المحددات

• لكل مصفوفة مربعة A يرافقها محدد ويرمز له بالرمز $|A|$ أو $\det A$

$A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ محددها $|A|=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{vmatrix}$

بينما المصفوفة $B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}$ لا يرافقها محدد ؟

قيمة المحدد

أولاً : إذا كانت المصفوفة من نوع 2X2

فإنه $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$

Δ = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي − حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي

مثلاً

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2-(-12)=14$$

بعض أوجه الاختلاف بين المحدد والمصفوفة

• المحدد له قيمة عددية بينما المصفوفة منظومة مستطيلة من العناصر وليس لها قيمة عددية

• رتبة المحدد مربعة دائماً بينما رتبة المصفوفة ليس من الضروري أن تكون مربعة

• عند ضرب عدد قياسي في محدد يضرب في صف واحد فقط أو عمود واحد فقط مثلاً

$$2\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & 8\end{vmatrix}$$

بينما عند ضرب عدد قياسي في مصفوفة فإنه يضرب في جميع العناصر

مثلاً

$$2\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 6 & 12\end{bmatrix}$$

المحددات الصغرى المرافقة

المحدد المرافق لأي عنصر نحصل عليه بعد حذف عناصر الصف والعمود المشتمل على هذا العنصر

مثلاً في محدد الرتبة الثالثة التالي

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

المحدد المرافق للعنصر a هو $\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$

المحدد المرافق للعنصر d هو $\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$ ..... وهكذا .....

طرق إيجاد قيمة محدد من نوع 3×3

a طريقة المحددات الصغرى المرافقة : ويراعى فيها قاعدة الإشارات

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$ وهى كالتالى

قيمة المحدد = مجموع حاصل ضرب [عناصر أى صف أو أى عمود فى قيمة المحددات الصغرى المرافقة فى الإشارات المناظرة لها فى قاعدة الإشارات]

ex أوجد قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

بالفك عن طريق الصف الأول

$$\Delta = (+)(3)\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} (-)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

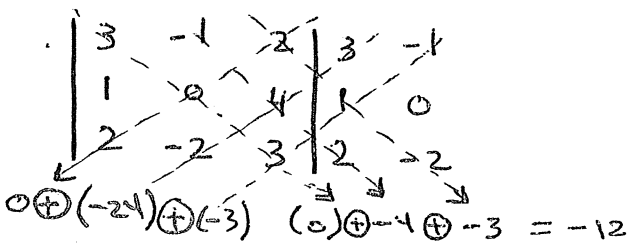
$$\Delta = 3(8) + (-5) + 2(2) = 15$$

حل آخر: عن طريق فك العمود الثانى

$$\Delta = (-)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} (-)(-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-5) + 0 + 2(10) = 15$$

ملاحظة يمكن إيجاد قيمة المحدد عن طريق فك أى صف أو أى عمود

b طريقة الأقطار : وذلك [بتكرار كتابة العمود الأول والعمود الثانى] من اعتال السابعه



Δ = [مجموع حواصل ضرب الأقطار الرئيسية — مجموع حواصل ضرب الأقطار الفرعية]

$\Delta = -12 - (-27) = 15$

حالات خاصة

اذا كان المحدد في الصورة المثلثية

ⓐ الصورة $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf$ $\Leftarrow \Delta =$ حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

مثلاً

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Leftarrow \Delta = -21$$

ⓑ الصورة $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix} = -cef$ $\Leftarrow \Delta =$ - حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي

مثلاً

$$\begin{vmatrix} 7 & -1 & -4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Leftarrow \Delta = -(-24) = 24$$

محدد الرتبة الرابعة

ويكون في صورة

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

وقاعدة الاشارات

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

وطريقة الفك عن طريق المحددات الصغرى مثلاً

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 3 & -1 \\ 4 & 9 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

وبالفك عن طريق العمود الاول

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & -1 \\ 9 & 4 & 5 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & -1 \\ 9 & 4 & 5 \end{vmatrix} + (3)\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \\ 9 & 4 & 5 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 192$$

خواص المحددات

1 محدد المصفوفة A يساوى محدد مقلوبها $|A| = |A^T|$

ex $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2$ ، $|A^T| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$

2 اذا تبادل الوضع صفان أو عمودان فإنه إشارة قيمة المحدد تتغير

ex $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2$ ، $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2$

