كلية الهندسة- جامعة مصراتة

التحليل العددي

إعداد

د. عمر علي أبوعلة

خريف 2020/2019

التحليل العددي
Numerical Analysis
\مفردات المنهـج

الفصل الأول: مقدمة

الأخطاء وتقديرها

- تعريف الخطأ
- مصادر الأخطاء
- طرق التعبير عن الخطأ في القيمة المحسوبة

الخطأ المطلق
الخطأ النسبي
خطأ التكرار
الخطأ النسبي المئوي

الفصل الثاني: تقريب الدوال بمتسلسلة القوى:

1- متسلسلة ماكلورين

2- متسلسلة تايلور

الفصل الثالث: جذور المعادلات غير الخطية:

1- طريقة النقطة الثابتة
2- طريقة نيوتن-رافسون للرتبة الأولى
3- طريقة نيوتن-رافسون للرتبة الثانية
4- طريقة القاطع

الفصل الرابع: التكامل العددي:

1-طريقة أشباه المنحرفات

2-طريقة سيمسون

الفصل الخامس: حل المعادلات الآنية الخطية عددياً:

1-طريقة جاكوبي

2-طريقة جاوس-سيدل

الفصل السادس: الاستكمال:

1-الاستكمال بكثيرة الحدود(صيغة لاجرانج)

2-الاستكمال بكثيرة الحدود(صيغة الفروق المقسومة)

3- الاستكمال بكثيرة الحدود(صيغة الفروق المحدودة)

4- الاستكمال بكثيرة الحدود(صيغة نيوتن للفروق الأمامية)

الفصل السابع: انطباق المنحنيات(تقريب المربعات الدنيا):

1-التقريب بعديدة الحدود

2-التقريب بالدوال الأسية

3-التقريب بدوال القوى

الفصل الثامن: الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية (مسائل القيم الابتدائية):

1-طريقة أويلر

2-طريقة رونج-كوتا

مقدمة

التحليل العددي هو أحد فروع الرياضيات ومدعم لإمكانياتها في حل المسائل وتحليل المنظومات ويشتمل على مجموعة من الأدوات والطرق والأساليب التي تمكننا من إيجاد الحلول المطلوبة في عدد محدود من الخطوات وبالدرجة المطلوبة من الدقة (accuracy).

لا تشتمل النماذج العددية على مفاهيم رياضية كالتفاضل والتكامل، بل تشتمل فقط على عمليات حسابية وعمليات منطقية وهذا يجعلها مناسبة تماما لبرمجة الحاسوب.

يكون الحل العددي بالتتابع (خطوة خطوة)، أي أن الحل عند نقطة ما يعتمد على الحل عند النقاط السابقة لها، ويبدو هذا مناسبا لعمليات البرمجة ولكنه أيضا يؤدي إلى تراكم الأخطاء بزيادة عدد الخطوات.

الأخطاء وتقديرها

بالرغم من أن الطرق العددية دائما تعطي حلولا وحيدة (unique solutions) إلا أن هناك أخطاء مصاحبة لتلك الحلول، ومن الممكن تقدير تلك الأخطاء لمعرفة حدودها وأيضا يمكن تقليلها إلى مستويات مقبولة.

تعريف الخطأ: هو الاختلاف بين القيمة المحسوبة لمتغير ناتجة من عمليات التحليل العددي والقيمة المضبوطة لهذا المتغير والتي كان من المفترض الحصول عليها إذا استطعنا حل النموذج الرياضي بطريقة تحليلية مضبوطة.

مصادر الأخطاء:

الإنسان، الآلة، أخطاء ناتجة عن عملية النمذجة الرياضية، وكذلك أخطاء ناتجة عن النمذجة العددية وهي أخطاء القطع (truncation errors) وكذلك أخطاء ناتجة عن الحسابات وهي أخطاء التقريب أو التدوير (round–off)، أو خطأ التدوير.

ينشأ خطأ القطع من طبيعة المتغيرات والدوال وتنتج عن تمثيل متسلسلة لانهائية بأخرى لها عدد معين (منتهٍ) من الحدود، ويسمى الجزء المهمل بالجزء الباقي.

أما خطأ التقريب (أو التدوير) فينتج عن طبيعة تخزين البيانات ومعالجتها في الحاسوب. يعني أن هذا الخطأ ينتج من تخزين البيانات في ذاكرة الحاسوب في عدد محدود من الخانات، بعد ذلك تنتشر هذه الأخطاء أثناء إجراء الحسابات تبعاً لنوع العمليات الحسابية وعددها.

طرق التعبير عن الخطأ في القيمة المحسوبة:

1) الخطأ المطلق (absolute error) = القيمة المحسوبة – القيمة المضبوطة.

القيمة المطلقة للخطأ = | القيمة المحسوبة – القيمة المضبوطة| $\Delta x = |x - x_0|$

2) الخطأ النسبي (relative error): ويعرف بأنه خارج قسمة الخطأ المطلق على القيمة المضبوطة ويعبر عنه بقيمته المطلقة.

$$R_x = \frac{\Delta x}{x} \text{ أي } \text{الخطأ النسبي} = \frac{\text{القيمة المحسوبة} - \text{القيمة المضبوطة}}{\text{القيمة المضبوطة}}$$

$$\text{القيمة المطلقة للخطأ النسبي} = \frac{|\text{القيمة المحسوبة} - \text{القيمة المضبوطة}|}{|\text{القيمة المضبوطة}|}$$

3) **خطأ التكرار (iteration error)**: في بعض الأحيان لايمكن معرفة القيمة المضبوطة؛ لذلك يستعاض عنها بالقيمة المحسوبة في المرحلة التالية من العملية باعتبار أنها في الغالب ستكون أدق وأقرب للقيمة الحقيقية، وعندها يعرف هذا الخطأ بخطأ التكرار i، أي الخطأ الحاصل في التكرار (i)، $R_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}$

4) الخطأ النسبي المئوي(percentage error): يعرف بأنه الخطأ النسبي مضروبا في 100. وكذلك يسمى بالنسبة المئوية للخطأ.

$$\text{الخطأ المئوي} = \text{الخطأ النسبي} \times 100\%$$

مثـال: احسب النسبة المئوية للخطأ في الكمية $y = \sqrt{\frac{534 - 7x^2}{6}}$ ، إذا كانت $x = \frac{61.1}{7}$، مستخدما أربع أرقام عشرية في الحسابات مع ملاحظة تقريب الرقم الخامس طبقا لقواعد التقريب العادية.

الحـل:

$$x = \frac{61.1}{7} = 8.728571429 = 8.7286$$
$$x^2 = (8.7286)^2 = 76.1885$$
$$7x^2 = 533.3195$$
$$534 - 7x^2 = 0.6805$$
$$\frac{534 - 7x^2}{6} = 0.1134$$
$$y = \sqrt{0.1134} = 0.3367$$

وباعتبار أن القيمة الحقيقية هي $y=0.3377$ ، نستطيع حساب النسبة المئوية للخطأ كالتالي:

$$\text{النسبة المئوية للخطأ} = \frac{|0.3377 - 0.3367|}{0.3377} * 100 = 0.3\ \%$$

مثـال:

أوجد الخطأ النسبي المئوي عند حساب المشتقة الأولى للدالة $\sin(x)$ عند النقطة $x = 1$ مستخدما فقط أربع أرقام (خانات) عشرية بعد الفاصلة في الحسابات، إذا كانت القيمة الحقيقية (المضبوطة) للمشتقة الأولى هي $\cos(1)$ وتساوي 0.5403 ، وصيغة إيجاد المشتقة تعطى بالعلاقة:

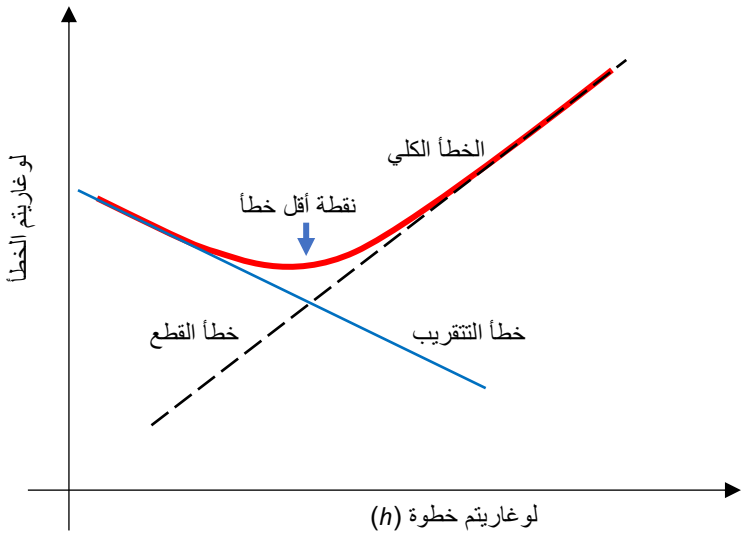
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

عند استخدام: $h = 0.001\ , h = 0.01, h = 0.1, h = 1$

الحل:

h	قيمة المشتقة	الخطأ النسبي المئوي
0.001	0.5399	0.07%
0.01	0.5361	0.78%
0.1	0.4973	7.96%
1	0.0678	87.5%

لاحظ أن: سعة تخزين الأرقام لها تأثير كبير على الأخطاء الناتجة. كذلك لا يجب أن تكون قيمة (h) كبيرة بحيث يكون النموذج العددي غير مناسب وبالتالي سيكون خطأ القطع كبيراً، وأيضاً يجب ألاّ تكون قيمة (h) صغيرة جداً بحيث يصبح خطأ التقريب كبيراً.



مثال لعلاقة الخطأ بطول الخطوة في الحسابات العددية

الفصل الثاني

تمثيل الدوال بمتسلسلات القوى

Power series representation of functions

هل فكرت في الكيفية التي تحسب بها الآلة الحاسبة أو الكمبيوتر قيمة الدوال الجيبية أو الدوال الأسية أو الدوال اللوغارتيمية وغيرها من الدوال المعروفة.

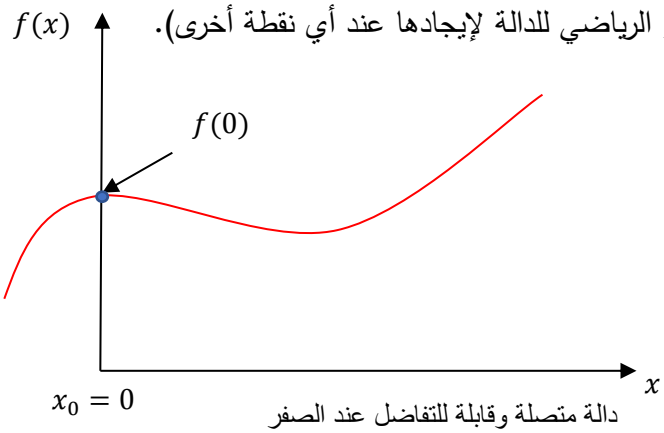
الهدف هو إيجاد صيغة عددية تمكننا من حساب الدالة ذات الصلة. والحل هو عن طريق متسلسلات القوى.

مثلا تحويل الدالة $ln\,(1+sin\,x)$ إلى متسلسلة قوى على الصورة:

$$ln\,(1+sin\,x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \ \dots$$

متسلسلة ماكلورين:

إذا علمت قيمة الدالة وجميع تفاضلاتها عند نقطة ما (x_0) فيمكن عندها معرفة قيمة الدالة عند أي نقطة أخرى (x) بشرط أن تكون هذه الدالة متصلة (مستمرة) بين النقطتين x_0 و x (يعني نحتاج فقط لقيم الدالة وتفاضلاتها عند نقطة معينة وليس التعبير الرياضي للدالة لإيجادها عند أي نقطة أخرى).



بفرض أن قيمة $x_0 = 0$ عندئذ فإننا نحتاج لمعرفة:

$$f(0)\,,\ f'(0)\,,\ f''(0)\,,\dots,\ f^n(0),\dots$$

بفرض أن الدالة $f(x)$ يمكن تحليلها إلى:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \ \dots (*)$$

يعني أننا نحاول أن نمثل الدالة بعديدة حدود أو متسلسلة قوى.

ولكن السؤال هنا: ماهي قيمة المعاملات $a_0, a_1, a_2, \dots$؟

لإيجاد قيم هذه المعاملات يمكن أن نقوم بالخطوات التالية:

نفرض أن $x = 0$ في المتسلسلة السابقة، ونتحقق هل الدالة $f(x)$ موجودة (معرفة ومتصلة) عند هذه النقطة أم لا؟ (فمثلاً $f(x) = \frac{1}{x}$ لاتوجد عند $x = 0$).

عندئذ بالتعويض بالنقطة $x = 0$ في المعادلة $(*)$ نحصل على:

$$a_0 = f(0)$$

وبفرض أن الدالة قابلة للتفاضل:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + \ ...$$

وبوضع $x = 0$ وبفرض أن تفاضل الدالة موجود عند هذه النقطة نجد أن:

$$a_1 = f'(0)$$

الآن بالتفاضل مرة أخرى نجد أن:

$$f''(x) = 2a_2 + 3 * 2a_3x + 4 * 3a_4x^2 + 5 * 4a_5x^3 + 6 * 5a_6x^4 + \ ...$$

وبالتعويض عن $x = 0$ نحصل على:

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

وبنفس الطريقة تكون:

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3\ !}, \quad a_4 = \frac{f^{(iv)}(0)}{4\ !}, \quad a_5 = \frac{f^{(v)}(0)}{5\ !}, \ ...$$

لذا يمكننا التعويض عن قيمة المعاملات في المعادلة $(*)$ والحصول على الصيغة العامة لمتسلسلة ماكلورين كالتالي:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3\ !}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4\ !}\ x^4 + \frac{f^{(v)}(0)}{5\ !}x^5 + \frac{f^{(vi)}(0)}{6\ !}x^6 + \ ...$$

لاحظ أن شرط متسلسلة ماكلورين هو وجود الدالة وتفاضلاتها عند النقطة $(x = 0)$.

مثـال1:

أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة الجيبية $f(x) = \sin(x)$.

الحـل:

أولاً يجب أن ننتبه هل الدالة وتفاضلاتها معرفة عند $x = 0$ أم لا ..!

