المصفوفات Matrix

كنتك الهندسية ENGINEERING

تعريف المصفوفة

المصفوفة A هي منظومة مستطيلة من العناصر على شكل صفوف وأعمدة موضوعة داخل قوسين على صورة [ ] أو ( )

مثل

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}+2\\4\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}3&0&4&-1\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1&2\\-3&6\\0&-4\end{bmatrix}\quad,\quad E=\begin{bmatrix}5&0&-i\\2+i&2&i\end{bmatrix}\quad,\quad F=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$$

ونأخذ المصفوفة A التعبير $A=[a_{ij}]$ حيث

a_{ij} تدل على العنصر الذي يقع في الصف i والعمود j

فمثلاً

$$b_{21}=4\quad,\quad c_{11}=3\quad,\quad d_{31}=0\quad,\quad e_{23}=i\quad,\quad f_{22}=2$$

رتبة المصفوفة أو نوع المصفوفة

هو عدد الصفوف × عدد الأعمدة

فمثلاً المصفوفة A من نوع 2×4 ، والمصفوفة B من نوع 2×1

المصفوفة C من نوع 1×4 ، المصفوفة D من نوع 3×2 ... وهكذا

أنواع المصفوفات

① مصفوفة الصف: هي مصفوفة تتكون من صف واحد وتكون من نوع $1\times n$ مثل المصفوفة C

② مصفوفة العمود: هي مصفوفة تتكون من عمود واحد وتكون من نوع $m\times 1$ مثل المصفوفة B

③ المصفوفة الحقيقية: هي المصفوفة التي عناصرها أعداد حقيقية مثل المصفوفات A, B, C, D, F

④ المصفوفة المركبة: هي المصفوفة التي عناصرها أعداد مركبة مثل المصفوفة E

) المصفوفة الثابتة : هي المصفوفة التي عناصرها جميعها متساوية

مثل المصفوفة F اي ان $a_{ij} = c$ لكل i, j

المصفوفة الصفرية : هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار

ويرمز له بالرمز O مثل المصفوفة A

) المصفوفة المربعة : هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف

يساوي عدد الأعمدة مثل المصفوفة F

وهي مصفوفة مربعة من نوع 2x2

ملاحظة المصفوفة ليس لها قيمة عددية لكنها مجرد طريقة لعرض البيانات.

تساوي المصفوفات يقال للمصفوفتين A, B بأنهما متساويتان اذا كانا من نفس النوع وعناصرهما المتناظرة متساوية

فمثلاً:

① $\begin{bmatrix} a^2-b^2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-b)(a+b) \\ 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-b)(a+b) \\ 4 \times 2 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ لانها ليست من نفس النوع

③ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ لان العناصر المتناظرة غير متساوية

مثال أوجد قيمة x, y, z التي تجعل المصفوفتين A, B متساويتان حيث

$$A = \begin{bmatrix} x+2y & -1 \\ 5 & 2x+y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & y-z \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore A = B \Rightarrow x+2y = 3$, $2x+y = 0$

② $\Rightarrow 2x+4y = 6$, $-(2x+y = 0)$

$3y = 6 \Rightarrow y = 2$

$y - z = -1 \Rightarrow 2 - z = -1 \Rightarrow \boxed{z = 3}$

$x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 4 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

المصفوفات الجزئية

هي المصفوفات المتحصل عليها من مصفوفة أصلية بعد حذف صفوف أو أعمدة منها

فاذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A_1, A_2, A_3 مصفوفات جزئية من المصفوفة A

بينما A_4 ليست مصفوفة جزئية من المصفوفة A

قطر المصفوفة

لاى مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ فان العناصر

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots\dots a_{nn}$$

تسمى قطر المصفوفة [القطر الرئيسى] فاذا كانت

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 4 \\ 6 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ فان 2، 5، 8 عناصر قطر المصفوفة

بينما المصفوفة $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ليس لها قطر

لماذا ؟

المصفوفة القطرية: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي وبذلك المصفوفة $A=[a_{ij}]$ تكون مصفوفة قطرية اذا كان $a_{ij}=0$ لكل $i\neq j$ فمثلاً

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-6&0\\0&0&5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&0\\0&-2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&0\\-2&0\end{bmatrix}$$

المصفوفتان A,B مصفوفات قطرية بينما المصفوفة C ليست قطرية

مصفوفة الوحدة [المحايدة]

هي مصفوفة قطرية بحيث كل عنصر من عناصر القطر الرئيسي فيها يكون العدد (1) ويرمز لها بالرمز I_n مثل

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}_{2\times 2},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

المصفوفة المثلثية العليا

هي مصفوفة مربعة عناصرها أسفل القطر الرئيسي أصفار ويرمز لها بالرمز U اي ان $a_{ij}=0$ لكل $i>j$ مثل المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}2&3&5\\0&1&-4\\0&0&6\end{bmatrix}$$

