مليات الصفية الأولية على المصفوفات

تبادل صفان $R_{i_1} \longleftrightarrow R_{i_2}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \longleftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

استبدال صف « بضرب عناصر الصف » في عدد غير صفري K $\quad R_i \longleftrightarrow KR_i$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 = 2R_3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

استبدال صف بمجموع حاصل ضرب صف آخر في عدد $(K \neq 0)$ مع الصف نفسه

$$R_i \longleftrightarrow R_{i_1} + KR_{i_2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \longrightarrow R_3 + 2R_1} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \\ 2 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

استبدال صف بمجموع حاصل ضرب صف آخر في عدد $(K \neq 0)$ مع حاصل ضرب الصف نفسه في عدد $(C \neq 0)$

$$R_{i_1} \leftrightarrow KR_{i_1} + CR_{i_2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \longrightarrow 2R_2 + 3R_1} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 11 & 19 & 14 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

ع: باستخدام العمليات الصفية البسيطة حول المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 21 \end{bmatrix}$ إلى الصورة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 21 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_3' \longrightarrow R_3 - R_1 \\ R_2' \longrightarrow R_2 - 2R_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 19 \end{bmatrix}, \; R_2' \longrightarrow -R_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1' \longrightarrow R_1 + R_2 \\ R_3' \longrightarrow R_3 - 6R_2 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} R_1' = R_1 - 5R_3 \\ R_2' = R_2 - 3R_3 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \#$$

مصفوفة المتدرجة

المصفوفة المتدرجة تحقق الشروط الاتية:

الصفوف الصفرية اذا وجدت تكون في آخر المصفوفة

كل مدخل غير صفري في اى صف يكون على يمين المدخل الغير صفري

للصف السابق له والشكل العام لها هو

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{1j} & \cdots & & & & & & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{2j} & \cdots & & & & & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3j} & \cdots & & & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4j} & \cdots & & a_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5j} \cdots & a_{5n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

س بين اى من المصفوفات الاتية متدرجة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad B \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

ليست متدرجة

المصفوفة المتدرجة المختزلة صفياً [المصفوفة القانونية]

المصفوفة القانونية تحقق الشروط:

1] المصفوفة في شكل درجي

2] كل مدخل غير صفري يساوي 1 وكل العناصر الاخرى في ذلك العمود أصفار

س بين اى من المصفوفات الاتية قانونية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

X

ملحوظة

عند تحويل المصفوفة الموسعة $[A:C]$ إلى الصورة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & L \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array}\right]$$

فإن هذه الصورة تسمى

صورة الشكل الصفي المتدرج القانوني وهي أبسط صورة لهذا الشكل

ريقة ايجاد المعكوس الضربي للمصفوفة من النوع 3×3

[طريقة المصفوفة الموسعة [المختزلة]]

نكون مصفوفة جديدة $[A \mid I]$ ثم نقوم بإجراء العمليات الأولية على المصفوفة حتى نصل الى الصورة $[I \mid B]$ فتكون $B = A^{-1}$

ex: بطريقة المصفوفة الموسعة أوجد A^{-1} للمصفوفة
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (1)\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (3) - (8) + (6) = 1$$

$|A| \neq 0 \implies A^{-1}$ موجود

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2' \longrightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3' \longrightarrow R_3 + 2R_1 \end{array} \implies \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_1' \longrightarrow R_1 - 2R_2 \implies \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1' \longrightarrow R_1 - R_3 \\ R_2' \longrightarrow R_2 - R_3 \end{array} \implies \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ex: مستخدماً العمليات الصفية الأولية أوجد B^{-1} للمصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة

هي رتبة مصفوفة الوحدة التي يمكن الحصول عليها من المصفوفة المختزلة [المصفوفة القانونية] ويرمز لها بالرمز r

ع أوجد رتبة المصفوفات الآتية: $A=\begin{bmatrix}3&9&2\\1&5&6\\2&7&4\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}2&1&-3&-6\\3&-3&1&2\\1&1&1&2\end{bmatrix}$