$f(x) = \sin(x)$ $\qquad$ $f(0) = \sin(0) = 0$

$f'^{(x)} = \cos(x)$ $\qquad$ $f'(0) = \cos(0) = 1$

$f''^{(x)} = -\sin(x)$ $\qquad$ $f''(0) = -\sin(0) = 0$

$f'''^{(x)} = -cos(x)$ $\qquad$ $f'''(0) = -\cos(0) = -1$

$f^{(iv)}(x) = sin(x)$ $\quad\quad$ $f^{(iv)}(0) = \sin(0) = 0$

نلاحظ أن التفاضل الرابع يرجعنا إلى نقطة البداية وتعاد الحلقة من جديد. كذلك نلاحظ أن الدالة وجميع تفاضلاتها معرفة عند النقطة $(x = 0)$، وعليه يكون:

$$f(x) = \sin(x)$$
$$= 0 + 1x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \ \dots$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \dots + \mathrm{R}$$

ويمكن وضعها على الصورة العامة التالية: $\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$

مثـال2:

احسب متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = e^{\mathrm{x}}$.

الحـل: $(x) = e^{\mathrm{x}}$ $\quad\quad$ $f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^{\mathrm{x}}$ $\quad\quad$ $f'(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = e^{\mathrm{x}}$ $\quad\quad$ $f''(0) = e^0 = 1$

إذاً بالتعويض في الصيغة العامة لمتسلسلة ماكلورين نحصل على :

$$f(x) = e^{\mathrm{x}} = 1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ \dots$$

$$e^{\mathrm{x}} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ \dots$$

مثـال3:

احسب متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = ln\ (x)$.

الحـل:

$f(x) = ln(x)$ $\quad\quad$ $f(0) = ln\ (0) = \ -\infty$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad\quad$ $f'(0) = \frac{1}{0} = ?$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad\quad$ $f''(0) = -\frac{1}{0^2} = ?$

لا الدالة ولا تفاضلاتها معرفة عند النقطة $(x = 0)$ ، إذاً ليست هناك متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = l\,n(x)$.

لكن هل من طريقة لإيجاد متسلسلة ماكلورين لهذه الدالة؟

نعم، و ذلك بإزاحة منحنى الدالة إلى اليسار بمقدار (1) كالتالي:

$$f(x) = ln(x+1) \qquad f(0) = ln\ (1+0) = ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2$$

$$f^{(iv)}(x) = -\frac{3*2}{(1+x)^4} \qquad f^{(iv)}(0) = -\frac{3\times2}{(1+0)^4} = -3 \times 2$$

بالتعويض في المتسلسلة:

$$ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

لاحظ: عدم وجود المضروب في المقام.

من المهم ملاحظة أن هذه الدالة غير موجودة ولا تفاضلاتها عند $(x \leq -1)$.

في الحقيقة إن هذا التقريب باستخدام متسلسلة ماكلورين غير موجود لهذه الدالة إلا في الفترة $-1 < x \leq +1$.

مثال4:

باستخدام الحدود الستة الأولى من متسلسلة ماكلورين أوجد قيمة $sin\ (\frac{\pi}{4})$ واحسب الخطأ النسبي.

بالتعويض في متسلسلة ماكلورين من المثال الأول :

$$\sin(x) \cong x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cong 0.78540 - 0.08075 + 0.00249 = 0.70714$$

ولذلك يكون الخطأ النسبي عند هذه الزاوية:

$$e_r = \frac{0.70714 - 0.70711}{0.70711} \times 100 = 0.004\%$$

لاحظ صغر الخطأ النسبي على الرغم من استخدامنا فقط لست حدود من المتسلسلة.

مثال 5:

استخدم متسلسلة ماكلورين للدالة e^x لحساب قيمة $e^{0.5}$ مستخدماً فقط ثلاث أرقام عشرية. واحسب الخطأ النسبي المئوي والست الحدود الأولى من المتسلسلة.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

لذلك:

$$e^{0.5} = 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2!} + \frac{0.5^3}{3!} + \frac{0.5^4}{4!} + \frac{0.5^5}{5!} \dots$$

$$e^{0.5} = 1 + 0.5 + 0.125 + 0.021 + 0.003 + 0.000$$

$$e^{0.5} = 1.649$$

بينما نعلم أن:

$$e^{0.5} = 1.648437499$$

وتقرَّب إلى:

$$e^{0.5} = 1.648$$

تمارين:

1) احسب باستخدام متسلسلة ماكلورين للدالة $\cos x$ القيمة التقريبية $\cos(\frac{\pi}{3})$ باستخدام حد واحد وحدين وثلاثة وأربعة حدود من المتسلسلة. واحسب قيمة الخطأ النسبي في كل حالة وقارن هذه النتائج بنتائج الخطأ النسبي للدالة e^x عند نفس النقطة $(\frac{\pi}{3})$.

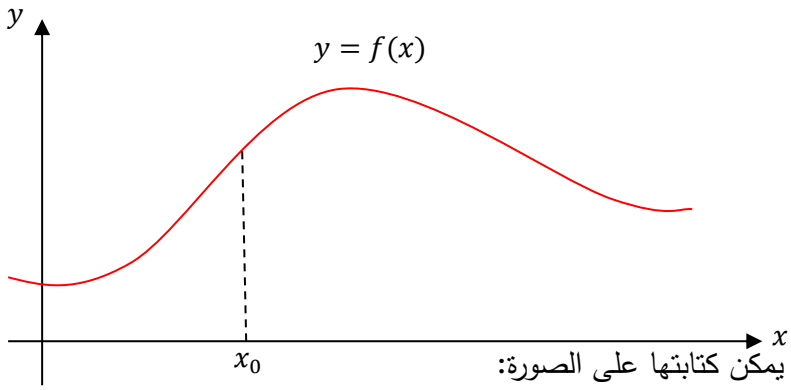
2) احسب متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = \sin^{-1} x$.

3) أثبت أن: $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} - e^{-jx})$.

متسلسلة تايلور Taylor series:

بفرض أن الدالة $y = f(x)$ متصلة ومعرفة هي وجميع تفاضلاتها عند النقطة $(x = x_0)$ ويمكن تمثيلها بواسطة عديدة حدود كالتالي:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ \ldots + \frac{f^n(x_0)}{\mathrm{n!}}(x - x_0)^{\mathrm{n}} + \cdots + R_n$$



أو بصفة عامة يمكن كتابتها على الصورة:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^i(x_0)}{i\,!}(x - x_0)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^i(x_0)}{i\,!}(x - x_0)^i$$

حيث أن : $0! = 1$ و $f(x_0) = f^0(x_0)$.

هذه الصيغة تسمى متسلسلة تايلور ويمكن ملاحظة أن متسلسلة ماكلورين عبارة عن حالة خاصة منها عندما $x_0 = 0$.

أغلب الدوال يمكن تقريبها بمتسلسلة تايلور أو ماكلورين لانهائية الحدود، لكن عملياً يمكن التقريب باستخدام فقط n من الحدود الأولى من المتسلسلة ويكون مجموع الحدود الباقية خطأً يسمى بالباقي.

القيمة الحقيقية = مجموع (n) من الحدود الأولى + R_n

حيث R_n يمثل الخطأ .

مثـــال 1

مثل الدالة $f(x) = \cos(x)$ بمتسلسلة تايلور حول النقطة $x_0 = \frac{\pi}{4}$ وأوجد قيمة $\cos(\frac{3\pi}{4})$ مستخدماً خمس حدود وبدقة خمس أرقام عشرية فقط.

الحـل:

$$x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$f(x_0) = \cos(x_0) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.70711$$

$$f'(x_0) = -\sin(x_0) \qquad -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.70711$$

$$f''(x_0) = -\cos(x_0) \qquad -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.70711$$

$$f'''(x_0) = \sin(x_0) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.70711$$

$$f^{(4)}(x_0) = \cos(x_0) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.70711$$

وهكذا ...

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^i(x_0)}{i\,!}(x - x_0)^i$$

$$\cos(x) \approx 0.70711 - 0.70711\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 0.70711\frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2!} + 0.70711\frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!} + 0.70711\frac{(x - \frac{\pi}{4})^4}{4!}$$

وبالتعويض عن قيمة $x = \frac{3\pi}{4}$ نحصل على:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0.70711 - 1.11073 - 0.87236 + 0.45677 + 0.17937 = -0.63984$$

أما القيمة الحقيقية فهي $= -0.70711$

إذا الخطأ النسبي المئوي $\approx 9.5\%$

الفصل الثالث

جذور المعادلات غير الخطيـة

سنتعامل في هذا الفصل مع الدوال والمعادلات على الصورة الآتية:

$$f(x) = 0$$

والمطلوب إيجاد قيمة x التي تحقق المعادلة أي تجعلها مساويةً للصفر في هذه الحالة وهذا يعني إيجاد جذر أو جذور المعادلة.

فمثلاً جذور المعادلة عديدة الحدود $x^2 - 2x - 3 = 0$ هما $x_2 = -1$ ، $x_1 = 3$.

أما المعادلة $e^x - 3\cos(x) = 0$ فلها عدد لانهائي من الجذور وإيجاد أحدها ليس بالأمر السهل .

لذلك سندرس طرقاً عددية مختلفة لإيجاد مثل هذه الجذور.

1-طريقة النقطة الثابتة Fixed point method

وتعتبر من أسهل طرق إيجاد الجذور للمعادلات اللاخطية وتتلخص في أن نبدأ بقيمة تخمينية للجذور ومن ثم نحاول تصحيح هذه القيمة بتكرار عملية الحل عدة مرات .

وتكون نتيجة الحل:

- إما تقاربية وفي كل خطوة نقترب من الجذر الصحيح.
- أو تباعدية وفي كل خطوة نبتعد من الجذر الصحيح.

سنرمز لحل المعادلة $f(x) = 0$ بالرمز $\bar{x}$ وهو يحقق المعادلة $f(\bar{x}) = 0$.

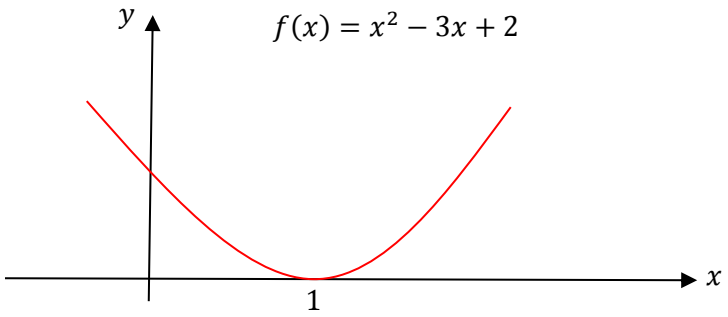
خوارزمية (حطوات) الحل لطريقة النقطة الثابتة:

1- نجعل المعادلة $f(x) = 0$ على الصورة : $x = g(x)$.

2- نفرض قيمة ابتدائية للجذر ونقرب الحل إلى القيمة العشرية المطلوبة عن طريق $x_{i+1} = g(x_i)$.

3- نختار القيمة الابتدائية بحيث تحقق الشرط التالي: $|g'(x)| < 1$.

مثـال: $f(x) = x^2 - 3x + 2$



$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$3x = x^2 + 2$$

$$x = \frac{x^2 + 2}{3}$$

$$g(x) = x$$

$$g(x) = \frac{x^2 + 2}{3}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3}x$$

$$|g'(x)| < 1$$

$$\left|\frac{2}{3}x\right| < 1$$

$$-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$$

مثـال:

أوجد جذور المعادلة $x^2 - 5x + 4 = 0$

الحل:

نجعل المعادلة السابقة على صورة $x = g(x)$.

$$x = \frac{x^2 + 4}{5}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{5} + \frac{4}{5}$$

$$g'(x) = \frac{2}{5}x$$

$$|g'(x)| < 1$$

$$|\frac{2}{5}x| < 1$$

$$|x| < \frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2} < x < \frac{5}{2}$$

إذا نبدأ بقيمة ابتدائية في الفترة المحدودة ولتكن $x_0 = 1.5$

$$x_1 = \frac{{x_0}^2 + 4}{5} = \frac{(1.5)^2 + 4}{5} = 1.25$$

$$x_2 = \frac{{x_1}^2 + 4}{5} = \frac{(1.25)^2 + 4}{5} = 1.1125$$

$$x_3 = \frac{{x_2}^2 + 4}{5} = \frac{(1.1125)^2 + 4}{5} = 1.0475$$

$$x_4 = 1.0195$$

$$\vdots$$

$$x_n = 1.0000$$

نلاحظ أن بداية الحل كانت $(x_0 = 1.5)$ وبعد تكرار العملية عدة مرات يقترب الحل من الحل الصحيح $(\bar{x} = 1.0)$, ونلاحظ أيضا أنه لو يتم حساب خطأ التكرار فإنه يتناقص إلى أن يقترب للصفر عند الاقتراب من الحل الصحيح.

"**يعتمد تقارب الحل من عدمه على الفرق بين القيمة الحالية للجذر والقيمة السابقة ؛ فإن كان هذا الفرق يقل فإننا نقترب من الحل الصحيح وإلا فإن العملية تباعدية**".

ولكن ماذا سيحدث إذا أخذنا القيمة الابتدائية $x_0 = 5$ (خارج فترة التقارب)

$$x_1 = \frac{{x_0}^2 + 4}{5} = \frac{(5)^2 + 4}{5} = 5.8$$

$$x_2 = \frac{{x_1}^2 + 4}{5} = \frac{(5.8)^2 + 4}{5} = 7.5$$

$$x_3 = \frac{{x_2}^2 + 4}{5} = \frac{(7.5)^2 + 4}{5} = 12.13$$

نلاحظ أن العملية تباعدية.

ولذلك للحصول على الجذر باستخدام النقطة الثابتة يجب أن نبدأ بقيمة ابتدائية (x_0) تتماشى مع الشرط $|g'(x)| < 1$.

مثـال:

ادرس استخدام النقطة الثابتة لإيجاد جذري المعادلة:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

وذلك باستخدام تخمين مبدئي $(x_0 = 4)$.

(جذري المعادلة هما $\bar{x}_1 = -1$, $\bar{x}_2 = 3$).