المصفوفة المثلثية السفلى هي مصفوفة مربعة عناصر أعلى القطر الرئيسي أصفار ويرمز لها بالرمز L اي ان $a_{ij}=0$ لكل $i<j$ مثل المصفوفة

$$B=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&2&0\\2&4&-1\end{bmatrix}$$

المصفوفة المحورة

لأى مصفوفة $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ فإن

محورة المصفوفة A والتى يرمز لها بالرمز A^T أو A' تكون

أى هى تبديل الصفوف بالأعمدة فمثلاً $A^T=[a_{ji}]_{n\times m}$

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 1\\ 8 & 4 & -3\\ 7 & -2 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & 0 & -1\end{bmatrix}_{2\times 3},\quad C=\begin{bmatrix}3 & -2 & 5\end{bmatrix}_{1\times}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}4 & 8 & 7\\ 3 & 4 & -2\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3},\quad B^T=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 2 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}_{3\times 2},\quad C^T=\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 5\end{bmatrix}_{3\times}$$

خواص المصفوفة المحورة

اذا كانت A,B,C مصفوفات α مقدار ثابت فإن

① $A=(A^T)^T$

② $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$

③ $(AB)^T=B^TA^T$

④ $(ABC)^T=C^TB^TA^T$ توزيع عكسى

⑤ $(\alpha A)^T=\alpha A^T$

⑥ $(A^n)^T=(A^T)^n$

أثر المصفوفة

هو مجموع عناصر القطر الرئيسى فى المصفوفة المربعة ويرمز له بالرمز $tr(A)$ اى ان

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

ex أوجد أثر المصفوفات الاتية

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 5\\ 0 & 3 & 7\end{bmatrix}\Rightarrow tr(A)=-2+3+7=8$$

⑤ $$B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow tr(B)=2-1=1$$

$C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -6 & 8\end{bmatrix}$ لا يمكن ايجاد $tr(C)$ ؟

خواص أثر المصفوفة

اذا كانت A,B,C مصفوفات مربعة، α مقدار ثابت فإن

① $tr(A \mp B) = tr(A) \mp tr(B)$

② $tr(AB) = tr(BA) \neq tr(A) \cdot tr(B)$

③ $tr(\alpha A) = \alpha \cdot tr(A)$ ④ $tr(A) = tr(A^T)$

⑤ $tr(ABC) = tr(BAC) = tr(CAB)$

المصفوفة المتماثلة

هي مصفوفة مربعة عناصرها أعلى القطر الرئيسي مساوية في المقدار والاشارة مع عناصرها أسفل القطر الرئيسي

اي ان $A = A^T$ مثل المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

المصفوفة ملتوية التماثل

هي مصفوفة مربعة عناصرها أعلى القطر الرئيسي مساوية في المقدار ومختلفة في الاشارة مع عناصر أسفل القطر الرئيسي وعناصر قطرها الرئيسي أصفار

اي ان $A = -A^T$ مثل المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -4\\ -1 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}0 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -2\\ -4 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

ملاحظة

- $A + A^T \Rightarrow$ مصفوفة متماثلة
- $A - A^T \Rightarrow$ مصفوفة ملتوية التماثل
- $A \times A^T \Rightarrow$ مصفوفة متماثلة

العمليات على المصفوفات

أولاً: جمع وطرح المصفوفات

في حالة جمع أو طرح المصفوفات نقوم بجمع أو طرح العناصر المتناظرة بشرط تساوي النوع

مثلاً

① $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 1 & 3 \\ -5 & 10 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 8 \\ 2 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ لا يمكن جمعهما ؟

بعض الخواص على عملية جمع المصفوفات

① المحايد الجمعي: [المصفوفة الصفرية]

هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار وتكون من نفس نوع المصفوفة المحايدة لها أي أن $A + 0 = A$. مثلاً

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

② المعكوس الجمعي: لأي مصفوفة A يوجد معكوس جمعي لها وهو تغيير إشارات جميع عناصر المصفوفة

أي أن كل (a_{ij}) في المصفوفة A لها معكوس جمعي $(a_{ij})-$

فمثلاً إذا كانت

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ فإن المعكوس الجمعي هو $-A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

