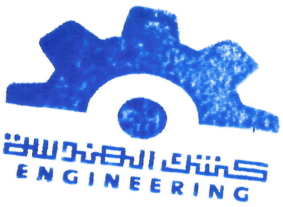
الفضاء الاتجاهي

Vector space



تعريف المجال F

هو مجموعة غير خالية تعرف عليها عمليتي الجمع والضرب بحيث تحقق الشروط

① الجمع : الانغلاق - التنسيق - التبديل - المحايد الجمعي - المعكوس الجمعي

② الضرب : الانغلاق - التنسيق - التبديل - المحايد الضربي - المعكوس الضربي

تعريف الفضاء الاتجاهي V

هو مجموعة V (غير خالية) من العناصر معرفة على المجال F تحت عمليتي الجمع الاتجاهي والضرب في كمية قياسية تحقق الشروط

① عملية الجمع الاتجاهي

اذا كانت $x, y, z \in V$ فإن

خاصية الانغلاق ① $x+y \in V$

خاصية الابدال ② $x+y = y+x$

خاصية التنسيق ③ $(x+y)+z = x+(y+z)$

المحايد الجمعي ④ $x+0 = 0+x = x$

لكل عنصر يوجد معكوس جمعي ⑤ $x+(-x) = (-x)+(x) = 0$

② الضرب في كمية قياسية

اذا كانت $x, y \in V$ ، $\alpha, \beta \in F$ كميات قياسية

خاصية الانغلاق ⑥ $\alpha x \in V$

خاصية التنسيق ⑦ $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(8) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ خاصية التوزيع

(9) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ خاصية التوزيع

(10) $1.x = x.1 = x$ المحايد الضربي

المجموعة V التي تحقق الشروط السابقة تسمى فضاءً اتجاهياً معرف على المجال F

ملاحظة:
- تسمى عناصر الفضاء الاتجاهي V بالمتجهات
- الفضاء الصفري $V = \{0\}$

أنواع الفضاءات الاتجاهية

① إذا كان $F = \mathbb{R}$ يسمى فضاء اتجاهي حقيقي $\mathbb{R}^n$

② إذا كان $F = \mathbb{C}$ يسمى فضاء اتجاهي مركب $\mathbb{C}^n$

③ فضاء الدوال متعدد الحدود P_n مثلاً

(a) $P(x) = a_0$ متعددة حدود من الدرجة صفر

(b) $P_1(x) = \{a_0 + a_1 x : a_1, a_2 \in R\}$ متعددة حدود من الدرجة الأولى

(c) $P_n(x) = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_0, \ldots a_n \in R\}$ متعددة حدود من الدرجة n

④ فضاء المصفوفات $M_{m\times n}$

⑤ فضاء الدوال المتصلة $C[a,b]$

ex هل المجموعة $V=\{(a,b): a,b\in R\}$ تكون فضاء اتجاهي

مع عمليتي الجمع والضرب في عدد الحرفيين كالتالي

- $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2)$
- $\alpha(a,b)=(\alpha a, \alpha b)\ ,\ \alpha\in R$

sol جميع خواص الفضاء الاتجاهي متحققة على هذه المجموعة

$\therefore V$ فضاء اتجاهي على R (فضاء اتجاهي حقيقي)

هنا $V=R^2$

ex هل المجموعة

$$V=\{(x_1,x_2): x_1,x_2\in R, x_2\geq 0\}$$

تكون فضاء اتجاهي أم لا؟

هذه المجموعة لا تكون فضاء اتجاهي لأنه إذا كان

$(1,2)\in V\ ,\ \alpha=-2$

فإن

$$\alpha V=-2(1,2)=(-2,-4)\notin V$$

$\therefore V$ ليست فضاء اتجاهي

ex إذا كانت

$$V=\{(a,b): a,b\in R\}$$

معرفة تحت عمليتي الجمع والضرب في عدد كالتالي

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2)\ ,\ \alpha(a,b)=(\alpha a, b)$$

هل V فضاء اتجاهي أم لا؟ سؤال للطالب

الفضاء الجزئي

subspace

نقول ان W فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي V اذا كانت W مجموعة جزئية غير خالية من V تحقق شرطين هما

① $\forall u, v \in W \Rightarrow u+v \in W$

② $\forall u \in W, k \in R \Rightarrow ku \in W$

ملاحظة: لكل فضاء اتجاهي V يوجد على الأقل فضاءان جزئيان هما الفضاء نفسه والفضاء الصفري

مثال: اذا كانت

$$W = \{(x, y, 1) : x, y \in R\}$$

هل W فضاء جزئي من R^3 ؟

Sol

let $u, v \in W$?