الحـــل:

يمكن وضع المعادلة على الصورة $x = g(x)$ بثلاث صيغ مختلفة هي:

$$x_{i+1} = g_1(x_i) = \sqrt{2x_i + 3}$$

$$x_{i+1} = g_2(x_i) = \frac{3}{(x_i - 2)}$$

$$x_{i+1} = g_3(x_i) = \frac{x^2{}_i - 3}{2}$$

النتائج مبينة بالجدول التالي لكل من العلاقات الثلاثة:

التكرار (i)	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$
0	4	4	4
1	3.31662	1.50000	6.50000
2	3.10375	−6.00000	19.625
3	3.03439	−0.37500	191.0703
4	3.01144	−1.26316	_
5	3.00381	−0.91935	_
6	⋮	−1.02762	_
7	⋮	−0.99088	_
8	⋮	−1.00305	_
9	3.0000	−1.003	_
	تقارب سريع مباشر	تقارب بطيء متذبذب	تباعدية
	لأن $\|g'(4)\| < 1$	لأن $\|g'(4)\| < 1$	لأن $\|g'(4)\| > 1$
	$0.30151 < 1$	$0.75 < 1$	$4.0 > 1$

احسب خطأ التكرار (التقريب) : $e_a\% = \left|\frac{\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i}{x_{i+1}}\right| * 100$

الخطأ الفعلي True error :

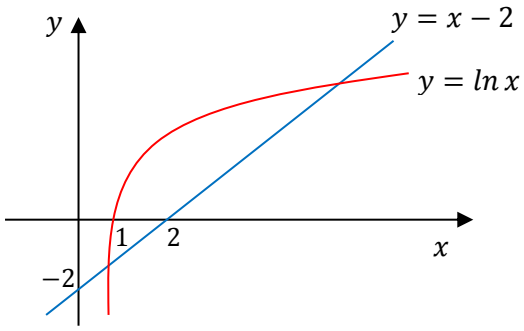
$$e_t\% = \left|\frac{\bar{x} - x_i}{\bar{x}}\right| * 100$$

مثال

أوجد جذر المعادلة $ln(x) - x + 2 = 0$

$x = g(x)$

$x = ln(x) + 2$



$g'(x) = \frac{1}{x}$ الشرط

$\left|\frac{1}{x}\right| < 1$

$\frac{1}{x} < 1$

دالة $ln(x)$ غير معرفة (كعدد حقيقي) عندما $x < 0$.

يمكن الحصول على الجذر الثاني (نقطة التقاطع الثانية) مابين 3 ، 4 .

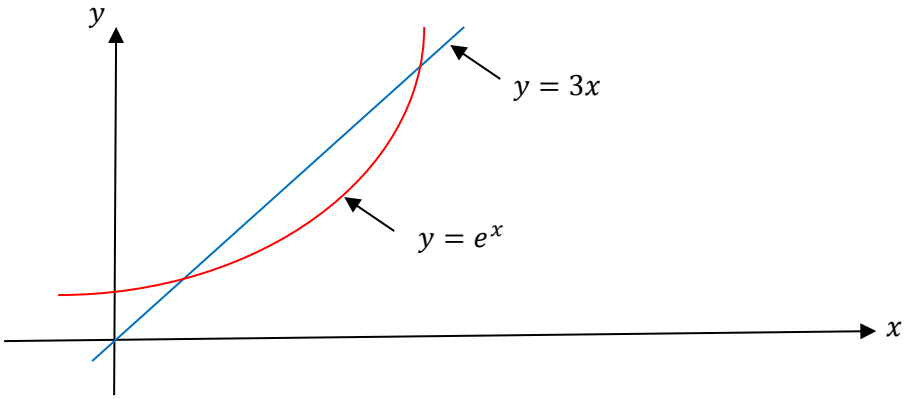
$$x_0 = 3.5$$
$$x_1 = 3.253$$
$$x_2 = 3.180$$
$$x_3 = 3.157$$
$$x_4 = 3.150$$
$$x_5 = 3.147$$
$$x_6 = 3.146$$
$$x_7 = 3.146$$

إذاً الجذر المطلوب $\bar{x}_2 = 3.146$ صحيح إلى ثلاثة أرقام عشرية.

ويمكن إيجاد قيمة الجذر الآخر $(\bar{x}_1 \cong 0.158)$ من خلال التعويض في الصيغة $g(x) = e^{x-2}$.

مثال :

أوجد نقطة تقاطع المنحيين $y = 3x$, $y = e^x$.



عند التقاطع يكون :

$$3x = e^x$$

$$3x - e^x = 0$$

نجعل المعادلة على الصورة $x = g(x)$

$$x = \frac{1}{3}e^x$$

$$g'(x) = \frac{1}{3}e^x$$

الشرط :

$$|g'(x)| < 1$$

$$\frac{1}{3}e^x < 1$$

$$e^x < 3$$

$$x < 1.1$$

نأخذ القيمة الابتدائية $x_0 = 0$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{3}e^{x_0} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{3}e^{x_1} = 0.465$$

$$x_3 = \frac{1}{3}e^{x_2} = 0.531$$

$$\vdots$$

$$x_8 = 0.661$$

$$x_9 = 0.645$$

$$x_{10} = 0.635$$

$$x_{11} = 0.629$$

$$x_{12} = 0.625$$

إذا الجذر المطلوب هو $(\bar{x} = 0.625)$ صحيحاً إلى رقمين عشريين لأن:

$$e = x_{12} - x_{11}$$

$$= 0.625 - 0.629$$

$$= -0.004$$

طريقة النقطة الثابتة لا تقترب إلا لجذر واحد وهي في هذه الحالة نقطة التقاطع الأولى.

وللحصول على النقطة الثانية للتقاطع وهي $\bar{x}_2 = 1.51$:

نحاول أن نأخذ قيمة ابتدائية خارج الفترة $(x < 1.1)$ ولتكن $x_0 = 2$. فماذا سيحدث؟

$$x_1 = \frac{1}{3}e^{x_0} = 2.46$$

$$x_2 = 3.91$$

$$x_3 = 16.09$$

نلاحظ أن العملية تباعدية كما هو متوقع.

إذاً لا يمكن الحصول على إحداثي النقطة الثانية للتقاطع لأنها خارج الفترة (فترة الشرط) لأن $x_0 > 1.1$

ولكن سنحاول بطريقة أخرى ، فماذا سيحدث لو جعلنا

$$e^x = 3x$$

$$x = ln(3x)$$

$$g(x) = ln\,(3x)$$

$$|g'(x)| < 1$$

$$\left|\frac{1}{x}\right| < 1$$

$$x > 1$$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = l\,n(3 * 2) = ln(6) = 1.79176$$

$$x_2 = 1.68181$$

$$x_3 = 1.61818$$

$$x_4 = 58010$$

$$x_5 = 1.55610$$

$$\vdots$$

$$x_9 = 1.520263$$

$$x_{10} = 1.517495$$

وبالتالي يكون الجذر المطلوب : $\bar{x}_2 = 1.517495$

مثـال:

استخدم النقطة الثابتة لإيجاد جذر المعادلة التالية:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

مبتدئاً بتخمين ابتدائي $x_0 = 0$ واحسب الخطأ الحقيقي وخطأ التكرار (أو مقياس التقارب) بعد كل خطوة تكرار . علماً بأن القيمة الصحيحة للجذر هي:

$$\bar{x} = 0.56714329$$

الحـل:

نجعل المعادلة على الصورة $x = g(x)$

$$x_{i+1} = g(x_i) = e^{-x_i}$$

هل الدالة متقاربة عند $x_0 = 0$ ؟!

النتائج كما هو مبين بالجدول التالي:

i	x_i	$\lvert e_t \rvert\%$	$\lvert e_a \rvert\%$
0	0	100.0	–
1	1.000000	76.3	100.0
2	0.367879	35.1	171.8
3	0.692201	22.1	46.9
4	0.500473	11.8	38.3

17.4	6.89	0.606244	5
11.2	3.83	0.545396	6
5.90	2.20	0.579512	7
3.48	1.24	0.560115	8
1.93	0.705	0.571143	9
1.11	0.399	0.564879	10

- الدالة تقاربيّة بسبب أن $|g'(x_0)| = 1$.
- خطأ التكرار أكبر من الخطأ الحقيقي.

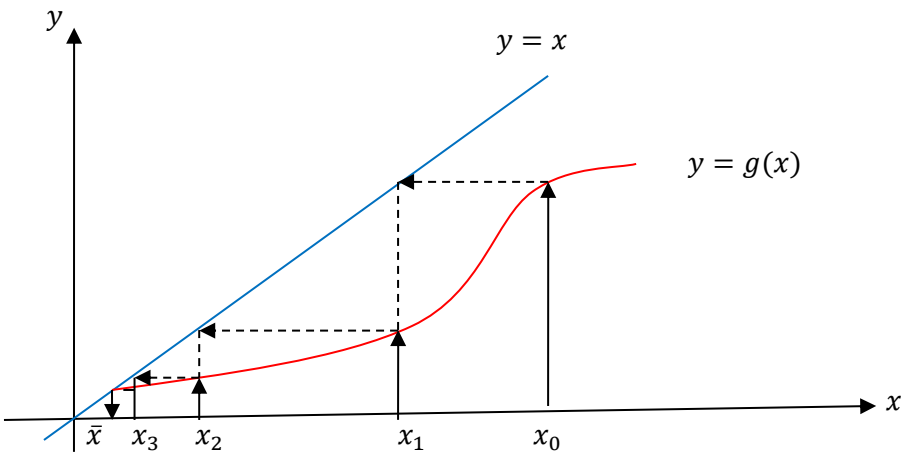
المعنى الهندسي لهذه الطريقة:

هو إيجاد نقطة التقاطع بين المنحنيين $y = g(x)$ ، $y = x$

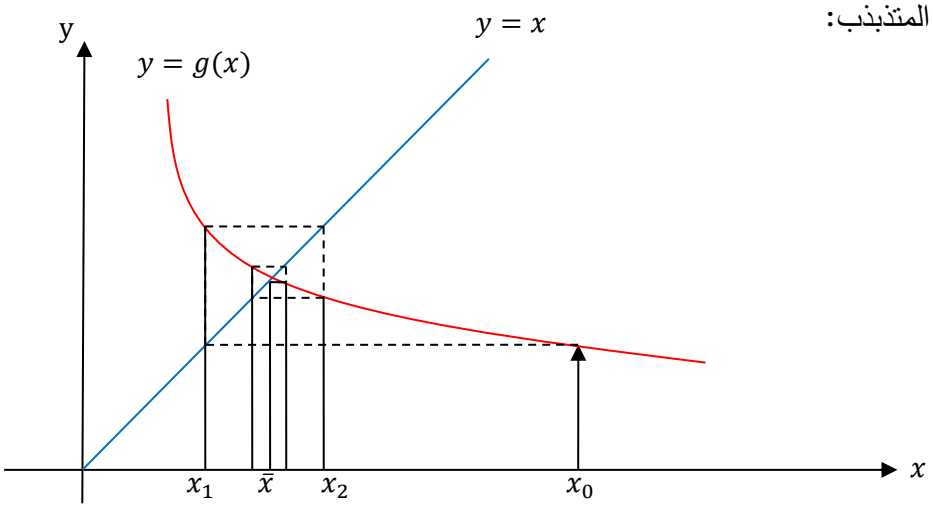
ويمكن إيجاد الحل إن كانت العملية تقاربية بنوعيها (مباشرة أو متذبذبة) ويعتمد ذلك على شكل $g(x)$.

1- حالة التقارب

التقارب المباشر:

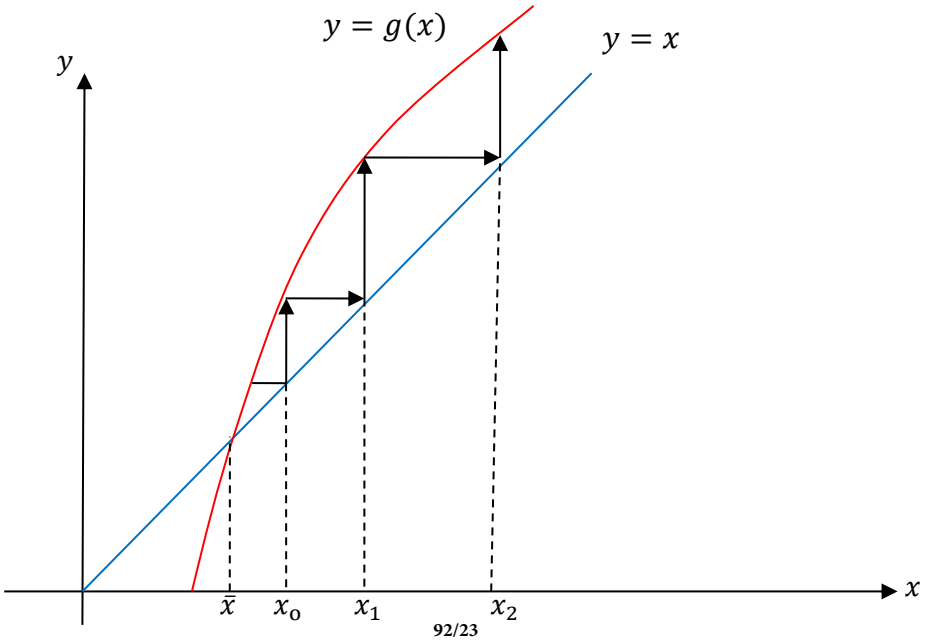


التقارب المتذبذب:

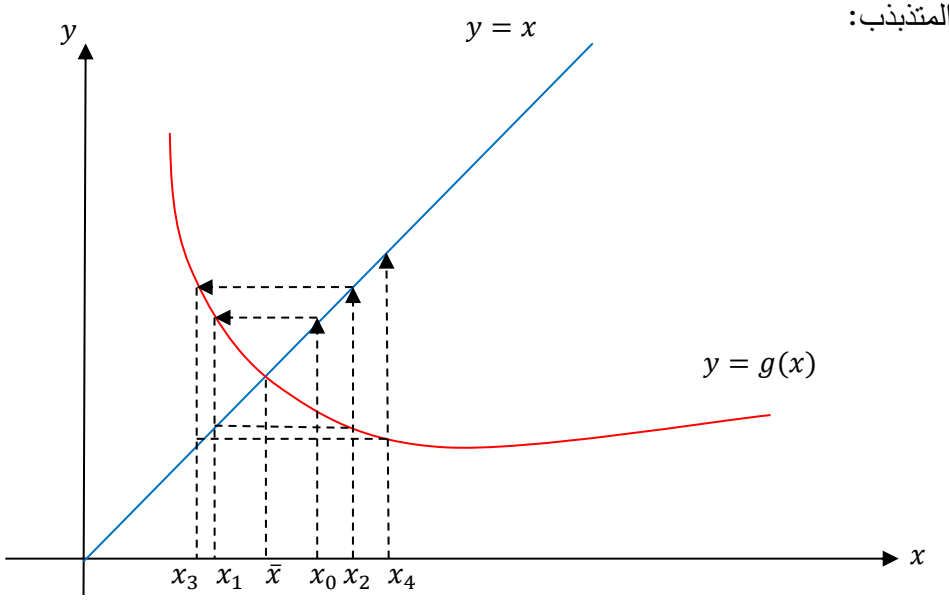


2- حالة التباعد

التباعد المباشر:



التباعد المتذبذب:

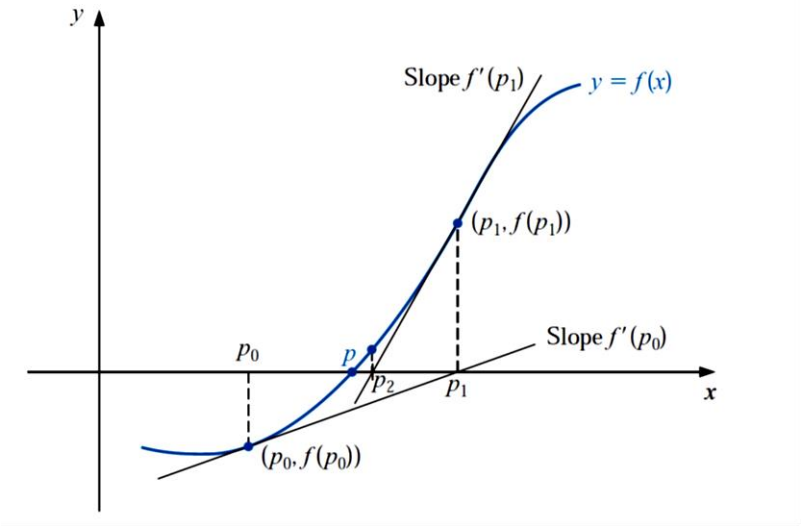


ملاحظة:

نبحث عن المنطقة التي يكون فيها الميل أقل من 1 لفرض القيمة الابتدائية , أي نبدأ الحل في المنطقة التي تكون فيها $g(x)$ أفقية أكثر.

2-طريقة نيوتن-رافسون الأولى Newton-Raphson Method (1690)

وتعرف أيضاً بطريقة نيوتن للرتبة الأولى (Newton's First Order Method)، وتعد هذه الطريقة من أكثر الطرق استخدامًا لإيجاد جذور المعادلات، وهي تصنف ضمن الطرق المفتوحة لإيجاد الجذور، وعندما تعمل تعطي قيمة الجذر بعد عدد قليل نسبياً من مرات التكرار بالمقارنة مع طريقة النقطة الثابتة.



باستخدام متسلسلة تايلور المقطوعة:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ \ldots$$

وبفرض أن:

$$x_0 = x_i \qquad \text{و} \qquad x = x_{i+1}$$

والمقدار:

$$x_{i+1} = \bar{x} \qquad \text{(الجذر)}$$

هذا يؤدي إلى أن:

$$f(x_{i+1}) \approx 0$$

$$x_{i+1} - x_i = \text{مقدار صغير}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ \ldots$$

بالاكتفاء بالحدين الأول والثاني من المتسلسلة وبفرض أن $x_0 = x_i$ والجذر عند $x_{i+1} = x$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

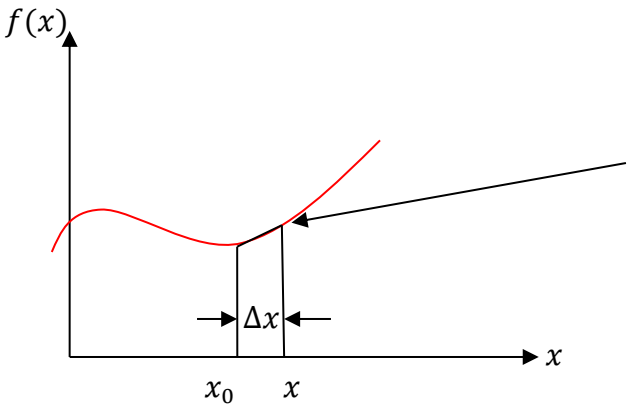
$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

بالاكتفاء بالحدين الأول والثاني من المتسلسلة وبفرض أن: $x_i = x_0$، والجذر عند $x_{i+1} = x$

نلاحظ الشكل التالي:



يمكن تقريب الدالة بخط مستقيم عندما تكون Δx

لأنه بالقرب من الجذر تكون $(x_{i+1} - x_i)$ قريبة من الصفر, عندها يمكن إهمال الحدود ذات الأس الأعلى من 1.

لتسهيل عملية الحل توضع العمليات في جدول كالتالي:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$R_i = f(x_i)/f'(x_i)$
x_0 $x_1 = x_0 - R_0$ $x_2 = x_1 - R_1$ ⋮ $\bar{x}$	$f(x_0)$ $f(x_1)$ $f(x_2)$ ⋮ 0	$f'(x_0)$ $f'(x_1)$ $f'^{(x_2)}$ ⋮ مقدار ثابت	$R_0 = f(x_0)/f'(x_0)$ $R_1 = f(x_1)/f'(x_1)$ $R_2 = f(x_2)/f'(x_2)$ ⋮ 0

يعتمد عدد التكرارات المطلوبة على درجة الدقة المطلوبة ونسبة الخطأ (ε_i) في كل خطوة والتي يمكن حسابها كالتالي:

$$\varepsilon_i = \frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|}$$

مثـال:

أوجد باستخدام طريقة نيوتن–رافسون جذر المعادلة

$$f(x) = e^{-x} - x$$

مبتدئاً بتخمين مبدئي $x_0 = 0$

الحـل:

$$f(x) = e^{-x} - x \longrightarrow \quad f'(x) = -e^{-x} - 1$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1} = x_i + \frac{e^{-x_i} - x_i}{e^{-x_i} + 1}$$

$$\varepsilon_i = \frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|}$$

$$f(x_i) = e^{-x_i} - x_i \quad , \quad f'(x_i) = -e^{-x_i} - 1$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$R_i = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\varepsilon_i\%$
0	*0*	*1*	*−2*	*−0.5*	*100%*
1	*0.0−(−0.5)=0.5*	*0.106531*	*−1.606531*	*−0.066311*	*11.7%*
2	*0.5−(−0.066311)=0.566311*	*0.001305*	*−1.567616*	*−0.000832*	*0.15%*
3	*0.566311−(0.000832)=0.567143*	*0.000000*	*−1.567143*	*−0.000000*	$< 10^{-6}$

مثال:

أوجد جذر العدد 17

الحل:

$$x^2 = 17 \qquad \Rightarrow x^2 - 17 = 0$$

$$f(x) = x^2 - 17$$

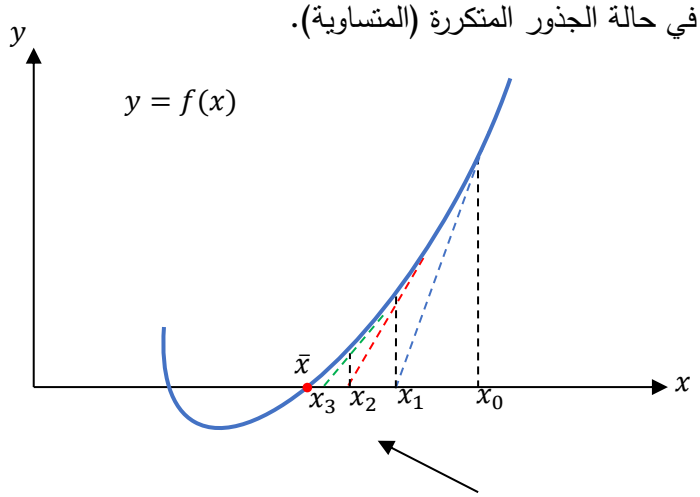
$$f'(x) = 2x$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{{x_i}^2 - 17}{2x_i}$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$R_i = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\varepsilon_i\%$
0	$x_0 = 4$	*−1*	*8*	*−0.125*	*3.13%*
1	$x_1 = 4.125000$	*0.015625*	*8.250000*	*0.001894*	*0.05%*
2	$x_2 = 4.123106$	*0.00004*	*8.246212*	*0.000000*	$< 10^{-6}$

نقاط الضعف لطريقة نيوتن–رافسون الأولى:

1–لا يمكن استخدامها في حالة الجذور المتكررة (المتساوية).

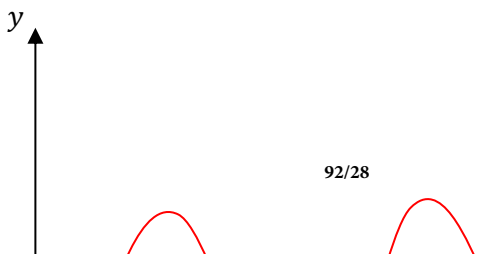


تقارب بطيء والتفاضل يؤول إلى الصفر

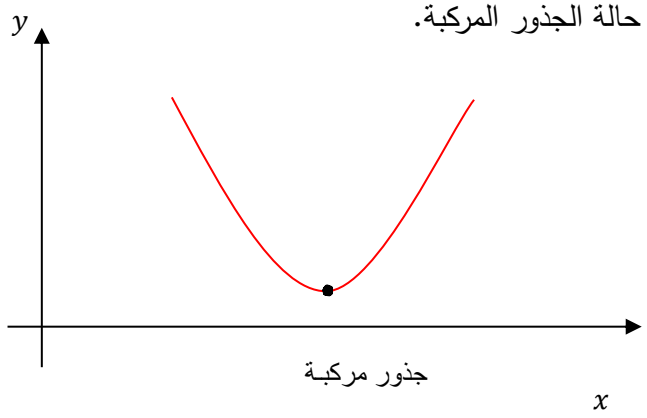
$$x_i \to \bar{x}, \;\; f(x_i) \to 0, \;\; lim\, f'(x) = 0$$

"الميل عند الجذر يساوي صفراً وهو في المقام".

2–كذلك لا يمكن البدء بقيمة النهاية الصغرى أو العظمى لأن التفاضل عند تلك النقاط يساوي صفراً.

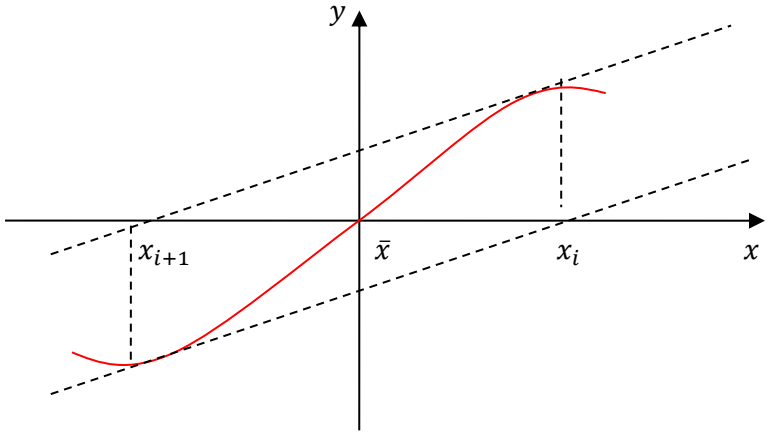


3-لا يمكن استخدامها في حالة الجذور المركبة.



4-لا يمكن استخدامها في حالة التماثل .

"التماثل حول الجذر"



3- طريقة نيوتن للرتبة الثانية (المعدلة):

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$

مع العلم أن $\bar{x} \longrightarrow x_{i+1}$ ومنها $f(x_{i+1}) = 0$.

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$(x_{i+1} - x_i)\left[f'(x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)\right] = -f(x_i)$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{-f(x_i)}{f'(x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x_{i+1} - x_i)}$$

نعلم أن من طريقة نيوتن للرتبة الأولى :

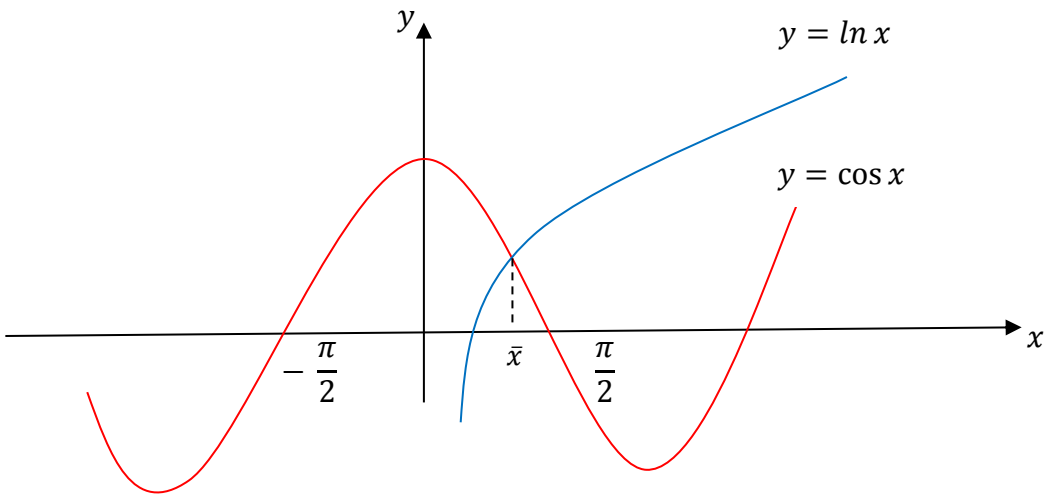
$$x_{i+1} - x_i = \frac{-f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i) - \frac{f(x_i)f''(x_i)}{2f'(x_i)}}$$

ويمكن استخدامها لإيجاد الجذور المتكررة (المتساوية) التي لا يمكن إيجادها باستخدام طريقة نيوتن للرتبة الأولى.