3 انعدام المحدد [$\Delta = 0$] وذلك فى الحالات الاتية

- وجد صف أو عمود كل عناصره أصفار
- تساوى عناصر صفين أو عمودين
- وجد تناسب بين عناصر أى صفين أو أى عمودين
- وجد صف يساوى مجموع الصفين الآخرين أو عمود يساوى مجموع العمودين الآخر

ex • $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ ↑ ، $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

• $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$ ↑ تناسب ، $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

4 عند ضرب عدد قياسى فى محدد فإن الضرب يتم فى صف واحد أو عمود واحد

ex $\Delta \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 15 \Rightarrow 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 30$

نتيجة : عند ضرب المحدد فى عدد K فإن الناتج = قيمة المحدد × K

وبمعنى آخر يمكن أخذ عامل مشترك من أى صف أو أى عمود واحد فقط

5 لو تغير قيمة المحدد اذا أضفنا مضاعفات أي صف أو أي عمود نظائرها لأي صف أو عمود آخر وهذه المضاعفات قد تكون باشارات موجبة أو باشارات سالبة

مثلاً

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = k \Rightarrow \begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ d-a & e-b & f-c \\ x-3a & y-3b & z-3c \end{vmatrix} = k$$

6 اذا وجد صف أو عمود في صورة مجموع جبري عدده n من الحدود فإنه يمكن إيجاد حاصل جمع n من المحددات مثلاً

$$\begin{vmatrix} a & b & c+d \\ e & f & x+y+z \\ L & m & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & x \\ L & m & s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & y \\ L & m & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & o \\ e & f & z \\ L & m & o \end{vmatrix}$$

7 محدد حاصل ضرب مصفوفتين مربعتين A, B يساوي حاصل ضرب محدد كل منهما

$$|AB| = |A||B|$$

ونلاحظ أن $AB \neq BA$ ولكن $|AB| = |BA|$

ex $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 18 \\ -4 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & -15 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -12 & -4 & 10 \\ -28 & -15 & 20 \\ -11 & -3 & 10 \end{bmatrix}$

$|A| = -2$, $|B| = -15$, $|AB| = 30$, $|BA| = 30$

$AB \neq BA$ but $|AB| = |BA|$

8 جمع محددين

شرط جمع محددين هو تساوي جميع العناصر المتناظرة ماعدا صفين أو عمودين متناظرين

ex $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

تمارين

1 باستخدام خواص المحددات أثبت أن

2 $\begin{vmatrix} a-y & a+y & x \\ b-y & b+y & x \\ c-y & c+y & x \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} a & a & x \\ b & b & x \\ c & c & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -y & y & x \\ -y & y & x \\ -y & y & x \end{vmatrix} = 0 + (-1)\begin{vmatrix} y & y & x \\ y & y & x \\ y & y & x \end{vmatrix} = 0 \quad //$$

(العمودان الأول والثاني متساويان) (العمودان الثاني والثالث متساويان)

3 $\begin{vmatrix} a-b & a-c & c \\ a-b & c & a-c \\ -b & a-c & a+c \end{vmatrix} = a(2a-b)(2c-a)$

$C_1' = C_1 + C_2 + C_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2a-b & a-c & c \\ 2a-b & c & a-c \\ 2a-b & a-c & a+c \end{vmatrix}$

$$(2a-b)\begin{vmatrix} 1 & a-c & c \\ 1 & c & a-c \\ 1 & a-c & a+c \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} R_2' = R_2 - R_1 \\ R_3' = R_3 - R_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a-c & c \\ 0 & 2c-a & a-2c \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$\therefore \Delta = (2a-b)(2c-a)a \Rightarrow \Delta = a(2a-b)(2c-a)$ //

4 $\begin{vmatrix} x+y+2 & x & y \\ 1 & y+2x+1 & y \\ 1 & x & x+2y+1 \end{vmatrix} = 2(x+y+1)^3$

$C_1' = C_1 + C_2 + C_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2x+2y+2 & x & y \\ 2x+2y+2 & y+2x+1 & y \\ 2x+2y+2 & x & x+2y+1 \end{vmatrix}$

$$(2x+2y+2)\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & y+2x+1 & y \\ 1 & x & x+2y+1 \end{vmatrix},$$

