استخدام المحددات في حل المعادلات

1 طريقة كرامر

تستخدم هذه الطريقة لحل منظومة من المعادلات التي يكون فيها

عدد المعادلات = عدد المجاهيل

أولاً: المعادلات غير المتجانسة [الحد المطلق ≠ 0]

وهي على الصورة

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

ولها محدد المعاملات هو

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

فإنه احتمالات الحل هي

- $\Delta \neq 0$: حل وحيد وهو
$$x=\frac{\Delta x}{x}$$
$$y=\frac{\Delta y}{y}$$
$$z=\frac{\Delta z}{z}$$
- $\Delta = 0$, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$: يوجد عدد لانهائي من الحلول والحل العام يتم إيجاده بوضع $z=k$ ثم نوجد x, y بدلالة k
- $\Delta = 0$, Δx or Δy or $dz \neq 0$: لا يوجد حل

$$\Delta x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

ثانياً : المعادلات المتجانسة [الحد المطلق = 0]

وهى على الصورة

$$a_1x+b_1y+c_1z=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0$$

ولها محدد المعاملات

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

احتمالات الحل هى

$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
يوجد حل وحيد هو $x=y=z=0$ ويسمى بالحل الصفرى [التافه]	يوجد عدد لانهائى من الحلول والحل العام يتم ايجاده بوضع $z=k$

مثال : باستخدام طريقة كرامر أوجد حل منظومات المعادلات الاتية

(a) $x+z=2$ ، $2x+y=4$ ، $y-z=1$

$$x+0+z=2$$
$$2x+y+0=4$$
$$0+y-z=1$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

∴ يوجد حل وحيد

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2+4-1$$
$$=1$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&4&0\\0&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&0\\1&-1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-4-2(-3)=-4+6=2$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&4\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4\\1&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}=-3-2(-2)=-3+4=1$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=1\quad,\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=2\quad,\quad z=\frac{\Delta z}{z}=1$$

(b) $x+y+z=1$
$3x-y+z=-2$
$5x-3y+z=-5$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1&1\\3&-1&1\\5&-3&1\end{vmatrix}\Rightarrow\Delta=0$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&-1&1\\-5&-3&1\end{vmatrix}=0\quad,\quad\Delta y=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&-2&1\\5&-5&1\end{vmatrix}=0\quad,\quad\Delta z=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&-1&-2\\5&-3&-5\end{vmatrix}=0$$

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول

نجعل المتغير : بوضع $z=k$

$$\Rightarrow\begin{array}{r}x+y+k=1\\3x-y+k=-2\\\hline 4x+2k=-1\end{array}$$

$$\Rightarrow\boxed{x=\frac{-1-2k}{4}}\quad,\quad\boxed{y=\frac{5-2k}{4}}$$

(c) $x+2y+2z=5$
$2x+4y-z=7$
$3x-6y+2z=10$

$$\Rightarrow\Delta=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&4&-1\\3&6&2\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}5&2&2\\7&4&-1\\10&6&2\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}4&-1\\6&2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}7&-1\\10&2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}7&4\\10&6\end{vmatrix}=26\neq0$$

∴ لا يوجد حل لمنظومة المعادلات

Ex أوجد قيمة k التي تجعل المعادلتين $(k-1)x+2y=k$, $x+ky=2$

حل وحيد عدد لانهائي من الحلول ليس لها حل

Sol $x+ky=2$

$(k-1)x+2y=k$ $\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & k \\ k-1 & 2 \end{vmatrix} = 2-(k^2-k)$

① تكون المعادلتين حل وحيد اذا كان $\Delta \neq 0$

$\Rightarrow 2-k^2+k=0 \Rightarrow k^2-k-2 \neq 0$

$(k-1)(k-2) \neq 0$

$k \neq -1 \quad k \neq 2$

∴ تكون الحل وحيد لجميع قيم k ماعدا $k=2, k=-1$

② نضع $k=2$ في المعادلتين

واضح ان قيمة $\Delta = 0$ عندما $k=2, k=1$

$x+2y=2$

$x+2y=2$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

∴ يوجد عدد لانهائي من الحلول عندما $\boxed{k=2}$

③ نضع $k=-1$ في المعادلتين

$x-y=2$

$-2x+2y=-1$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

∴ لا يوجد حل للمعادلتين عندما $\boxed{k=-1}$

مثال: اثبت ان حل منظومة المعادلات

$$2x+2y+4z=0$$
$$2x-y+4z=0$$
$$2x+3y+4z=0$$

هو الحل الغير صفري ثم أوجد الحل العام وأوجد الحل الخاص عندما $x+y=1$

Sol

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = 0$$

∴ حل منظومة المعادلات هو الحل الغير صفري.