مثال:

استخدم طريقة نيوتن للرتبة الأولى صحيحاً إلى خمس أرقام عشرية. وقارن عدد الخطوات بطريقة نيوتن للرتبة الثانية في إيجاد جذر المعادلة: $ln(x) = cos\,(x)$



1- طريقة نيوتن للرتبة الأولى:

$$f(x) = ln(x) - cos(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + sin(x)$$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)/f'(x)$
$x_0 = 1$	-0.54030	1.84147	-0.29341
$x_1 = 1.29341$	-0.01656	1.73492	-0.00954
$x_2 = 1.30295$	-0.00002	1.73183	-0.00001
$x_3 = 1.30296$	-0.0000001	1.73183	-0.00000

إذاً جذر المعادلة هو:

$$\bar{x} = 1.30296$$

2- طريقة نيوتن للرتبة الثانية:

$$f(x) = ln(x) - cos(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + sin(x)$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} + cos(x)$$

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	$R = \frac{f(x_i)}{f'(x_i) - \frac{f(x_i)f''(x_i)}{2f'(x_i)}}$
$x_0 = 1$	-0.5403	*1.84147*	*-0.45969*	*-0.30456*
$x_1 = 1.30456$	0.00276	*1.73131*	*-0.32448*	*0.00159*
$x_2 = 1.30297$	0.00001	*1.73183*	*-0.32439*	*0.00001*

مثال:

استخدم طريقتي نيوتن-رافسون ونيوتن رافسون للرتبة الثانية (المعدلة) لإيجاد أحد جذور المعادلة:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

مستخدماً تخميناً مبدئياً $x_0 = 0$ ، مستخدماً خمسة أرقام عشرية بعد الفاصلة في الحسابات.

الحل:

أولاً: الحل بطريقة نيوتن رافسون للرتبة الأولى :

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3}{3x_i^2 - 10x_i + 7}$$

i	x_i	$\lvert\varepsilon_a\rvert$
0	0.00000	–
1	0.42857	100%
2	0.68571	57%
3	0.83287	31%
4	0.91333	17%
5	0.95578	8.7%
6	0.97766	4.4%
		2.2%

ثانياً: الحل باستخدام طريقة نيوتن–رافسون المعدلة:

$$f''(x) = 6x - 10$$

بدون القسمة على 2 في المقام:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(3x_i^2 - 10x_i + 7)}{(3x_i^2 - 10x_i + 7)^2 - ((x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(6x_i - 10)}$$

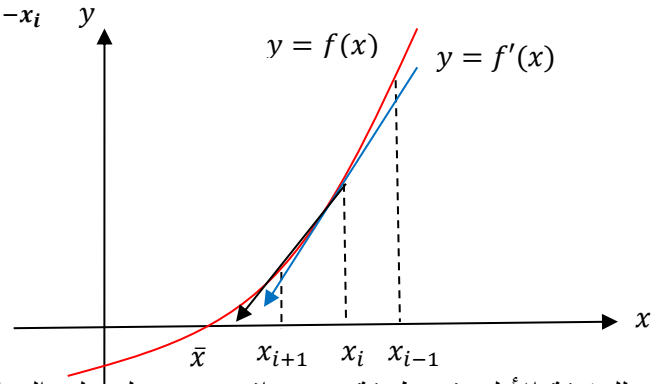
i	x_i	$\lvert\varepsilon_a\rvert$

0	0.00000	–
1	1.10526	100%
2	1.00308	57%
3	1.00000	31%
		17%

4-طريقة القاطع Secant method

من بين المشاكل التي تواجه طريقة نيوتن رافسون هي الحاجة إلى إيجاد قيمة المشتقة (تفاضل الدالة) التي نبحث عن جذورها، وهذا لا يسبب أي مشكلة في حالة الدوال عديدة الحدود؛ إنما قد يكون من الصعب إيجاد تفاضل بعض المعادلات الأخرى (أو أن $f(x_i)$ ليس لها صيغة معينة بل هي ناتجة من خوارزمية عددية). في هذه الحالة نلجأ إلى التفاضل العددي لتقدير المشتقة الأولى والتي عادةً ما يعبر عنها بالفرق الخلفي كما يلي:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1})-f(x_i)}{x_{i-1}-x_i}$$



وبالتعويض بهذا التعبير للمشتقة الأولى في طريقة نيوتن رافسون نحصل على المعادلة التكرارية لطريقة القاطع كالتالي:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

لاحظ أنه لبدء عملية التكرار باستخدام طريقة القاطع لإيجاد الجذر يجب أن نستخدم تخمينين مبدئيين لـ (x_{i-1}) و (x_i) إلا أنه لا يشترط أن يكون هذين التخمينين على جانبين مختلفين من الجذر .

مثال:

استخدم طريقة القاطع لتقدير جذر المعادلة:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

باستخدام التخمينين المبدئيين $x_{-1} = 0$ و $x_0 = 1.0$.

الحل:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

الخطوة الأولى:

بالتعويض في معادلة الدالة $f(x)$ نجد أن:

$$x_{-1} = 0 \qquad f(x_{-1}) = 1.0000$$

$$x_0 = 1.0 \qquad f(x_0) = -0.63212$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(x_{-1} - x_0)}{f(x_{-1}) - f(x_0)}$$

$$= 1 - \frac{-0.63212(0 - 1)}{1 - (-0.63212)}$$

$$= 0.61270$$

الخطوة الثانية:

$$x_0 = 1.0 \qquad f(x_0) = -0.63212$$

$$x_1 = 0.61270 \qquad f(x_1) = -0.07081$$

$$x_2 = 0.61270 - \frac{-0.07081(1 - 0.61270)}{-0.63212 - (-0.07081)} = 0.56384$$

الخطوة الثالثة:

$$x_1 = 0.61270 \qquad f(x_1) = -0.07081$$

$$x_2 = 0.56384 \qquad f(x_2) = 0.00518$$

$$x_3 = 0.56384 - \frac{0.00518(0.61270 - 0.56384)}{-0.07081 - (0.00518)} = 0.56717$$

$$\longrightarrow \quad f(x_3) = -0.00004$$

إذاً طريقة القاطع أسرع من طريقة النقطة الثابتة وقريبة في سرعتها من طريقة نيوتن رافسون.

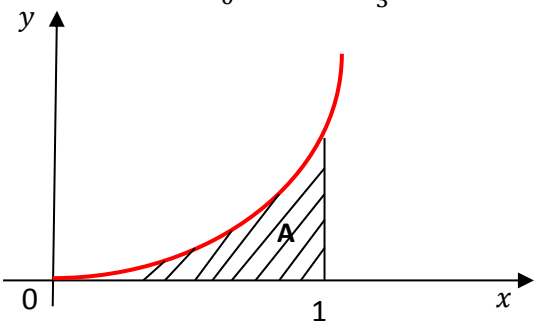
الفصل الرابع

التكـــامل العـددي

بصورة عامة يوجد نوعان من التكامل:

- تكامل محدد و ناتجهُ يكون قيمة عددية وهي تمثل المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة التي تكاملها في فترة حدود التكامل .

$$A = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$$



- تكامل غير محدد و ناتجه دالة.

$$\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

ويستخدم التكامل العددي في إيجاد التكامل المحدد.

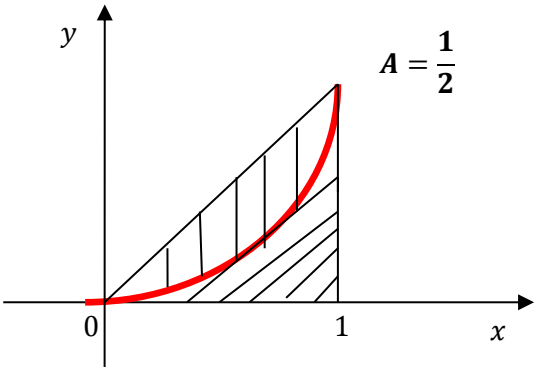
فكثيراً ما نلجأ لإيجاد التكامل عددياً لأن الدالة لا يمكن إيجاد تكاملها بالطرق التحليلية، أو قد تكون الدالة معطاة على هيئة مجموعة بيانات ناتجة من دراسة معملية أو ميدانية.

من الطرق المستخدمة لإيجاد التكامل العددي:

1- طريقة أشباه المنحرفات.
2- طريقة سيمسون.
3- قاعدة نيوتن-كوتا.
4- تكامل المتسلسلات.

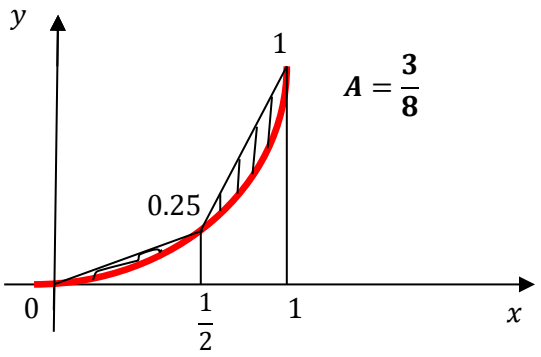
1-طريقة أشباه المنحرفـات Trapezoidal Method

وتعتبر هذه الطريقة من أسهل الطرق وأبسطها في إيجاد التكامل العددي وتعتمد على تقسيم نطاق المتغير المستقل بشكل منتظم إلى مجموعة من أشباه المنحرفات ثم تجميع هذه المساحات.



$$\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(a)



$$\varepsilon = \frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

(b)

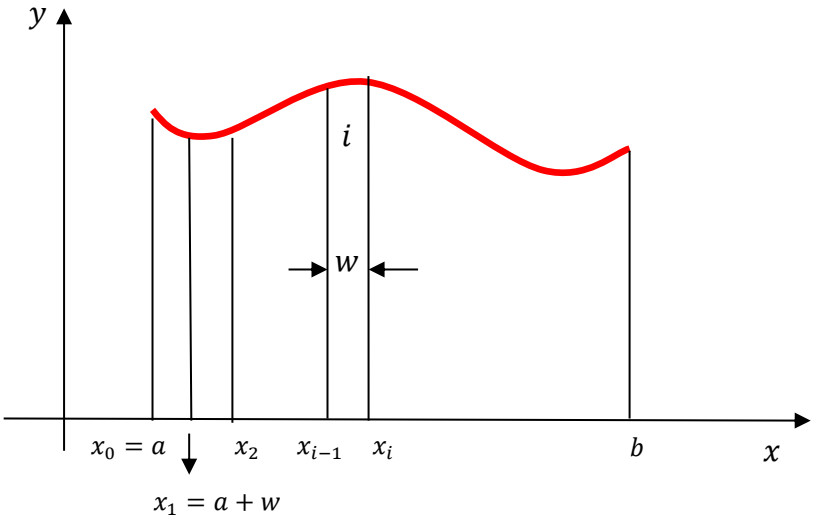
نلاحظ أن الخطأ في الحالة (b) أقل منه في الحالة (a)، وهذا يعني نظرياً أنه كلما قسمنا المساحة إلى مساحات أصغر زادت دقة الناتج. لكن من الناحية العملية هذا غير صحيح دائماً.

لإيجاد قيمة:

$$T = \int_a^b f(x)dx$$

نقسم المساحة من a إلى b إلى n من الأقسام المتساوية بحيث أن إحداثيات x لهذه الأقسام $(x_0, x_1, x_2 \dots \dots x_n)$ ويكون عرض هذه الأقسام

$$w = \frac{b-a}{n}$$



$$a_i = \frac{w}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{w}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

$$T_n = \frac{w}{2}\left[\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \left(f(x_1) + f(x_2)\right) + .. + \left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)\right]$$

$$= \frac{w}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

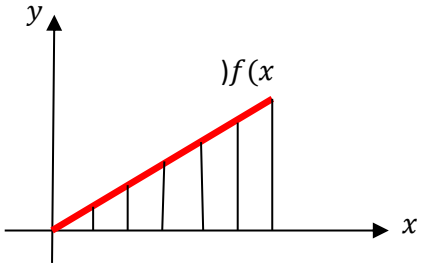
$$= \frac{w}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ \ldots + 2y_{n-1} + y_n]$$

ويمكن تنظيم حسابات هذه الطريقة في جدول كالآتي:

x	$f(x)$	k	$kf(x)$
$x_0 = \mathrm{a}$	$f(x_0)$	1	$f(x_0)$
$x_1 = a + w$	$f(x_1)$	2	$2f(x_1)$
$x_2 = x_1 + w$	$f(x_2)$	2	$2f(x_2)$
⋮	⋮	⋮	⋮
$x_n = b$	$f(x_n)$	1	$f(x_n)$

$$\int_a^b f(x)dx \ \approx \ T_n \approx \frac{w}{2}\sum_{i=0}^{n} k\, f(x_i)$$

❖ **ملاحظة** : هذه الطريقة صحيحة تماماً عندما تكون الدالة خطاً مستقيماً.