$R_2' = R_2 - R_1$, $R_3' = R_3 - R_1$ $\Rightarrow (2x+2y+2)\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & y+x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x+y+1 \end{vmatrix}$

$= 2(x+y+1)(x+y+1)^2$

$= 2(x+y+1)^3$

2) اذا كان $x-1$ هو أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \\ -1 & 1 & x+k \end{vmatrix}$ أوجد قيمة k ؟

∵ $x-1$ أحد عوامل المحدد $\Leftarrow$ $x=1$ يجعل المحدد = صفر

بالتعويض عن $x=1$ في المحدد

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1+k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1+k \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+k+2) + (1)(1+1) = 0$$

$$-k-3+2=0 \Rightarrow \boxed{k=-1}$$

3) أوجد قيمتين للمتغير x التي تجعل $\begin{vmatrix} 3^x & x & 2x \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 49 \end{vmatrix} = 0$

∵ قيمة $\Delta = 0$ و R_1 يحتوي على المجاهيل

∵ $R_1 = R_2 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow \boxed{x=0}$ ، $9^x = 1$ ، $7^{2x} = 1$ (الأصغر) $\Rightarrow \boxed{x=0}$

، $R_1 = R_3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x=1$ ، $9^x = 1$ ، $7^{2x} = 49$ (الأصغر) $\Rightarrow \boxed{x=1}$

∴ مجموعة الحل هي $x = \{0, 1\}$

4) اذا كانت $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 2$ أوجد قيم x ؟

بالفك العادي للمحددان

$$x^2+2+x-6=2$$

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow (x+3)(x-2)=0$$

$$x=-3 \quad x=2 \Rightarrow x = \{-3, 2\}$$

5) أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & \sin 15^\circ & 1 \\ \cos 15^\circ & 1 & \sin 15^\circ \\ 1 & \cos 15^\circ & 0 \end{vmatrix}$

$$= (0 + \underbrace{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}_{=1}) - (1 + 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ)$$

$$= 1 - (1 + \underbrace{\sin 30^\circ}_{\frac{1}{2}}) = -\sin 30^\circ = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

المعكوس الضربي للمصفوفة

متى يكون للمصفوفة معكوس ضربي ؟

يكون للمصفوفة معكوس ضربي
اذا كان محددها $\Delta \neq 0$
وتسمى مصفوفة غير شاذة

لا يكون للمصفوفة معكوس ضربي
اذا كان محددها $\Delta = 0$
وتسمى مصفوفة شاذة

طريقة ايجاد المعكوس الضربي من نوع 2×2

اذا كانت $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فإن المعكوس الضربي لها هو $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

الخطوات

① تبديل عناصر القطر الرئيسي
② تغيير اشارة القطر الفرعي
③ القسمة على Δ

ملاحظة

أي مصفوفة مربعة × معكوسها الضربي = المصفوفة المحايدة

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

مثال اذا كانت $S=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد S^{-1} ؟

Sol $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}=3-5=-2\neq 0 \Rightarrow$ موجود S^{-1}

$$S^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

طريقة ايجاد المعكوس الضربي من نوع 3×3

ⓒ طريقة المصفوفة المرافقة

① نوجد محدد المصفوفة
② نوجد المحددات المرافقة وذلك باستبدال كل عنصر في المصفوفة بالمحدد الاصغر المناظر مسبوق باشارته
③ نوجد محورة مصفوفة المحددات المرافقة $adj(A)$

ex أوجد B^{-1} اذا كانت $B=\begin{bmatrix} 2 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

1) $\Delta=|B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=9\neq 0$

2) مصفوفة المحددات المرافقة

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -24 & 18 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

3) $adj(B)=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -24 & -1 & 13 \\ 18 & 0 & -9 \end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -24 & -1 & 13 \\ 18 & 0 & -9 \end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -24 & -1 & 13 \\ 18 & 0 & -9 \end{bmatrix}$

خواص المعكوس الضربي

اذا كانت A مصفوفة مربعة غير شاذة، α ثابت غير صفري

فإن

① $A=(A^{-1})^{-1}$

② $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

③ $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

④ $(\alpha A)^{-1}=\alpha A^{-1}$

⑤ $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

⑥ $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

⑦ $(A^H)^{-1}=(A^{-1})^H$

$(ABCD)^{-1}=D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ (توزيع عكسي)

⑧ المعكوس الضربي وحيد