<u>sol</u>

- $A=\begin{bmatrix}3&9&2\\1&5&6\\2&7&4\end{bmatrix} \quad R_1 \Leftrightarrow R_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix}1&5&6\\3&9&2\\2&7&4\end{bmatrix}$

$$\begin{matrix}R_2'=R_2-3R_1\\R_3'=R_3-2R_1\end{matrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}1&5&6\\0&-6&-16\\0&-3&-8\end{bmatrix}, \quad R_2'=\frac{-1}{6}R_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix}1&5&6\\0&1&\frac{16}{6}\\0&-3&-8\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}R_1'=R_1-5R_2\\R_3'=R_3+3R_2\end{matrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&\frac{-22}{3}\\0&1&\frac{16}{6}\\0&0&0\end{bmatrix} \Longrightarrow r(A)=2$$

- $B=\begin{bmatrix}2&1&-3&-6\\3&-3&1&2\\1&1&1&2\end{bmatrix} \quad R_1 \Leftrightarrow R_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix}1&1&1&2\\3&-3&1&2\\2&1&-3&-6\end{bmatrix}$

$$\begin{matrix}R_2'=R_2-3R_1\\R_3'=R_3-2R_1\end{matrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&-6&-2&-4\\0&-1&-5&-10\end{bmatrix}, \quad R_2'=\frac{-1}{6}R_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&-1&-5&-10\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}R_1'=R_1-R_2\\R_3'=R_3+R_2\end{matrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&\frac{-14}{3}&\frac{-28}{3}\end{bmatrix}, \quad R_3'=\frac{-3}{14}R_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}R_1'=R_1-\frac{2}{3}R_3\\R_2'=R_2-\frac{1}{3}R_3\end{matrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} \Longrightarrow r(B)=3$$

استخدام المصفوفات في حل المعادلات الخطية

لاً: معادلتان في مجهولين

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \quad - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

يوجد لها حل وحيد. وللإيجاد نتبع الآتى:

تحويل المعادلات إلى صورة مصفوفية كالآتى

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات — مصفوفة المجاهيل — مصفوفة الثوابت

ويمكن كتابتها على صورة معادلة [المعادلة المصفوفية]

$$AX = C$$

المطلوب هنا هو حل المعادلة ؟

يكون الحل بضرب الطرفين في A^{-1} من اليسار

$$A^{-1}AX = A^{-1}C$$

$$X = A^{-1}C$$

$$X = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Ex مستخدماً المصفوفات حل نظام المعادلات الآتية

$$x - 2y = 5 \quad , \quad 2x - y = 4$$

sol

$$x - 2y = 5$$
$$2x - y = 4 \quad \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\because X = A^{-1} C$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{3} + \frac{8}{3} \\ \frac{-10}{3} + \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ثانياً : ثلاث معادلات في ثلاث مجاهيل

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned} \quad , \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

يوجد حل وحيد ولإيجاده نتبع نفس الخطوات السابقة

الصورة المصفوفية

$$AX = D$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

حل المعادلة هو

$$\boxed{X = A^{-1} D}$$

$$X = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

ـ باستخدام المصفوفات أوجد حل نظام المعادلات

$3x-2y-z=2$ ، $-4x+y-z=1$ ، $2x+z=-1$

<u>sol</u>.

$$3x-2y-z=2$$
$$-4x+y-z=1$$
$$2x+z=-1$$

$$, A=\begin{bmatrix}3&-2&-1\\-4&1&-1\\2&0&1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\Delta=\left|\begin{matrix}3&-2&-1\\-4&1&-1\\2&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}3&-2\\-4&1\\2&0\end{matrix}$$

$$-2 \quad 0 \quad 8 \qquad\qquad 3 \quad 4 \quad 0$$

$$\Delta=7-6=1\neq 0$$

∴ يوجد حل وحيد

والحل هو $X=A^{-1}D$

لذا نوجد A^{-1}

$$\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-4&-1\\2&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-4&1\\2&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-2&-1\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&-1\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&-2\\2&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}-2&-1\\1&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&-1\\-4&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&-2\\-4&1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&5&-\\3&7&-5\end{bmatrix}$$

$$adj(A)=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\-2&-4&-5\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\-2&-4&-5\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}D\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\-2&-4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$$