مثـال:

استخدم طريقة أشباه المنحرفات وبأخذ عدد العناصر(الفترات): 1 ، 2، 4 لإيجاد التكامل التالي:

$$\int_0^1 (6 - 6x^2)dx$$

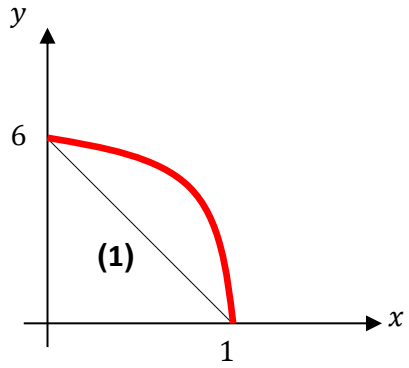
مع العلم بأن

$$\int_0^1 (6-6x^2)dx = 4$$

$i)\quad n=1 \quad\rightarrow\quad w=1$

x	$f(x)$	k	$kf(x)$
0	*6*	*1*	*6*
1	*0*	*1*	*0*
			$\sum kf(x)=6$

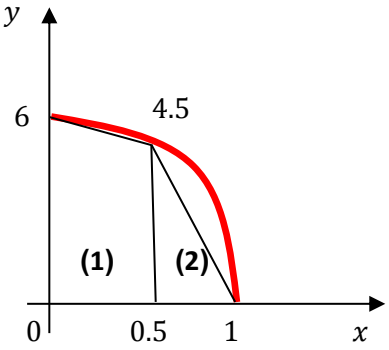
0



$$T_1 = \frac{1}{2} * 6 = 3, \quad \varepsilon\% = \frac{3-4}{4} = 25\%$$

$ii)\quad n=2 \quad\rightarrow\quad w=0.5$

x	$f(x)$	k	$kf(x)$
0	*6*	*1*	*6*
0.5	4.5	*2*	*9*
1		*1*	*0*
			$\sum = 15$

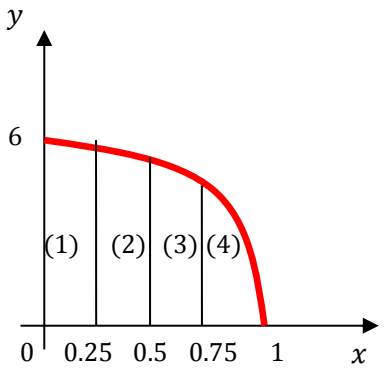


$$T_2 = \frac{w}{2}\sum_{i=0}^{2} kf(x_i) = \frac{0.5}{2} * 15 = 3.75$$

$$\varepsilon\% = 6.25\%$$

$iii)\quad n=4 \quad\rightarrow\quad w = \frac{b-a}{n} = 0.25$

x	$f(x)$	k	$kf(x)$
0	*6*	*1*	*6*
0.25	5.6250	*2*	11.25
0.5	4.5	*2*	9
0.75	2.625	*2*	5.25
1.0	*0*	*1*	*0*
			$\sum = 31.5$



$$T_4 = \frac{0.25}{2} * 31.5 = 3.9375$$

$$\varepsilon\% = 1.56\%$$

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$ باستخدام طريقة أشباه المنحرفات وبأخذ عدد العناصر (5) .

الحل:

نوجد نقاط التقاطع التي تعتبر حدود التكامل

$$\sqrt{x} = x^3 \rightarrow x = x^6 \rightarrow x^6 - x = 0 \rightarrow x(x^5 - 1) = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \ or \ x = 1$$

الحل المضبوط:

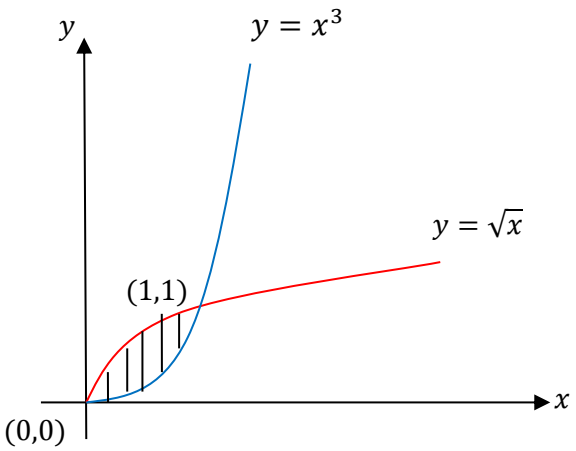
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx$$

$$I = \frac{5}{12} = 0.4167$$

$$f(x) = \sqrt{x} - x^3$$

$$w = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

x	$f(x)$	k	$kf(x)$
0	0	*1*	0
0.2	0.4392	*2*	0.8784
0.4	0.5685	*2*	1.1370
0.6	0.5586	*2*	1.1172
0.8	0.3824	*2*	0.7648
1	0	*1*	0
			$\sum = 3.8974$



$$A = \frac{0.2}{2}(3.8974) = 0.3897 \rightarrow |\varepsilon| = |I - A| = |0.4167 - 0.3897| = 0.0269$$

$$\varepsilon_{\%} = \frac{0.4167 - 0.3897}{0.4167} \times 100\% \cong 6.5\%$$

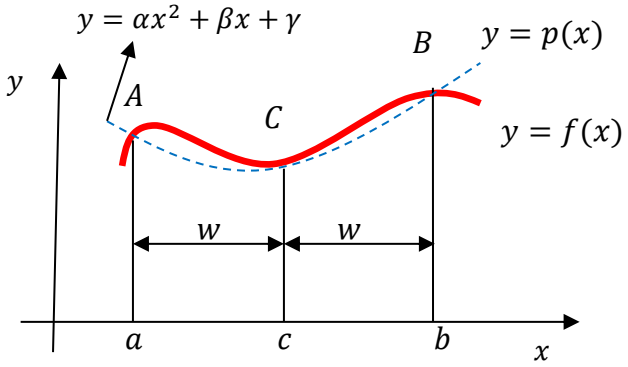
2-طريقة سيمسون [قاعدة $(\frac{1}{3})$] Simpson's Method

في هذه الطريقة نوجد المساحة التقريبية للتكامل بواسطة جمع المساحات تحت مجموعة من المنحنيات من الدرجة الثانية. وهي أقرب إلى الصحة من طريقة أشباه المنحرفات (في حالة لم تكن الدالة المراد تكاملها عديدة حدود من الدرجة الأولى فأقل).

بفرض أن التكامل المطلوب إيجاده:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

عندها نقسم المساحة تحت المنحنى إلى جزأين متساويين في العرض كما في الشكل التالي:



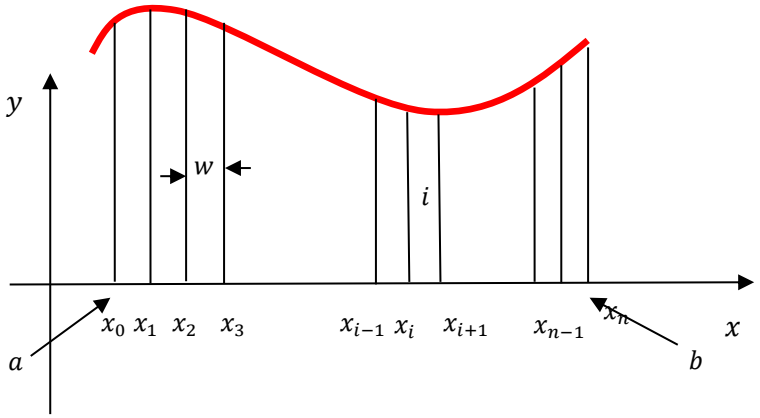
وبالتالي تكون المساحة تحت منحنى الدالة $p(x)$ تعطى بالعلاقة

$$Area = \frac{w}{3}f(a) + \frac{4w}{3}f(c) + \frac{w}{3}f(b)$$

$$\mathrm{A} = \frac{w}{3}[f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

وبصورة عامة عند استخدام طريقة سيمسون لإيجاد التكامل العددي (المساحة تحت المنحنى) لدالة معينة $y = f(x)$ من a إلى b، تقسم المساحة إلى عدد زوجي (n) من الأجزاء (الشرائح) أو الفترات المتساوية في العرض بحيث يكون عرض كل منها w.

$$w = \frac{b-a}{n_{even}}$$



وتكون المساحة المقربة هي مجموع مساحات لدوال من الدرجة الثانية تربط كل ثلاثة نقاط متتاية من الدالة الأصلية.

$$I_S = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{w}{3}\sum_{i=1}^{n-1}[\,f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{w}{3}\big[\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big) + \big(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\big) + \big(\,f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\big) + \cdots + \big(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)\,\big]$$

$$I_S = \frac{w}{3}[\,f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

ولتبسيط الحسابات لهذه الطريقة ترتب الحسابات حسب الجدول التالي:

x	$f(x)$	k	$kf(x)$
$x_0 = \mathrm{a}$	$f(x_0)$	1	$f(x_0)$
$x_1 = x_0 + \mathrm{w}$	$f(x_1)$	4	$4f(x_1)$
$x_2 = x_1 + \mathrm{w}$	$f(x_2)$	2	$2f(x_2)$
.	.	4	.
.	.	2	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	4	.
$x_n = \mathrm{b}$	$f(x_n)$	1	$f(x_n)$
			$\sum_{i=0}^{n} k_i f(x_i)$

$$I_{n_{even}} = \frac{w}{3}\sum_{i=0}^{n} k_i f(x_i)$$

مثـــال:

أوجد قيمة (π) المقربة بتكامل العلاقة التالية عدديا وباستخدام طريقة سيمسون وبأخذ عدد الشرائح 10.

الحـل:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \qquad w = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

x	$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	k	$kf(x)$
0	1.0000	1	1.0000
0.1	0.9901	4	3.9604
0.2	0.9615	2	1.9250
0.3	0.9174	4	3.6696
0.4	0.8621	2	1.7242
0.5	0.8000	4	3.2000
0.6	0.7353	2	1.4706
0.7	0.6711	4	2.6844
0.8	0.6098	2	1.2196
0.9	0.5525	4	2.2100
1.0	0.5000	1	0.5000
			$\sum_{i=0}^{10} = 23.5618$

$$S_{10} = \frac{0.1}{3}(23.5618)$$
$$= 0.785393$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{4} = 0.785393$$
$$\pi = 3.14157$$
$$\varepsilon_r < 2 \times 10^{-5}$$

مثـال:

باستخدام طريقة سيسمون أوجد التكامل : $\int_0^1 (6-6x^2)dx$ بأخذ 4 عناصر، واحسب قيمة الخطأ النسبي.

$$w = \frac{1-0}{4} = 0.25, \qquad f(x) = 6 - 6x^2$$

x	$f(x)$	k	$kf(x)$
0.00	6	*1*	6
0.25	5.6250	4	22.5000
0.50	4.5000	2	9.0000
0.75	2.6250	4	10.5000
1.00	0.00000	1	0
			$\sum_{i=0}^{4} = 48.0000$

$$S_4 = \frac{0.25}{3}(48)$$

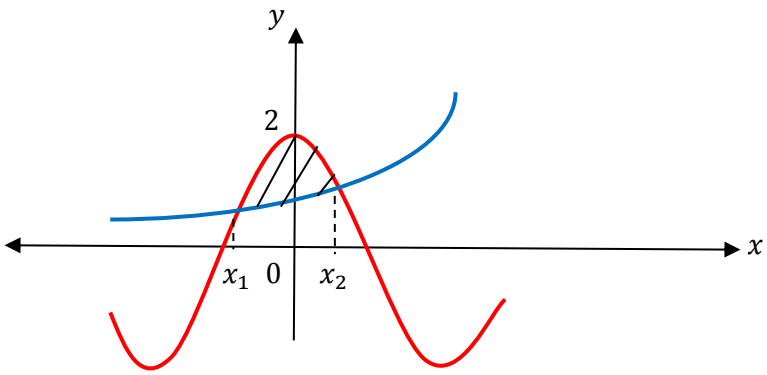
$$= 4$$

$$\varepsilon_r\% = 0\ \%$$

ليس هنا خطأ في انتيجة المحسوبة، لأن الدالة المكاملة من الدرجة الثانية.

"في حالة استخدام طريقة أشباه المنحرفات لنفس هذا المثال كان الخطأ النسبي المئوي $\varepsilon_r\% =$ 3.086 % ."

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = 2\cos x$ ، $y = e^x$ باستخدام طريقة سيمسون وبأخذ عدد العناصر 6.



$$x_1 = -1.454 \quad , \quad x_2 = 0.54$$

مثال:

إذا أعطيت القيم التالية وهي ناتجة من دالة غير معينة فاحسب قيمة التكامل المحصور تحت منحنى هذه الدالة غير المعينة خلال الفترة المعطاة بالجدول التالي.

$$\int_0^{\pi} sin\, x\, dx = 2$$

x	y
0	0.0000
0.5236	0.5000
1.0472	0.8660
1.5708	1.0000
2.0944	0.8660
2.6180	0.5000
3.1416	0.0000

(1) باستخدام طريقة أشباه المنحرفات:

$$w = 0.5236$$

x	y	k	Ky
0	0.0000	1	0.0000
0.5236	0.5000	2	1.0000
1.0472	0.8660	2	1.7321
1.5708	1.0000	2	2.0000
2.0944	0.8660	2	1.7321
2.6180	0.5000	2	1.0000
3.1416	0.0000	1	0.0000
			$\sum = 7.4641$

$$I_T = \frac{0.5236}{2} \times 7.4641$$
$$= 1.9541$$

$$\varepsilon_r\% = 2.3\ \%$$

(2) باستخدام طريقة سيمسون:

x	y	k	ky
0	*0.0000*	1	*0.0000*
0.5236	*0.5000*	4	*2.0000*
1.0472	*0.8660*	2	*1.7321*
1.5708	*1.0000*	4	*4.0000*
2.0944	*0.8660*	2	*1.7321*
2.6180	*0.5000*	4	*2.0000*
3.1416	*0.0000*	1	*0.0000*
			$\sum = 11.4641$

$$I_s = \frac{w}{3}\sum k_i y_i$$

$$= \frac{0.5236}{3} \times 11.4641$$

$$= 2.0009$$

$$\varepsilon_r\% = \ 0.04\%$$

حدود الخطأ للتكامل بطريقة شبه اللمنحرف:

إن حدود قيمة اللخطأ المطلق المتوقع في ناتج التكامل باستخدام طريقة شبه المنحرف يعطى بالمعادلة التالية:

$$|E_T| = \frac{K(b-a)^2}{12n^2}$$

حيث: K هو أكبر مقدار مطلق للتفاضل اللثاني للدالة المكاملة.