٣) جمع المصفوفات عملية تبديلية

إذا كانت A, B مصفوفتان من نفس النوع فإن

$$A+B = B+A$$

٤) جمع المصفوفات عملية قياسية

إذا كانت A, B, C مصفوفات من نفس النوع فإن

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

ثانياً: ضرب عدد قياسي في مصفوفة

عند ضرب عدد قياسي في مصفوفة فإنه يضرب في جميع العناصر

مثلاً

$$2\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 16 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ex إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة C بحيث

$$3(A+C) = 2B$$

Sol

$$3\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} + C\right) = 2\begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} + 3C = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 6 \\ 8 & 4 & -10 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3C = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 6 \\ 8 & 4 & -10 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -6 & 9 & 9 \\ 12 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 14 & -5 & -19 \\ -12 & -11 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 14 & -5 & -19 \\ -12 & -11 & 0 \end{bmatrix}$$

ثالثاً: ضرب المصفوفات

الشرط اللازم لضرب مصفوفتين هو

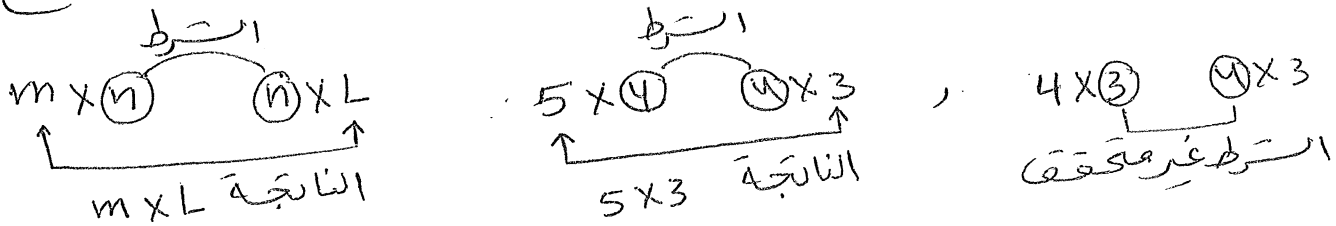
عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية

وتكون المصفوفة الناتجة نوعها

عدد صفوف المصفوفة الاولى × عدد أعمدة المصفوفة الثانية

فمثلاً: اذا ضربت مصفوفة من نوع $m \times n$ في مصفوفة من نوع $n \times L$

فشرط الضرب متحقق $n = n$ وتكون المصفوفة الناتجة من نوع $m \times L$



عناصر المصفوفة الناتجة تتكون من

حواصل ضرب صفوف المصفوفة الاولى في أعمدة المصفوفة الثانية

مثال أوجد

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

2×2 — 2×3 — الناتجة

$$= \begin{bmatrix} (2\times3)+(4\times2) & (2\times4)+(4\times7) & (2\times5)+(4\times3) \\ (0\times3)+(1\times2) & (0\times4)+(1\times7) & (0\times5)+(1\times3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 36 & 22 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

بعض الخواص على عملية ضرب المصفوفات

① المحايد الضربي: هو مصفوفة الوحدة التي يرمز لها بالرمز I_n فمثلاً

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

② عملية ضرب المصفوفات ليست تبديلية:

اذا كانت A, B مصفوفتان فإن $AB \neq BA$

ex اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$$

③ عملية ضرب المصفوفات تنسيقية

اذا كانت A, B, C مصفوفات فإن $(AB)C = A(BC)$

④ المصفوفة المربعة فقط هي التي يمكن ضربها في نفسها

ملاحظة اذا كانت I مصفوفة الوحدة فإن

$$I^2 = I \quad , \quad I^3 = I \quad , \quad \dots\dots\dots \quad I^n = I$$

ملاحظة لأي مصفوفتين A, B فإن

- $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
- $(A-B)(A+B) \neq A^2 - B^2$

مصفوفات خاصة

① المصفوفة التبادلية:

هي مصفوفة مربعة تحقق الشرط $\boxed{AB = BA}$

ex اثبت ان المصفوفتان التاليتان تبادليتان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sol

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$AB = BA \Rightarrow A, B$ مصفوفتان تبادليتان

② المصفوفة التبادلية العكسية

هي مصفوفة مربعة تحقق الشرط $\boxed{AB = -BA}$

③ المصفوفة الجامدة

هي مصفوفة مربعة تحقق الشرط $\boxed{A^2 = A}$

ونلاحظ ان المصفوفتان O, I مصفوفتان جامدتان

ex اثبت ان المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة جامدة

Sol

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$A^2 = A \Rightarrow$ A مصفوفة جامدة

④ المصفوفة عديمة القوى

هي مصفوفة مربعة تحقق الشرط $A^n = 0$

حيث $A^{n-1} \neq 0$ وتكون عديمة القوى بقوة n

ex اثبت ان المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة عديمة القوى ذات قوة 3

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore A$ مصفوفة عديمة القوى ذات قوة 3

⑤ المصفوفة المتعامدة

هي مصفوفة مربعة تحقق الشرط $AA^T = A^TA = I$

بمعنى آخر $A^T = A^{-1}$

وبمعنى آخر اذا مجموع مربعات أعمدة المصفوفة تكون متعامدة

اي اذا مجموع مربعات كل عمود $= 1$

ex اذا كانت $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ a & b \end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة فأوجد قيم a, b

