المولدات الخطية

نفرض ان $S=\{V_1, V_2, V_3, \dots V_n\}$ فإن المجموعة المولدة هي مجموعة كل المتجهات التي يمكن التعبير عنها كتركيبة خطية للمتجهات في المجموعة S ويرمز لها بالرمز span(S) أي انه

$$span(S)=\{w : w=k_1V_1+k_2V_2+ \dots k_nV_n\}$$

بذلك نقول ان S تولد الفضاء V

وتعتبر المجموعة المولدة أصغر فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي

مثال: هل المجموعة $S=\{(1,5),(2,3)\}$ تولد الفضاء R^2 أم لا؟

let $w=(x,y)\in R^2$

$\therefore w=k_1V_1+k_2V_2=(x,y)$

$\Rightarrow k_1(1,5)+k_2(2,3)=(x,y)$

$\Rightarrow k_1+2k_2=x$

$5k_1+3k_2=y$

نحل المعادلتين بحذف k_1

$$\begin{array}{r} 5k_1+10k_2=5x \\ -5k_1+3k_2=y \\ \hline 7k_2=5x-y \end{array} \quad \Rightarrow \boxed{k_2=\frac{5x-y}{7}}$$

$$\Rightarrow k_1=x-2\left(\frac{5x-y}{7}\right) \quad \Rightarrow \boxed{k_1=\frac{2y-3x}{7}}$$

وهذا الحل العام وباعطاء قيم خاصة لكل من x, y نحصل على k_1, k_2 وبالتالي نحصل على R^2

$\therefore$ المجموعة S تولد الفضاء R^2 ☐

ex هل المجموعة S تولد الفضاء R^3 حيث $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ حيث

$v_1=(1,2,3)$ ، $v_2=(0,1,2)$ ، $v_3=(0,0,1)$

sol let $w=(x,y,z)\in R^3$

$\Rightarrow w=k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(x,y,z)$

$\Rightarrow k_1(1,2,3)+k_2(0,1,2)+k_3(0,0,1)=(x,y,z)$

$\Rightarrow k_1=x$

$2k_1+k_2=y$

$3k_1+2k_2+k_3=z$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 2 & 1 & 0 & y \\ 3 & 2 & 1 & z \end{array}\right]$$

$R_2'=R_2-2R_1$

$R_3'=R_3-3R_1$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-2x \\ 0 & 2 & 1 & z-3x \end{array}\right]$$

$R_3'=R_3-2R_2$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-2x \\ 0 & 0 & 1 & x+z-2y \end{array}\right]$$

$\therefore \boxed{k_1=x}$ ، $\boxed{k_2=y-2x}$ ، $\boxed{k_3=x+z-2y}$

$\therefore$ المجموعة S تولد الفضاء R^3 لأننا وصلنا إلى مصفوفة الوحدة

ملاحظة في المثال السابق في حالة الحصول على الشكل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & z+x-2y \end{array}\right]$$

المجموعة لا تولد الفضاء R^3

لأننا لم نصل إلى مصفوفة الوحدة

إشرط اللازم لكي تولد المجموعة S الفضاء R^3 هو أن

$$x+z-2y=0$$

الاستقلال الخطي

تعريف لتكن $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n \in V$ متجهات غير صفرية،

فإذا كانت $k_1V_1 + k_2V_2 + \ldots\ldots k_nV_n = 0$

بحيث أن الثوابت $k_1 = k_2 = \ldots\ldots k_n = 0$

فإن المتجهات مستقلة خطياً

بمعنى آخر لها الحل الصفري

أما إذا وجد على الأقل $k_i \neq 0$ فإن المتجهات تكون غير مستقلة (مرتبطة) خطياً.

بمعنى آخر لها حل غير الحل الصفري

مثال هل المتجهات التالية مستقلة خطياً أم مرتبطة خطياً ؟

$V_1 = (1,-2,3)$ ، $V_2 = (5,6,-1)$ ، $V_3 = (3,2,1)$

الحل $\because k_1V_1 + k_2V_2 + k_3V_3 = 0$

$$\Rightarrow k_1(1,-2,3) + k_2(5,6,-1) + k_3(3,2,1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

نجري العمليات الصفية لتحويلها إلى الشكل الصفي الآتي

$$R_2' = R_2 + 2R_1$$
$$R_3 = R_3 - 3R_1$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & -16 & -8 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = R_3 + R_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ يوجد حل غير الحل الصفري [عدد لانهائي من الحلول]