$u = (x_1, y_1, 1)$; $x_1, y_1 \in R$

$v = (x_2, y_2, 1)$; $x_2, y_2 \in R$

① $u+v = (x_1, y_1, 1) + (x_2, y_2, 1) = (x_1+x_2, y_1+y_2, 2) \notin W$

∴ W ليست فضاء جزئي من R^3 $\quad W \not\subseteq R^3$

ex هل المجموعة $W=\left\{\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$ فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي $M_{2\times 3}$ ؟

Sol

let $u,v \in W$ ، $u=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ ، $v=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$

① $u+v=\begin{bmatrix} \underbrace{a_1+a_2}_{\in R} & \underbrace{b_1+b_2}_{\in R} & 0 \\ 0 & \underbrace{c_1+c_2}_{\in R} & \underbrace{d_1+d_2}_{\in R} \end{bmatrix} \Rightarrow u+v \in W$

② let $k \in R$

$$ku=k\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underbrace{ka_1}_{\in R} & \underbrace{kb_1}_{\in R} & 0 \\ 0 & \underbrace{kc_1}_{\in R} & \underbrace{kd_1}_{\in R} \end{bmatrix} \in W$$

$\therefore W$ تكون فضاء جزئي من $M_{2\times 3}$ $\quad W \subseteq M_{2\times 3}$

exe

1 اذا كانت $W=\{(a,b,a+b), a,b \in R\}$ هل W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ ؟

2 اذا كانت $W=\{(1,a), a \in \mathbb{R}\}$ هل W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^2$ ؟

3 اثبت ان $W=\{(a,b,c) : a^2+b^2+c^2 \leq 1\}$ ليست فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ ؟

4 اثبت ان $W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \Delta=0\right\}$ ليست فضاء جزئي من $M_{2\times 2}$

التركيبات الخطية

تعريف

اذا كان $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots v_n$ متجهات في الفضاء V

والاعداد $k_1, k_2, \ldots\ldots \in \mathbb{R}$ فإن w يسمى تركيبة خطية للمتجهات السابقة اذا كان

$$w = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots\ldots\ldots + k_nv_n$$

بمعنى آخر ان

$$w = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$$

ex اذا كان

$$u = (6,4,2),\ v = (1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$$

بين أن

(a) w تكون تركيبة خطية من u, v $\quad w = (9,2,7)$

(b) N لا تكون تركيبة خطية من u, v حيث $N = (4,-1,8)$

sol

(a) $w = k_1v + k_2u$

$$(9,2,7) = k_1(1,2,-1) + k_2(6,4,2)$$

$$\Rightarrow \quad 9 = k_1 + 6k_2$$
$$2 = 2k_1 + 4k_2$$
$$7 = -k_1 + 2k_2$$

وحل النظام السابق نضعها في الشكل الصفي المختزل

$$k_1+6k_2=9$$
$$2k_1+4k_2=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{array}\right]$$
$$-k_1+2k_2=7$$

$$R_2=R_2-2R_1$$
$$R_3=R_3+R_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 8 & 16 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

من R_2 نجد أن $-8k_2=-16 \Leftarrow \boxed{k_2=2}$

من R_1 نجد أن $k_1+6k_2=9 \Leftarrow k_1=9-12 \Leftarrow \boxed{k_1=-3}$

$$\Rightarrow w=-3v+2u$$

$$(9,2,7) \overset{?}{=} -3(1,2,-1)+2(6,4,2)$$

$$=(-3,-6,3)+(12,8,4)=(9,2,7)=w$$

$\therefore w$ تركيبة خطية من u,v

b $N=k_1v+k_2u$

$$(4,-1,8)=k_1(1,2,-1)+k_2(6,4,2)$$

$$4=k_1+6k_2$$
$$-1=2k_1+4k_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$
$$8=-k_1+2k_2$$

بتحويلها إلى الشكل الصفي المختزل

$$R_2 = R_2 - 2R_1$$
$$R_3 = R_3 + R_1$$
$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 8 & 12 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

النظام غير متوافق [لا يوجد حل]

