب × مرافقه = مربع الأول − مربع الثاني
الجزء الحقيقي الجزء التخيلي

مثلا $(3+i)(3-i) = 9-i^2 = 9+1 = 10$

• قسمة الأعداد المركبة هي الضرب في مرافق المقام وذلك للتخلص من i في المقام

مثلا $\frac{11-7i}{1+i}$ بالضرب في مرافق المقام $\Rightarrow \frac{11-7i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}$

$= \frac{4-18i}{1-i^2} = \frac{4-18i}{2} = 2-9i$

ج أوجد قيمة $\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$

$i^4=1$ ، $i^9=i$ ، $i^{16}=1$ ، $i^5=i$ ، $i^{10}=-1$ ، $i^{15}=-i$

$\therefore \frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}} = \frac{1+i+1}{2-i-1+i} = \frac{2+i}{1} = 2+i$

ex اذا كان $z_1 = \frac{7+i}{2+i}$, $z_2 = \frac{2+4i}{1+i}$

اثبت ان $z_2 - z_1$ مترافقان ثم اوجد قيمة $z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2$

Sol $z_1 = \frac{7+i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{15-5i}{4-i^2} = \frac{15-5i}{5}$

$= \boxed{3-i}$

$z_2 = \frac{2+4i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{6+2i}{1-i^2} = \frac{6+2i}{2}$

$= \boxed{3+i}$

$\therefore z_1, z_2$ مترافقان

* $z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 = z_1 z_2 (z_1 + z_2)$

$= (3-i)(3+i)[3-i+3+i]$

$= (9-i^2)(6) = 10(6) = 60$

ex اذا كان $z = \frac{3+i}{2-i} - \frac{5}{1-2i} - \frac{4}{i}$ اوجد z^{-1} ,

Sol نضع z في ابسط صورة

$\frac{3+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$

$\frac{5}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{5+10i}{5} = 1+2i$

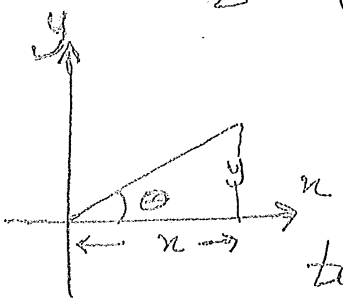
$\frac{4}{i} = -4i$

$\therefore z = 1+i-(1+2i)-(-4i) = 3i \Rightarrow z^{-1} = -\frac{1}{3}i$

العدد المركب على الصورة القطبية

أو الإحداثيات القطبية

إذا كان $z = x + iy$ فإن $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$



حيث r المقدار أو الإحداثي القطبي

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

θ الاتجاه أو الزاوية القطبية

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

مثال: ضع العدد $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ في الصورة القطبية.

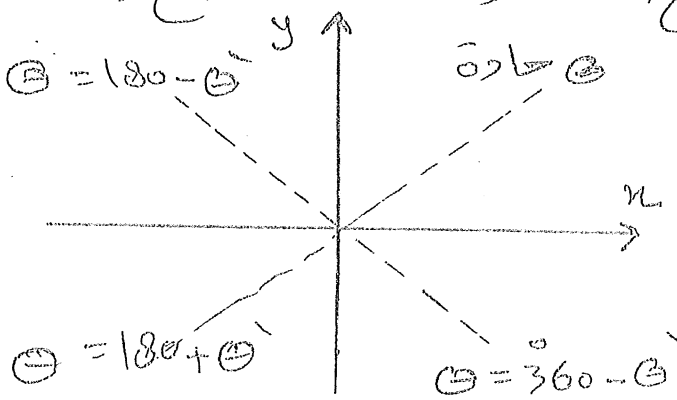
Sol $x = 2$, $y = 2\sqrt{3}$

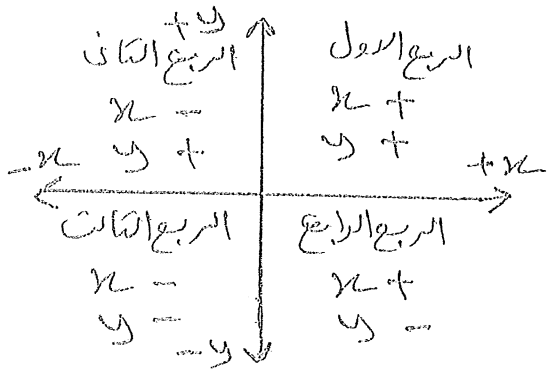
$$\Rightarrow r = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\therefore z = 4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$$