والباقي فان المتجهات v_1, v_2, v_3 غير مستقلة خطياً

حل آخر: نوجد قيمة المحدد فإذا كان $\Delta \neq 0$ فإن المتجهات

لها حل وحيد وهو الحل الصفري ($k_1 = k_2 = k_3 = 0$)

∴ المتجهات مستقلة خطياً

اما اذا كان $\Delta = 0$ فإن المتجهات مرتبطة خطياً

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 5 \\ -2 & 6 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

$$\Delta = (6+30+6) - (54-2-10)$$
$$42 - 42 = 0$$

∴ المتجهات مرتبطة خطياً ∴ النظام له عدد لانهائي من الحلول

مثال: هل المصفوفات الآتية مستقلة خطياً أم مرتبطة؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 A + k_2 B + k_3 C = 0$$

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0$$
$$k_1 + k_3 = 0$$
$$k_1 = 0 \Longrightarrow k_3 = 0 \Longrightarrow k_2 = 0$$

∴ النظام له الحل الصفري ⟸ المصفوفات مستقلة خطياً

أساس الفضاء الاتجاهي

إذا كانت $S=\{V_1, V_2, \dots V_n\}$ مجموعة منتهية من المتجهات في V نقول عن S أنها تسمى بأساس الفضاء [أساسية الفضاء] V إذا تحقق الشرطان:

① المجموعة S مستقلة خطياً ② المجموعة S تولد الفضاء V

ملاحظة: أساس الفضاء الاتجاهي ليس وحيداً

مثال: هل المتجهات $(1,1,2), (1,2,5), (5,3,4)$ تشكل أساساً للفضاء R^3 أم لا؟

Sol ① شرط الاستقلال: $K_1V_1 + K_2V_2 + K_3V_3 = 0$

$$K_1(1,1,2) + K_2(1,2,5) + K_3(5,3,4) = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 + 5K_3 &= 0 \\ K_1 + 2K_2 + 3K_3 &= 0 \\ 2K_1 + 5K_2 + 4K_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

$$\Delta = (8+6+25) - (20+15+4) = 39 - 39 = 0$$

∴ المتجهات غير مستقلة خطياً

وبالتالي لا تشكل أساس للفضاء R^3.

ex حل المتجهات $\{(2,-1,1),(1,2,3),(1,1,1)\}$ تشكل أساس للفضاء R^3 أم لا ؟

Sol ① شرط الاستقلال

$$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$$

$$k_1(1,1,1)+k_2(1,2,3)+k_3(2,-1,1)=(0,0,0)$$

$$\begin{aligned} k_1+k_2+2k_3&=0\\ k_1+2k_2-k_3&=0\\ k_1+3k_2+k_3&=0 \end{aligned} \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\Delta=(2-1+6)-(4-3+1)=5\neq 0$$

∴ المتجهات مستقلة خطيا"

② شرط المولدة للفضاء

let $w=(a,b,c)\in R^3$

$$\Rightarrow k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(a,b,c)$$

$$k_1(1,1,1)+k_2(1,2,3)+k_3(2,-1,1)=(a,b,c)$$

$$\begin{aligned} k_1+k_2+2k_3&=a\\ k_1+2k_2-k_3&=b\\ k_1+3k_2+k_3&=c \end{aligned} \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & -1 & b \\ 1 & 3 & 1 & c \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} R_2'&=R_2-R_1\\ R_3'&=R_3-R_1 \end{aligned} \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -3 & b-a \\ 0 & 2 & -1 & c-a \end{array}\right], \quad \begin{aligned} R_1'&=R_1-R_2\\ R_3'&=R_3-2R_2 \end{aligned} \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 2a-b \\ 0 & 1 & -3 & b-a \\ 0 & 0 & 5 & a-2b+c \end{array}\right]$$

$$5k_3=a-2b+c \Longrightarrow \boxed{k_3=\frac{a-2b+c}{5}}$$

$$\boxed{k_2=\frac{3c-2a-b}{5}} \quad , \quad \boxed{k_1=a+b-c}$$

∴ المتجهات تولد الفضاء R^3

∴ المجموعة تشكل أساسية للفضاء R^3

ملاحظات هامة

① اى مجموعة مكونة من متجهين أو أكثر تكون غير مستقلة خطياً اذا وفقط اذا كان أحد المتجهات تركيبة خطية من بقية المتجهات

مثلاً $S=\{V_1,V_2,V_3\}$ وكان $V_2=2V_1+4V_3$

$\therefore S=\{V_1, 2V_1+4V_3, V_3\}$

التوافيق لاتساوى صفر ⇐ المتجهات مرتبطة خطياً

② اذا كان $S=\{V_1,V_2,V_3,\dots V_n\}$ مجموعة من المتجهات فى R^n فانه اذا كان $n>r$ فإن S غير مستقلة خطياً

