فضاء الضرب الداخلي

تعريف الضرب الداخلي

اذا كان لدينا المتجهان $u=(u_1, u_2, \dots u_n)$ ، $V=(v_1, v_2, \dots v_n)$

فإن الضرب الداخلي للمتجهين u, v هو

$$\langle u,v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

فضاء الضرب الداخلي

هو دالة تحدد لكل زوج من المتجهات $u,v \in V$ عدد حقيقي $\langle u,v \rangle \in R$

اي أن $\langle u,v \rangle : V \longrightarrow R$ و تحقق الشروط الاتية :-

① $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$

② $\alpha \langle u,v \rangle = \langle \alpha u, v \rangle = \langle u, \alpha v \rangle$ ، $\alpha \in R$

③ $\langle u, v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle$

④ $\langle u,u \rangle \geq 0$

⑤ $\langle u,u \rangle = 0 \iff u = 0$

الطول في فضاء الضرب الداخلي

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots u_n^2}$$

المسافة في فضاء الضرب الداخلي

$$d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + \dots (u_n-v_n)^2}$$

خواص المسافة في فضاء الضرب الداخلي

① $d(u,v) \geq 0$

② $d(u,v) = d(v,u)$

③ $d(u,v) = 0 \iff u = v$

④ $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

⑤ $\|u \pm v\| \leq \|u\| + \|v\|$

⑥ $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff u, v$ متعامدان ، $\|u-v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$

⑦ $|\langle u,v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

الزاوية بين متجهين

اذا كان u, v متجهين في الفضاء V وكانت θ هي الزاوية بين المتجهين u, v فإن الضرب الداخلي يعرف

$$\langle u,v \rangle = \begin{cases} \|u\|\|v\| \cos\theta & , u \neq 0 \ , v \neq 0 \\ 0 & u = 0 \text{ or } v = 0 \end{cases}$$

ومنه نجد أن الزاوية بين المتجهين $\cos\theta = \dfrac{\langle u,v \rangle}{\|u\|\|v\|}$

مثال: اذا كانت $u = (3,1,4)$ و $v = (1,-2,4)$ أوجد

① $\langle u,v \rangle$ ② $\|v\|$ ③ $d(u,v)$

1. $\langle u, v \rangle = (3\times1) + (1\times-2) + (4\times4) = 3 - 2 + 16 = 17$

2. $\|v\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$

3. $d(u,v) = \sqrt{(3-1)^2 + (1+2)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}$

ex من المثال السابق أوجد الزاوية بين المتجهين u, v ؟

$$\because \cos\theta = \frac{\langle u.v \rangle}{\|u\|\,\|v\|} \quad , \quad \|u\| = \sqrt{3^2+1^2+4^2} = \sqrt{26}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{17}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{21}} = \frac{17}{\sqrt{546}} \Longrightarrow \theta = 43^\circ$$

ex اذا كانت الزاوية بين المتجهين 45° حيث $u(0,0,1)$, $v=(0,2,2)$ أوجد $\langle v.u \rangle$ ؟

$$\because \langle u.v \rangle = \|u\|\,\|v\| \cos\theta$$

$$\|u\| = 1 \quad , \quad \|v\| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$$

$$\langle u.v \rangle = 1\cdot\sqrt{8}\cos 45^\circ = \sqrt{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

ex أوجد الزاوية بين u, v وأوجد $\langle u.v \rangle$ اذا كان

$$u = (2,-1,1) \quad , \quad v = (1,1,2)$$

$$\langle u \cdot v \rangle = (2\times1)+(-1\times1)+(1\times2) = 2-1+2 = 3$$

$$\|u\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\|v\| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

ملاحظات: اذا كانت u, v متجهين غير صفريين وكانت θ هي الزاوية بينهما فان

θ حادة $\iff \langle u \cdot v \rangle > 0$

θ منفرجة $\iff \langle u \cdot v \rangle < 0$

θ قائمة $\iff \langle u \cdot v \rangle = 0$

مثال: اذا كانت $w=(3,6,3)$, $u=(1,-2,3)$, $v=(-2,3,2)$

أوجد $\langle u,v \rangle$, $\langle u,w \rangle$, $\langle v,w \rangle$

وبين نوع الزاوية بينهما

- $\langle u,v \rangle = (1\times-2)+(-2\times3)+(3\times2) = -2 < 0 \Rightarrow \theta$ منفرجة
- $\langle u,w \rangle = (1\times3)+(-2\times6)+(3\times3) = 0 \Rightarrow \theta$ قائمة
- $\langle v,w \rangle = (-2\times3)+(3\times6)+(2\times3) = 18 > 0 \Rightarrow \theta$ حادة