ملاحظة: إذا كان العدد يقع في الربع الثاني أو الثالث أو الرابع فإنه





ملاحظة: لإيجاد الزاوية المنتهية في أي ربع نتبع الآتي

(a) نحدد الربع المشترك فيه العدد على ضوء إشارات x ، y

(b) إيجاد $\tan\theta$ مأخذ قيمتها المطلقة فقط [لأنه تم سابقاً تحديد الربع]

(c) التعويض عن قيمة θ لمعرفة θ حسب الربع المشترك فيه العدد

مثال ضع العدد $Z=-1+\sqrt{3}i$ على الصورة القطبية

Sol $x=-1$ $\quad y=\sqrt{3}$

x^- , y^+ $\Rightarrow$ Z in الربع الثاني

$\Rightarrow r=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$, $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$

$\Rightarrow \theta=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

$\therefore Z=2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$

مثال ضع العدد $Z=2\sqrt{3}-2i$ على الصورة القطبية

Sol $x=2\sqrt{3}$, $y=-2$

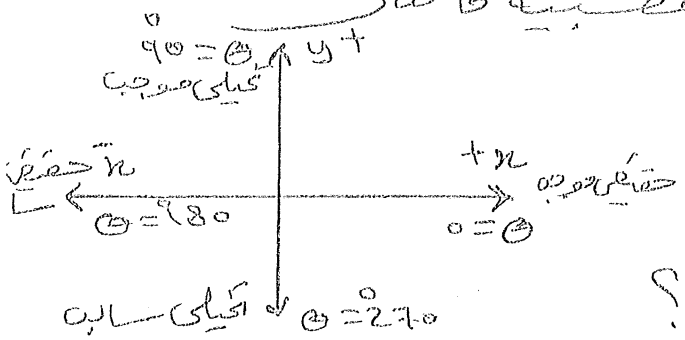
x^+ , y^- $\Rightarrow$ Z in الربع الرابع

$r=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$, $\tan\theta=\frac{-2}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \theta=360^\circ-30^\circ=330^\circ$

$\therefore Z=4(\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ)$

ملاحظة اذا كان العدد يتكون من الجزء الحقيقي فقط أو الجزء التخيلي فقط . فيتم تحويله إلى الصورة القطبية كالتالي



مثال حول الآتي إلى الصورة القطبية ؟

$Z_1=3$ $\quad Z_2=8i$ $\quad Z_3=-7i$

$Z_1=3(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)$, $Z_2=8(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$

$Z_3=7(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ)$

العمليات على الأعداد المركبة في الصورة القطبية

إذا كان $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

فإن

① الضرب

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

في حالة الضرب نضرب المقادير ونجمع الزوايا

② القسمة

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

في حالة القسمة نقسم المقادير ونطرح الزوايا

③ المعكوس الضربي

$$z_1^{-1} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

مثال: إذا كانت $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ ، $z_2 = 6(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$

فأوجد $z_1 \cdot z_2$ ، $\frac{z_2}{z_1}$ ، z_1^{-1}

- $z_1 \cdot z_2 = 2\times 6[\cos(30+150) + i\sin(30+150)]$
  $= 12(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 12(-1 + i(0)) = -12$
- $\frac{z_2}{z_1} = \frac{6}{2}[\cos(150-30) + i\sin(150-30)]$
  $= 3(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
- $z_1^{-1} = \frac{1}{2}(\cos 30^\circ - i\sin 30^\circ) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right] = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$