مثلاً

اى مجموعة من R^2 بها اكثر من متجهين تكون غير مستقلة

بعد الفضاء الاتجاهى

هو عدد عناصر الاساس فى الفضاء V

بمعنى آخر هو عدد المتجهات فى أساس الفضاء V

مثال

ليكن V فضاء جزئى فى R^4 المولد بواسطة المتجهات

$V_1=(1,-2,5,-3)$ ، $V_2=(3,8,-3,-5)$ ، $V_3=(2,3,1,-4)$

أوجد اساس لـ V وكذلك بعده

$$\therefore k_1V_1+k_2V_2+k_3V_3=0$$

$$k_1(1,-2,5,-3)+k_2(3,8,-3,-5)+k_3(2,3,1,-4)=(0,0,0,0)$$

$$k_1+3k_2+2k_3=0$$
$$-2k_1+8k_2+3k_3=0$$
$$5k_1-3k_2+k_3=0$$
$$-3k_1-5k_2-4k_3=0$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$R_2' = R_2 + 2R_1$$
$$R_3' = R_3 - 5R_1 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & -18 & -9 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{14}R_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -18 & -9 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$
$$R_4' = R_4 + 3R_1$$

$$R_1' = R_1 - 3R_2$$
$$R_3' = R_3 + 18R_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$R_4' = R_4 - 4R_2$$

∴ المتجهات V_1, V_2 تشكل اساس لـ W

وبعده $2 =$

حدد أساس ومن ثم حدد البعد للفضاء الجزئي

$$V_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1 \qquad V_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1$$
$$V_3 = t^3 + 6t - 5 \qquad V_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$$

Sol

$$\therefore k_1V_1 + k_2V_2 + k_3V_3 + k_4V_4 = 0$$
$$k_1(1,-2,4,1) + k_2(2,-3,9,-1) + k_3(1,0,6,-5) + k_4(2,-5,7,5) = (0,0,0,0)$$

$$k_1 + 2k_2 + k_3 + 2k_4 = 0$$
$$-2k_1 - 3k_2 - 5k_4 = 0$$
$$4k_1 + 9k_2 + 6k_3 + 7k_4 = 0$$
$$k_1 - k_2 - 5k_3 + 5k_4 = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_2' = R_2 + 2R_1$$
$$R_3' = R_3 - 4R_1 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$
$$R_4' = R_4 - R_1$$

$$R_1' = R_1 - 2R_2$$
$$R_3' = R_3 - R_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$R_4' = R_4 + 3R_2$$

المتجهات V_1, V_2 تشكل أساس ليتحدد الحدود

والبعد $= 2$

فضاء الصف هو فضاء جزئي من R^n يتولد من مجموعة صفوف المصفوفة $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ ويرمز له بالرمز $R(A)$

فضاء العمود هو فضاء جزئي من R^n يتولد من مجموعة أعمدة المصفوفة $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ويرمز له بالرمز $C(A)$

أساسية فضاء الصف

هي الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المختزلة [القانونية] والبعد يعرف برتبة المصفوفة Rank ويرمز له بالرمز $r(A)$

أساسية فضاء العمود

هي الأعمدة التي تناظر أعمدة مصفوفة الوحدة في المصفوفة المختزلة أو هي الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المختزلة للمصفوفة المحورة

ملحوظة أوجد فضاء الصف ـ فضاء العمود ـ أساسية فضاء الصف أساسية فضاء العمود للمصفوفة A

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 10\\ 3 & -5 & 1\end{bmatrix}$$

Sol

• فضاء الصف هو

$$R(A)=span\{(1,-1,3),(2,-1,10),(3,-5,1)\}$$

• فضاء العمود هو

$$C(A)=span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\10\\1\end{bmatrix}\right\}$$

ولإيجاد الأساسية نضع المصفوفة A في الصورة المختزلة.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ \textcircled{2} & -1 & 10\\ \textcircled{3} & -5 & 1\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}R_2'=R_2-2R_1\\ R_3'=R_3-3R_1\end{matrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1 & \textcircled{-1} & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & \textcircled{-2} & -8\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}R_1'=R_1+R_2\\ R_3'=R_3+2R_2\end{matrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

• • • أساسية فضاء الصف هي

$$R(A)=span\{(1,0,7),(0,1,4)\}$$

• • • أساسية فضاء العمود هي

$$C(A)=span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\-5\end{bmatrix}\right\}$$