كذللك يمكن معرفة عدد الشرائح اللازم استخدامها ليكون هامش الخطأ أقل من قيمة معينة ε، وذلك من خلال العلاقة التالية:

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\ \varepsilon}}$$

أما حدود الخطأ للتكامل باستخدام قاعدة سيمبسون فيمكن وصفها بالعلاقة التالية:

$$E_S = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\hat{f}^{(4)}$$

حيث أن: $\hat{f}^{(4)}$ تمثل القيمة المتوسطة للتفاضلل الرابع للدالة المراد حساب تكاملها، وتحسب بالعلاقة التالية:

$$\hat{f}^{(4)}(x) = \int_a^b x f^{(4)} dx$$

و يمكن حساب عدد الشرائح (الزوجية) اللازم استخدامها لتكون قيمة الخطأ أقل من قيمة معينة ε، وذلك من خلال العلاقة التالية:

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\ \varepsilon}}$$

مثال:

إذا أريد ألا تتعدى قيمة الخطأ المتوقع 2×10^{-5}، فاحسب عدد الشرائح اللازم استخدامها لحساب التكامل التالي بالدقة المطلوبة بطريقتي شبه المنحرف وسيمسون $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$.

$$n_T \geq \sqrt{\frac{(\pi-0)^3}{12\ \times 2 \times 10^{-5}}} = 360$$

$$n_S \geq \sqrt[4]{\frac{(\pi - 0)^5}{180 \times 2 \times 10^{-5}}} = 17 \text{ (فردي)} \Rightarrow n_S = 18 \text{ (زوجي)}$$

التقويم

بين كيف ستختلف قيمة الخطأ في حساب التكامل التالي باستخدام طريقة شبة المنحرف وطريقة سيمسون، وذلك عندما يكون عدد شرائح التكامل لكليهما 10؟

$$\int_0^2 x - 17 \, dx$$

أوجد التكامل التالي عدديا مرة باستام طريقة شبه المنحرف ومرة باستخدام طريقة سيمسون، وذلك بتقسيم المساحة في كل مرة إلى ستة شرائح.

$$\int_0^3 e^{-x^2}$$

وإذا طلب ألا يتجاوز الخطأ المتوقع في ناتج التكامل 10^{-6} فأوجد عدد الشرائح امطلوب في كل طريقة.

الفصل الخامس

حل المعادلات الآنية الخطية عدديّاً

Numerical Solution of Linear System

نظم المعادلات الآنية الخطية تتواجد في مجالات عديدة لتحليل المشاكل الفيزيائية والهندسية وغيرها من مجالات الحياة.

وتظهر الحاجة لحل المعادلات الخطية كنتيجة مباشرة لمشاكل في تحليل نظم حقيقية أو تكون جزءً من الحل لنظم أخرى غير خطية.

هناك نوعان مختلفان من طرق تحليل نظم المعادلات الخطية عددياً هما :

1- الطرق المضبوطة :

وتشمل :

أ- طريقة جاوس للحذف.

ب-طريقة جاوس-جوردان للحذف.

ت-طريقة التحليل لمصفوفات مثلثية LU.

ث-طريقة معكوس المصفوفة.

2- الطرق التقريبيــة :

- الطرق التكرارية

ا- طريقة جاوس-جاكوبي.

ب- طريقة جاوس-سايدل.

طريقة جاوس للحذف:

بفرض أن $AX = b$ هو نظام من المعادلات الخطية ، $\det(A) \neq 0$ ، في هذه الطريقة نحول المنظومة $AX = b$ إلى صورة مصفوفة مثلثية عليا $UX = b'$ بتطبيق بعض العمليات الأساسية على الصفوف وبجعل العنصر الأكبر قيمة عند العنصر القطري في أي صف أو عمود.

ويتم التحويل كالتالي:

بفرض أن $U = (u_{ij})_{n\times n}$

$$a_{kj} = a_{kj} - \left(\frac{a_{ki}}{a_{ii}}\right) a_{ij}$$

$$x_i = \frac{b'_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\, x_j}{u_{ii}}, \quad 1 \le i \le n$$

مثـال:

أوجد الحل لمنظومة المعادلات الخطية الآتيـة.

$$x + y - 2z = 3$$
$$4x - 2y + z = 5$$
$$3x - y + 3z = 8$$

نضع المنظومة على صورة مصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

من منظومة المعادلات نوجد المصفوفة الموسعة (الممتدة):

$$(\mathrm{A|b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

ملاحظة هامة (تحوير جزئي) :

بما أن $a_{12} > a_{11}$ نستبدل الصف الأول بالصف الثاني في المصفوفة الموسعة كالتالي :

$$(\mathrm{A|b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

بتطبيق العملية التالية على الصف الثاني والثالث :

$$a_{2\mathrm{j}} = a_{2\mathrm{j}} - (\frac{1}{4})\, a_{1\mathrm{j}}$$

$$a_{3\mathrm{j}} = a_{3\mathrm{j}} - (\frac{3}{4})\, a_{1\mathrm{j}}$$

فينتـج:

$$(\mathrm{A|b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1.5 & -2.25 & \vdots \ 1.75 \\ 0 & 0.5 & 2.25 & 4.25 \end{pmatrix}$$

وبتطبيق العملية التالية على الصف الثالث:

$$a_{3\mathrm{j}} = a_{3\mathrm{j}} - \left(\frac{1}{3}\right) a_{2\mathrm{j}}$$

$$(\mathrm{A|b}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1.5 & -2.5 & \vdots \ 1.75 \\ 0 & 0 & 3 & 3.6667 \end{pmatrix}$$

وبالتعويض التراجعي نجد أن :

$$3z = 3.6667 \quad \rightarrow \quad z = 1.2223$$

$$1.5\,y - 2.5z = 1.75 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

$$4x - 2y + z = 5 \quad \rightarrow \quad x = 2.4445$$

$$\rightarrow \ X = [1.222 \ \ , 3 \ , 2.445]^T$$

مثال:

أوجد الحل العددي لمنظومة المعادلات الخطية التالية صحيحاً إلى رقمين عشريين بعد الفاصلة :

$$x - y + 4z = 16$$

$$3x + 2y + z = 18$$

$$x + 4y - 2z = 20$$

الحل:

يمكن وضع منظومة المعادلات في صورة مصفوفات كالتالي :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$$

وبالتالي ستكون المصفوفة الموسعة:

$$(\mathrm{A|b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots \ 18 \\ 1 & 4 & -2 & 20 \end{pmatrix}$$

بدون إجراء المحورة الجزئية وبدون استبدال الصفوف .

وبتطبيق العمليات التالية على الصف الثاني والثالث :

$$a_{2\mathrm{j}} = a_{2\mathrm{j}} - a_{21}\, a_{1\mathrm{j}} \quad \rightarrow \quad a_{2j} = a_{2j} - 3a_{1j}$$

$$a_{3j} = a_{3j} - a_{31}\, a_{1j} \quad \rightarrow \quad a_{3j} = a_{3j} - a_{1j}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 16 \\ 0 & 5 & -11 & -30 \\ 0 & 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

وبتطبيق العملية التالية على الصف الثالث:

$$a_{3j} = a_{3j} - \left(\frac{a_{32}}{a_{22}}\right) a_{2j} \quad \rightarrow \quad a_{3j} = a_{3j} - a_{2j}$$

تصبح المصفوفة:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 16 \\ 0 & 5 & -11 & -30 \\ 0 & 0 & 5 & 34 \end{pmatrix}$$

وبالتعويض العكسي نجد أن:

$$5z = 34 \quad \rightarrow \quad z = 6.80$$

$$5y - 11z = -30 \quad \rightarrow \quad y = 8.96$$

$$x - y + 4z = 16 \quad \rightarrow \quad x = -2.24$$

$$X = [-2.24\,, 8.96\,, 6.80]$$

مثـــال:

أوجد الحل لمنظومة المعادلات الخطية الآتية مستخدماً (من 1 إلى 6) أرقام عشرية بعد الفاصلة مرة بدون ترتيب الصفوف ومرة بترتيب الصفوف لتكون القيمة الأكبر في العنصر القطري من المصفوفة المثلثية.

$$0.61\, x + 1.23\, y + 1.72\, z = 0.79$$

$$1.02\, x + 2.15\, y - 5.51\, z = 12.00$$

$$-4.34\, x + 11.20\, y - 4.25\, z = 16.30$$

الحـل:

على صورة مصفوفة:

$$\begin{pmatrix} 0.61 & 1.23 & 1.72 & 0.79 \\ 1.02 & 2.15 & -5.51 & 12.00 \\ -4.34 & 11.20 & -4.25 & 16.30 \end{pmatrix}$$

عينة من الحسابات باستخدام برنامج الماتلاب في حالة عدد الخانات العشرية $n = 2$:

مرفـــــق

بفرض أن n هو عدد الأرقام العشرية المأخوذة في الحسابات .

- بدون إجراء المحورة الجزئية:

n	x	y	z
6	1.606526	1.601359	−1.255612
5	1.60599	1.60162	−1.25561
4	1.6036	1.6028	−1.2556
3	1.667	1.572	−1.256
2	2.41	1.21	−1.26
1	9.4	−2.2	−1.3

- بعد إجراء المحورة الجزئية:

n	x	y	z
6	1.606450	1.601397	−1.255611
5	1.60646	1.60140	−1.25561
4	1.6063	1.6013	−1.2557
3	1.606	1.601	−1.256
2	1.60	1.60	−1.25
1	1.8	1.7	−1.2

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -711 \\ 2535 \\ -120 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b' = \begin{pmatrix} -710 \\ 2536 \\ -119.9 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 99.667 \\ -312.067 \\ 9.500 \end{pmatrix}$$

التقويم :

1) حل منظومة المعادلات الخطية الآتية باستخدام طريقة جاوس للحذف:

$$2x + y + 4z = 12$$
$$8x - 3y + 2z = 20$$
$$4x + 11y - z = 33$$
$$(x = 3 \quad , \quad y = 2 \, , \quad z = 1 \,)$$

2) استخدم طريقة جاوس للحذف لإيجاد حل المعادلات الآنية التالية عددياً باستخدام رقمين عشريين , وقارن النتائج في حالة ترتيب الصفوف وعدم ترتيبها .

$$3x + 2y + 7z = 4$$
$$2x + 3y + z = 5$$
$$3x + 4y + z = 7$$
$$(x = 0.875 \quad , \quad y = 1.250 \, , \quad z = -0.125 \,)$$

طريقة جاوس–جوردان:

هذه الطريقة تعتبر تعديلاً لطريقة جاوس للحذف، وفيها يتم تخفيض (تحويل) المصفوفة A من المعادلة $AX = b$ إلى مصفوفة قطرية أو بالأحرى إلى مصفوفة الوحدة وذلك بجعل كل العناصر فوق وتحت القطر الرئيسي أصفاراً، وعندها سنختصر الجهد في التعويض الخلفي.

مثال:

حل المعادلات الآتية باستخدام طريقة جاوس–جوردان:

$$10x + y + z = 12$$
$$2x + 10y + z = 13$$
$$x + y + 5z = 7$$

الحل:

نحول المعادلات إلى صورة مصفوفات $AX = b$:

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc:c} 10 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 10 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right]$$

وبإجراء العملية التالية على الصف الأول :

$$R_1 \to R_1 - 9R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -8 & -44 & -51 \\ 2 & 10 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right]$$

وبإجراء العمليتين $R_2 \to R_2 - 2R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$ على الصف الثاني والثالث تنتج المصفوفة:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -8 & -44 & -51 \\ 0 & 26 & 89 & 115 \\ 0 & 9 & 49 & 58 \end{array}\right]$$

وبإجراء العملية $R_2 \to R_2 - 3R_3$ على الصف الثاني :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -8 & -44 & -51 \\ 0 & 1 & 58 & 59 \\ 0 & 9 & 49 & 58 \end{array}\right]$$

بإجراء العمليتين $R_3 \to R_3 - 9R_2$, $R_1 \to R_1 + 8R_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 420 & \vdots & -51 \\ 0 & 1 & 58 & \vdots & 59 \\ 0 & 0 & -473 & \vdots & -473 \end{bmatrix}$$

بإجراء العملية $R_3 \to \frac{-1}{473} R_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 420 & \vdots & -51 \\ 0 & 1 & 58 & \vdots & 59 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

بإجراء العمليتين $R_2 \to R_2 - 58R_3$, $R_1 \to R_1 - 420R_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\to x = 1 \,,\ y = 1 \,,\ z = 1$$

مثـال :

حل منظومة المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة جاوس–جوردان :

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 + 10x_2 - x_3 = 10$$

$$x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 9$$

الحـــل :

نحول أولاً المعادلات إلى صورة مصفوفات $AX = b$:

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \\ 1 & -2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & \vdots & 12 \\ 1 & 10 & -1 & \vdots & 10 \\ 1 & -2 & 10 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \to R_1 - 9R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -89 & 10 & \vdots & -78 \\ 1 & 10 & -1 & \vdots & 10 \\ 1 & -2 & 10 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -89 & 10 & \vdots & -78 \\ 0 & 99 & -11 & \vdots & 88 \\ 0 & 87 & 0 & \vdots & 87 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \to R_2 \,/\, 11 \\ R_3 \to R_3 \,/\, 87 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -89 & 10 & \vdots & -78 \\ 0 & 9 & -1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \to R_2 - 8R_3 \\ R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -89 & 10 & \vdots & -78 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \to R_1 + 89R_2 \\ R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -79 & \vdots & -78 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \to R_1 + 79R_3 \\ R_2 \to R_2 + R_3 \\ R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\to x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

ثانياً: الطرق التقريبية (التكرارية) Iterative Method

(1) طريقة جاكوبي Jacobi Method :

بفرض أن المصفوفة A يمكن كتابتها كمجموع المصفوفات $L + U + D$ وللسهولة سنركز على المجموعة 3×3 :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

وبالتالي ستكون :

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

خطوات الحل :

1) تكمن المرحلة الأولى من الحل في إعادة صياغة (ترتيب) المعادلات كالتالي:

$$a_{11}x_1 = b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3$$
$$a_{22}x_2 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3$$
$$a_{33}x_3 = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2$$

أو باستخدام المصفوفات كالتالي :

$$DX = b - (L + U)X$$

2) تكون المرحلة الثانية هي قسمة طرفي المعادلة رقم (1) على العنصر القطري (a_{ii}) لنحصل على:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_3)$$

وهذا يكافئ ضرباً متقدماً لكل من الطرفين في معكوس D :

$$X = D^{-1}(b - (L + U)X)$$

ويمكن إعادة الترتيب لتكون العملية تقريباً متتالياً كما في الصورة التالية:

$${x_1}^{m+1} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}{x_2}^m - a_{13}{x_3}^m)$$

$${x_2}^{m+1} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}{x_1}^m - a_{23}{x_3}^m)$$

$${x_3}^{m+1} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}{x_1}^m - a_{32}{x_2}^m)$$

أو في صيغة مصفوفة كالتالي:

$$X^{m+1} = D^{-1}[b - (L + U)X^m]$$

وبصورة عامة يعرف جاكوبي لمجموعة عامة من n من المعادلات على الصورة :

$$x_i^{m+1} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} a_{ij}x_j^m) \quad , \quad i = 1,2, \dots \dots, n$$

وكالمعتاد في طرق التقريب المتتالي، يجب معرفة تقريب ابتدائي $x_{\mathrm{i}}^{(0)}$ ، وفي حالة عدم توفر معلومات مسبقة عن الحل النهائي يكون من المناسب البدء بأخذ $x_i^{(0)} = 0$ لجميع قيم i . ثم نعوض بهذه القيم في الأطراف اليمنى من المعادلات لنحصل على التقريبات $x_{\mathrm{i}}^{(1)}$ ويمكن تكرار هذه العملية حتى يتحقق الشرط :

$$max_i|x_i^{m+1} - x_i^m| \leq \varepsilon$$

حيث ε هي درجة سماح معطاة.