[عدد لا نهائي من الحلول]

الحل العام: هو بوضع $\boxed{z=k}$

$$\Rightarrow 2x+2y+4k=0$$
$$\pm 2x \pm y \pm 4k=0$$
$$3y=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

∵ $2x+2y+4z=0 \Rightarrow 2x=-4k \Rightarrow \boxed{x=-2k}$

∴ الحل العام هو $(-2k, 0, k)$

والحل الخاص عندما $x+y=1$

$$\Rightarrow -2k=1 \Rightarrow \boxed{k=-\frac{1}{2}}$$

∴ الحل الخاص هو

$$\left(-2\left(\frac{-1}{2}\right), 0, -\frac{1}{2}\right) = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

② طريقة جاوس

تعتمد طريقة جاوس على كتابة منظومة المعادلات $AX=B$ على الصورة $[A|B]$ ثم نجري العمليات الصفية الأولية حتى نصل إلى الصورة $[U|\hat{B}]$ واحتمالات الحل هي

① يوجد حل وحيد: اذا كانت $r[A|B]=r[A]=n$

② يوجد عدد لانهائي من الحلول: اذا كانت $r[A|B]=r[A]<n$

③ لا يوجد حل: اذا كانت $r[A|B]\neq r[A]<n$

ex باستخدام طريقة جاوس أوجد الحل لكل من نظام المعادلات الآتية

(a) $2x+2y=5$ ، $x-4y=0$

Sol. $\begin{matrix}2x+2y=5\\x-4y=0\end{matrix} \Rightarrow [A|B]=\left[\begin{array}{cc|c}2 & 2 & 5\\ 1 & -4 & 0\end{array}\right]$

$R_2=R_2-\frac{1}{2}R_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}2 & 2 & 5\\ 0 & -5 & -\frac{5}{2}\end{array}\right]$

$-5y=-\frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}}$

$2x+2y=5 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$\therefore X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(b) $-x-y=1$

$-3x-3y=2$

$\Rightarrow [A|B]=\left[\begin{array}{cc|c}-1 & -1 & 1\\ -3 & -3 & 2\end{array}\right] \quad R_2=R_2-3R_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}-1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{array}\right]$

$0x+0y=1$ $\Rightarrow$ النظام ليس له حل

عدم تكافؤ

(c)

ⓒ $2x+z+w=5$
$y-w=-1$
$3x-z-w=0$
$4x+y+2z+w=9$

$$[A|B] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

$R_3 = R_3 - \frac{3}{2}R_1$
$R_4 = R_4 - 2R_1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$R_4 = R_4 - R_2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

∴ يوجد عدد لانهائي من الحلول

والحل العام: نضع $\boxed{w=k}$ ونعوض بقيمتها في المعادلات

$R_3 \Rightarrow -\frac{5}{2}z - \frac{5}{2}w = \frac{-15}{2}$

$-\frac{5}{2}z - \frac{5}{2}k = \frac{-15}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2}z = -\frac{15}{2} + \frac{5}{2}k$

$\therefore z = \frac{15-5k}{5} \Rightarrow \boxed{z = 3-k}$

$R_2 \Rightarrow y - w = -1 \Rightarrow y = w - 1 \Rightarrow \boxed{y = k-1}$

$R_1 \Rightarrow 2x+z+w=5 \Rightarrow 2x = 5-3+k-k \Rightarrow \boxed{x=1}$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k-1 \\ 3-k \\ k \end{bmatrix}$$

③ طريقة جاوس جوردان [المصفوفة المختزلة]

تعتمد هذه الطريقة على كتابة منظومة المعادلات $AX=B$ على الصورة $[A|B]$ ثم نجري العمليات الصفية الاولية حتى نصل إلى الصورة $[I|B]$

ex أوجد حل منظومة المعادلات الاتية باستخدام طريقة جاوس جوردان

(a) $x+z=2$
$2x+y=4$
$y-z=1$

$$\Rightarrow [A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ (2) & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2=R_2-2R_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & (1) & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_3=R_3-R_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2=R_2+2R_3$$
$$R_1=R_1-R_3$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) $x+y+z=1$
$3x-y+z=-2$
$5x-3y+z=-5$

$$\Rightarrow [A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (3) & -1 & 1 & -2 \\ (5) & -3 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$R_2=R_2-3R_1$$
$$R_3=R_3-5R_1$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & -8 & -4 & -10 \end{array}\right] \quad , R_2=\frac{-1}{4}R_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & (1) & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & (-8) & -4 & -10 \end{array}\right]$$

$$R_1=R_1-R_2$$
$$R_3=R_3+8R_2$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & (0) & (0) \end{array}\right]$$

يوجد عدد لانهائي من الحلول

متروك للطالب

تمارين

1 اذا كانت $\begin{vmatrix} x & x^2 & 5+x^3 \\ y & y^2 & 5+y^3 \\ z & z^2 & 5+z^3 \end{vmatrix} = 0$ اثبت ان $xyz = -5$

2 أوجد قيم x التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} x & 1 & -3 \\ x-1 & 0 & -4 \\ 2x & 2 & -6 \end{bmatrix}$ شاذة ؟

3 بدون فك المحددات اثبت ان $\begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & bc \\ ac & bc & ab \end{vmatrix}$

4 باستخدام العمليات الصفية أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

5 اذا كانت A مصفوفة مربعة غير شاذة وكانت $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 + 3I)$ فبين أن $A^2 + 3A - 2I = 0$

6 اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ أوجد $(AB^T)^{-1}$

ثم حل المعادلة $AB^T + I = X^T$

7 اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ بين أن $B = A^{-1}$

ثم أوجد مجموعة الحل لنظام المعادلات الآتية

$2x + z = -1$ ، $-4x + y - z = 1$ ، $3x - 2y - z = 2$

8 باستخدام طريقتين مختلفتين أوجد حل منظومة المعادلات الآتية

$x - 3y + 2z = 1$ ، $2x + y + 11z = -5$

$-3x + y - z = 4$