∴ V لا تكون تركيبة خطية من

ex حل المثال $V=(2,-5,3)$ هو تركيبة خطية من المتجهات

$e_1=(1,-3,2)$, $e_2=(2,-4,-1)$, $e_3=(1,-5,7)$

Sol $k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3=V$

$$k_1(1,-3,2)+k_2(2,-4,-1)+k_3(1,-5,7)=(2,-5,3)$$

$$\begin{aligned} k_1+2k_2+k_3 &= 2 \\ -3k_1-4k_2-5k_3 &= -5 \\ 2k_1-k_2+7k_3 &= 3 \end{aligned} \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & -5 & -5 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

$$R_2 = R_2 + 3R_1$$
$$R_3 = R_3 - 2R_1$$
$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{array}\right]$$

$$R_2 = \frac{1}{2}R_2 \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{array}\right], \quad \begin{aligned} R_1 &= R_1 - 2R_2 \\ R_3 &= R_3 + 5R_2 \end{aligned} \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

النظام غير متوافق [لا يوجد حل]

بمعنى آخر لم نحصل على مضاعفة الوحدة

∴ V ليست تركيبة خطية للمتجهات e_1, e_2, e_3

ex اكتب المصفوفة $E=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ على شكل تركيب خطي من المصفوفات

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

Sol $\because E=k_1A+k_2B+k_3C$ *

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1 & k_1+2k_3\\ k_1+k_2 & k_2-k_3\end{bmatrix}$$

بمساواة العناصر المتناظرة

$\boxed{k_1=3}$

$\because k_1+k_2=1 \Rightarrow k_2=1-k_1=1-3 \Rightarrow \boxed{k_2=-2}$

$\because k_1+2k_3=1 \Rightarrow 2k_3=1-k_1=-2 \Rightarrow \boxed{k_3=-1}$

* بالتعويض عن قيم k_1 في

$\therefore E=3A-2B-C$

ex أوجد قيمة a التي تجعل المتجه $V=(1,a,5)$ تركيبة خطية للمتجهين

$u_2=(2,-1,1)$ $=(1,-3,2)$

Sol: $\because V=k_1u_1+k_2u_2$

$$(1,a,5)=k_1(1,-3,2)+k_2(2,-1,1)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} k_1+2k_2&=1\\ -3k_1-k_2&=a\\ 2k_1+k_2&=5 \end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1\\ -3 & -1 & a\\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} R_2&=R_2+3R_1\\ R_3&=R_3-2R_1 \end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1\\ 0 & 5 & a+3\\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

$\Leftarrow R_3$ من

$$-3k_2=3 \Leftarrow \boxed{k_2=-1}$$

$\Leftarrow R_2$ من

$$5k_2=a+3 \Leftarrow 5(-1)=a+3$$

$$\Rightarrow \boxed{a=-8}$$

ex عبر عن $P_2(t)=t^2+4t-3$ متعددة الحدود كتركيبة خطية لمتعددات الحدود

$$e_1=t^2-2t+5 \qquad e_2=2t^2-3t \qquad e_3=t+3$$

sol يمكن وضع متعددات الحدود في الشكل الآتي

$$P_2=(1,4,-3)$$

$$e_1=(1,-2,5)$$

$$e_2=(2,-3,0)$$

$$e_3=(0,1,3)$$

$\therefore P_2 = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3$

$(1,4,-3) = k_1(1,-2,5) + k_2(2,-3,0) + k_3(0,1,3)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} k_1 + 2k_2 &= 1 \\ -2k_1 - 3k_2 + k_3 &= 4 \\ 5k_1 + 3k_3 &= -3 \end{aligned} \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} R_2 &= R_2 + 2R_1 \\ R_3 &= R_3 - 5R_1 \end{aligned} \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -10 & 3 & -8 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} R_1 &= R_1 - 2R_2 \\ R_3 &= R_3 + 10R_2 \end{aligned} \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 52 \end{array}\right]$$

$\therefore R_3 \Rightarrow 13k_3 = 52 \Rightarrow k_3 = \frac{52}{13} \Longrightarrow \boxed{k_3 = 4}$

$R_2 \Rightarrow k_2 + k_3 = 6 \Rightarrow k_2 = 6 - 4 \Longrightarrow \boxed{k_2 = 2}$

$R_1 \Rightarrow k_1 - 2k_3 = -11 \Rightarrow k_1 = -11 + 8 \Longrightarrow \boxed{k_1 = -3}$

$\therefore P_2(t) = -3e_1 + 2e_2 + 4e_3$ //