$\therefore A$ مصفوفة متعامدة $\Leftarrow AA^T = I$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & a \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ .....}$$

أكمل الحل

⑥ المصفوفة المرافقة

اذا كانت A مصفوفة على الصورة $A=\begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ e+if & g+ih \end{bmatrix}$

فإن مرافق المصفوفة A والذي يرمز له بالرمز $\overline{A}$ هو

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a-ib & c-id \\ e-if & g-ih \end{bmatrix}$$

ex أوجد مرافق المصفوفة $B=\begin{bmatrix} 2 & -i & -1+5i \\ 0 & -7+i & 3i \end{bmatrix}$

Sol $\overline{B}=\begin{bmatrix} 2 & i & -1-5i \\ 0 & -7-i & -3i \end{bmatrix}$

خواص المصفوفة المرافقة

اذا كانت A,B مصفوفات مركبة، C مصفوفة حقيقية

$\propto$ ثابت مركب فإن

① $\overline{(\overline{A})}=A$

② $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$

③ $\overline{AB}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

④ $\overline{\propto A}=\propto\overline{A}$

⑤ $(\overline{A})^T=\overline{(A^T)}$

⑥ $\overline{C}=C$

⑦ المصفوفة الهيرميتية

هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي أعداد حقيقية

تحقق الشرط $\boxed{A^H=A}$ حيث $A^H=(\overline{A})^T$

ex حل المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 4 & 3+5i \\ 3-5i & -7 \end{bmatrix}$ هيرميتية أم لا؟

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 4 & 3-5i \\ 3+5i & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow (\overline{A})^T=A^H=\begin{bmatrix} 4 & 3+5i \\ 3-5i & -7 \end{bmatrix}=A$$

هيرميتية

⑧ المصفوفة الهيرميتية العكسية

هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي أعداد مركبة تحقق الشرط

$$\boxed{A^H = -A}$$

ex حل المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i \\ -3+2i & -7i \end{bmatrix}$ هيرميتية عكسية أم لا

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} -4i & 3-2i \\ -3-2i & 7i \end{bmatrix} \Rightarrow B^H = (\overline{B})^T = \begin{bmatrix} -4i & -3-2i \\ 3-2i & 7i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\overline{B})^T = B^H = -B$$

$\therefore B$ مصفوفة هيرميتية عكسية

ملاحظات هامة

1. يمكن كتابة أي مصفوفة مربعة A على صورة حاصل جمع مصفوفتين الأولى متماثلة S والثانية ملوثة التماثل K

$$A = S + K$$ أي أن

حيث $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $K = \frac{1}{2}(A - A^T)$

2. يمكن كتابة أي مصفوفة مربعة A على صورة جمع مصفوفتين الأولى هيرميتية B والثانية هيرميتية عكسية C

$$A = B + C$$ أي أن

حيث $B = \frac{1}{2}(A + A^H)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^H)$

ex اكتب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2+6i & 5+3i \\ 9-i & 4-2i \end{bmatrix}$ على شكل مصفوفتين الأولى هيرميتية B والثانية هيرميتية عكسية C ؟

تمارين

1 أوجد المصفوفة X التي تحقق العلاقة $AX = B$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Sol $A_{3\times2}\ X_{2\times1} = B_{3\times1} \Rightarrow$ let $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a-b \\ 2b \\ 4a-3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 3}$, $3a - b = 0 \Rightarrow 3a = b$

$3a = 3 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

$\therefore X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

2 أوجد قيمة كل من x, y, z التي تجعل حاصل جمع المصفوفتين مصفوفة متماثلة

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2x \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & z & -2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 1+y & 1 & 10 \\ 6 & -4z & -2 \end{bmatrix}$$

Sol $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2x \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & z & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 1+y & 1 & 10 \\ 6 & -4z & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3x \\ 3+y & 2 & 6 \\ 3 & -3z & -4 \end{bmatrix}$ مصفوفة متماثلة

$\therefore 3x = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$3 + y = 6 \Rightarrow \boxed{y = 3}$, $-3z = 6 \Rightarrow \boxed{z = -2}$

3 أوجد قيم x, y, z التي تجعل المصفوفة C ملتوية التماثل

$$C = \begin{bmatrix} x+y & -1 & y+z \\ x & 0 & 5-y \\ 8 & -6 & 1+y \end{bmatrix}$$

تكون ملتوية التماثل عندما

Sol $1 + y = 0 \Rightarrow \boxed{y = -1}$

$x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$y + z = -8 \Rightarrow z = -8 + 1 \Rightarrow \boxed{z = -7}$