الحل هو

$$\therefore \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$$

ملاحظات هامة

تستخدم هذه الطريقة لحل منظومة المعادلات الخطية التى تكون فيها عدد المعادلات = عدد المجاهيل

I اذا كان $\Delta \neq 0$ فانه يوجد حل وحيد للمنظومة

II اذا كان $\Delta = 0$ هناك احتمالان

1 $\Delta = 0$ و $adj(A) \cdot D = 0$ فإنه يوجد عدد لا نهائى من الحلول ويتم ايجاده بوضع $Z = K$ ثم نوجد x , y بدلالة K

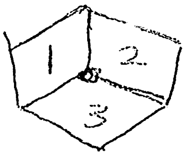
2 $\Delta = 0$ و $adj(A) \cdot D \neq 0$ فإنه لا يوجد حل

المعنى الهندسى للمعادلات

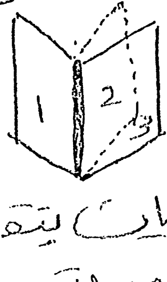
$$a_1 x + b_1 y + c_1 Z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 Z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 Z = d_3$$

فى الفراغ تمثل ثلاث مستويات وهذه المستويات يوجد لها

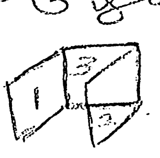
I حل وحيد اذا كانت المستويات متقاطعة فى نقطة واحدة



II عدد لا نهائى من الحلول اذا كانت المستويات متقاطعة فى خط مستقيم



III لا يوجد حل اذا كانت المستويات يتقاطع كل اثنان منها فى خط مستقيم وخطوط تقاطعها متوازية اى لا توجد اى نقطة تقع على المستويات الثلاثة معاً



حل المعادلات المتجانسة

[مصفوفة الثوابت أصفار]

$$a_1x + b_1y + \quad = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

هناك احتمالات للحل

$\Delta \neq 0$

حل وحيد وهو

$x = y = z = 0$

ويسمى بالحل التافه أو الحل الصفري

أي أن المستويات تتقاطع في نقطة الأصل

$\Delta = 0$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول

ويكون الحل العام بوضع $Z = K$

ثم نوجد x, y بدلالة K

أي أن المستويات الثلاثة تتقاطع في خط مستقيم

ملاحظة منظومة المعادلات التي يكون لها حل تسمى منظومة متوافقة والتي ليس لها حل منظومة غير متوافقة

ex أوجد حل منظومة المعادلات الآتية.

$x + y + z = 1 \quad , \quad 3x + z - y + 2 = 0 \quad , \quad 5x + z = 3y - 5$

① نرتب المعادلات

$$x + y + z = 1$$
$$3x - y + z = -2$$
$$5x - 3y + z = -5$$

② نوجد قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{matrix}$$

$$\Delta = (-1 + 5 - 9) - (-5 - 3 + 3)$$
$$= -5 + 5 = 0$$

نوجد $adj(A)$

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

لنوجد $adj(A) \cdot D$

$$adj(A) \cdot D = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول

2] يكون الحل العام بوضع $z = k$ في المعادلات

$$x + y + k = 1 \quad \text{------} ①$$
$$3x - y + k = -2 \quad \text{------}$$
$$4x + 2k = -1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-1-2k}{4}}$$

بالتعويض عن قيمة x في المعادلة ① لإيجاد قيمة y

$$\frac{-1-2k}{4} + y + k = 1 \Rightarrow y = \frac{1+2k}{4} - k + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{5-2k}{4}} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1-2k}{4} \\ \frac{5-2k}{4} \\ k \end{bmatrix}$$