مثـال:

حل منظومة المعادلات الآتيـة باستخدام طريقة جاكوبـي:

$$5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$
$$x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7$$

الحـل:

نجعل المعادلات على الصورة :

$$x_1{}^{m+1} = \frac{1}{5}(6 - 2x_2{}^m + x_3{}^m)$$
$$x_2{}^{m+1} = \frac{1}{6}(4 - x_1{}^m + 3x_3{}^m)$$
$$x_3{}^{m+1} = \frac{1}{4}(7 - 2x_1{}^m - x_2{}^m)$$

وبالبدء بقيم $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ نحصل على:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{5}(6 - 2 * 0 + 0) = 1.200$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(4 - 0 + 3 * 0) = 0.667$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(7 - 2 * 0 - 0) = 1.750$$

ومتابعة الحل التكراري نجد أن:

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$
0	0	0	0
1	1.200	0.667	1.750
2	1.283	1.342	0.983
3	0.860	0.944	0.773
4	0.977	0.910	1.084

5	1.053	1.046	1.034
6	0.988	1.008	0.962
7	0.989	0.983	1.004
8	1.008	1.004	1.010
9	1.000	1.004	0.995
10	0.997	0.998	0.999
11	1.001	1.000	1.002

أوقفت عملية التكرار والتقريب عندما تحققت العلاقة :

$$max\left|x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}\right| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} = 0.005$$

وفي هذه الطريقة أعطت طريقة جاكوبي الحل مضبوطاً لرقمين عشريين , في إحدى عشرة خطوة متتالية.

مثـال:

في المثال السابق بدل ترتيب المعادلتين الأولى والثانية كل مكان الأخرى , وادرس الحل باستخدام طريقة جاكوبي .

الحـل:

$$x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 4$$
$$5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7$$

m	$x_1^{(\mathrm{m})}$	$x_2^{(\mathrm{m})}$	$x_3^{(\mathrm{m})}$
0	0	0	0
1	4.000	3.000	1.750
2	−8.750	−6.125	−1.000
3	37.750	24.375	7.656
4	−119.282	−87.547	−23.49
5	459.625	289.596	83.278

نلاحظ تباعد سريع إذا هناك شرط مسبق للتقارب لطريقة جاكوبي!

شرط التقارب هو :

$$\rho[-(\mathrm{D}+\mathrm{L})\mathrm{U}] < 1$$

$$spectral\ radius < 1$$

(2) طريقة جاوس− سايدل Gauss−Seidel :

من الملاحظ في طريقة جاكوبي أنه عند استخدام المعادلة الثانية لحساب $x_2^{(\mathrm{m}+1)}$, فإن قيمة $x_1^{(\mathrm{m}+1)}$ تكون معلومة، وبالتالي قد تستخدم هذه القيمة بدلاً عن قيمتها السابقة $x_1^{(\mathrm{m})}$، ولما كانت $x_1^{(\mathrm{m}+1)}$ أقرب للقيمة المضبوطة x_1 عنها من $x_1^{(\mathrm{m})}$ فإن هذا سيؤدي إلى زيادة سرعة التقارب. وبالمثل يكون من البديهي استخدام $x_1^{(\mathrm{m}+1)}$ و $x_2^{(\mathrm{m}+1)}$ في المعادلة الثالثة لأن كل هذه القيم تكون معلومة عند تعيين قيمة جديدة لـ x_3 ومن ثم فربما يكون من الأفضل محاولة التقريب المتتالي في الصورة:

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(m)} - a_{13}x_3^{(m)}\right)$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(m+1)} - a_{23}x_3^{(m)}\right)$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(m+1)} - a_{32}x_2{}^{(m+1)}\right)$$

أو في صورة مصفوفات كالتالي :

$$(D+L)X^{(m+1)} = b - UX^{(m)}$$

أو:

$$X^{(m+1)} = (D+L)^{-1}(b - UX^{(m)})$$

وتعرف طريقة جاوس–سايدل لمجموعة عامة في n من المعادلات بالصورة:

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(m)} \right)$$

$$i = 1,2, \dots \dots, n$$

مثـال :

استخدم طريقة جاوس– سايدل لحل منظومة المعادلات التالية:

$$5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$

$$x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7$$

الحـل:

$$x_1{}^{m+1} = \frac{1}{5}(6 - 2x_2{}^{m} + x_3{}^{m})$$

$$x_2{}^{m+1} = \frac{1}{6}\left(4 - x_1{}^{(m+1)} + 3x_3{}^{m}\right)$$

$$x_3{}^{m+1} = \frac{1}{4}\left(7 - 2x_1{}^{(m+1)} - x_2{}^{(m+1)}\right)$$

ونبدأ بقيم ابتدائية $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ لنحصل على:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{5}(6 - 2 * 0 + 0) = 1.200$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(4 - 1.200 + 3 * 0) = 0.467$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(7 - 2 * 1.200 - 0.467) = 1.033$$

وبمتابعة الخطوات التكرارية للحل نجد أن :

m	$x_1^{(m)}$	$x_1^{(m)}$	$x_1^{(m)}$
0	0	0	0
1	1.200	0.467	1.033
2	1.220	0.980	0.895
3	0.987	0.950	1.019
4	1.024	1.006	0.987
5	0.995	0.994	1.004
6	1.003	1.002	0.998
7	0.999	0.999	1.001

ومن ثم نجد أن هذه الطريقة تستغرق فقط سبع خطوات بدلاً من إحدى عشرة كما سبق وأن توقعنا.

مثال:

حل منظومة المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة جاوس–سايدل

$$28x_1 + 4x_2 - x_3 = 32$$
$$2x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 35$$
$$x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 24$$
$$\varepsilon < 0.00002$$

الحل:

$$x_1{}^{m+1} = \frac{1}{28}(32 - 4x_2{}^{m} + x_3{}^{m})$$
$$x_2{}^{m+1} = \frac{1}{17}\left(35 - 2x_1{}^{(m+1)} - 4x_3{}^{m}\right)$$
$$x_3{}^{m+1} = \frac{1}{10}\left(24 - x_1{}^{(m+1)} - 3x_2{}^{(m+1)}\right)$$

بأخذ بقيم ابتدائية $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$

$$x_1{}^{m+1} = \frac{1}{28}(32 - 4 * 0 + 0) = 1.1428571$$

$$x_2{}^{m+1} = \frac{1}{17}(35 - 2 * 1.1428571 - 4 * 0) = 1.9243697$$

$$x_3{}^{m+1} = \frac{1}{10}(24 - 1.1428571 - 3 * 1.9243697) = 1.7084034$$

m	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	1.1428571	1.9243697	1.7084034
2	0.9289615	1.5475567	1.8428368
3	0.9875932	1.5090274	1.8485325
4	0.9933008	1.5070158	1.8485625
5	0.9935893	1.5069741	1.8485488
6	0.9935947	1.5069774	1.8485473

التقويم:

حل منظومة المعادلات الآنية الخطية التالية باستخدام طريقة جاوس–سايدل.

$$10x - 2y - z - w = 3$$

$$-2x + 10y - z - w = 15$$

$$-x - y + 10z - 2w = 27$$

$$-x - y - 2z + 10w = -9$$

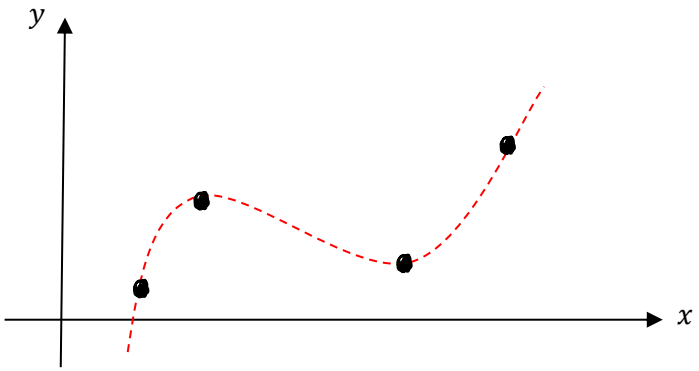
$$(x = 0.9999\,,\ \ y = 1.9999\,,\ \ z = 2.9999\,,\ \ w = 0.0002$$

الفصل السادس

الاستكمـال

1-الاستكمال بعديدة حدود (صيغة لاجرانج).

المطلوب هو إيجاد دالة كثيرة الحدود من الرتبة n تمر بمجموعة من $(n+1)$ من النقاط المختلفة.



بفرض عديدة أو كثيرة حدود خطية تمر بالنقطتين (x_1, y_1) , (x_0, y_0) بحيث تكون على الصورة:

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

لذا يلزمنا أن يكون:

$$a_0 + a_1 x_0 = y_0$$
$$a_0 + a_1 x_1 = y_1$$

لهما حل وحيد هو:

$$a_0 = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1}, \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

وعليه فإن:

$$P_1(x) = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\, x$$
$$= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

ويرمز لها عادةً بالصورة:

$$= L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1$$

حيث:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

ويمكن تعميم هذه النتيجة كالتالي:

بفرض أن $P_n(x)$ عديدة حدود تمر بالنقاط $(n+1)$ فإن:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i$$

حيث:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

أي أن البسط في $L_i(x)$ يتكون من جميع حواصل الضرب الممكنة للعوامل $(x - x_j)$ باستثناء $(x - x_i)$، ويكون المقام مثله مثل البسط ولكن باستبدال x بـ x_i.

مثـال:

أوجد عديدة الحدود من الدرجة الثانية التي تقرب الاستكمال للدالة $f(x) = ln\, x$ باستخدام البيانات التالية، ثم أوجد تقدير قيمة $\ln 2.7$ باستخدام هذا التقريب.

x_i	2	2.5	3
$f(x_i)$	0.69315	0.91629	1.09861

الحـل:

$$P(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + L_2(x)\, y_2$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-3)}{(2-2.5)(2-3)} = \frac{x^2 - 5.5x + 7.5}{0.5}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(2.5-2)(2.5-3)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{-0.25}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(3-2)(3-2.5)} = \frac{x^2 - 4.5x + 5}{0.5}$$

وبهذا تكون عديدة الحدود التي تمر بهذه النقاط الثلاث من الدرجة الثانية:

$$P_2(x) = \frac{x^2 - 5.5x + 7.5}{0.5}(0.69315) + \frac{x^2 - 5x + 6}{-0.25}(0.91629) + \frac{x^2 - 4.5x + 5}{0.5}(1.09861)$$

$$\rightarrow P_2(x) = -0.08164\,x^2 + 0.81366\,x - 0.60761$$

وبالتالي يمكن حساب تقدير وسطى لقيمة $ln\,x$ من $P_2(x)$ فعلى سبيل المثال:

$$ln(2.7) = P_2(2.7) = 0.99412$$

في حين أن القيمة المضبوطة هي: 0.99325

التقويـم:

1) كوّن عديدة حدود الاستكمال من الدرجة الثالثة للبيانات التالية ومن ثمّ قدّر $f(1)$.

x_i	-2	0	3	4
$f(x_i)$	5	1	55	209

2) كون كثيرة (عديدة) حدود الاستكمال الخطية للدالة $f(x) = sin\,x$ مستخدماً البيانات التاليـة:

x_i	0.5	0.6
$f(x_i)$	0.4794255	0.5646424

ومن ثم قدر قيمة $sin\,(0.55)$، ومن ثم احسب قيمة الخطأ النسبي المئوي للناتج.

مثـــال:

استخدم الاستكمال بصيغة لاجرانج لإيجاد قيمة y عندما $x = 10$ إذا كانت قيم x و y معطاة كالتالي:

x	5	6	9	11

y	12	13	14	16

الحل:

$$x_0 = 5,\quad x_1 = 6\,,\quad x_2 = 9\,,\quad x_3 = 11$$
$$y_0 = 12,\quad y_1 = 13\,,\quad y_2 = 14\,,\quad y_3 = 16$$

باستخدام صيغة لاجرانج:

$$y = f(x) = \frac{(x-6)(x-9)(x-11)}{(5-6)(5-9)(5-11)}(12) + \frac{(x-5)(x-9)(x-11)}{(6-5)(6-9)(6-11)}(13) + \frac{(x-5)(x-6)(x-11)}{(9-5)(9-6)(9-11)}(14) + \frac{(x-5)(x-6)(x-9)}{(11-5)(11-6)(11-9)}(16)$$

وبوضع $x = 10$ في المعادلة السابقة نحصل على:

$$y = f(10) = \frac{(10-6)(10-9)(10-11)}{(5-6)(5-9)(5-11)}(12) + \frac{(10-5)(10-9)(10-11)}{(6-5)(6-9)(6-11)}(13) + \frac{(10-5)(10-6)(10-11)}{(9-5)(9-6)(9-11)}(14) + \frac{(10-5)(10-6)(10-9)}{(11-5)(11-6)(11-9)}(16)$$
$$= 2 - 4.333333 + 11.666667 + 5.333333$$
$$= 14.666667$$

لاحظ بارغم من أن القيمة المحسوبة $f(10)$ كانت بين $f(9)$ و $f(11)$ ، إلا أن هذا ليس شرطاً عندما يكون الاستكمال غير خطي (أي باستخدام ثلاث نقاط من البيانات فما فوق).

2-الاستكمال بكثيرة الحدود (صيغة الفروق المقسومة).

عند برمجة طريقة لاجرانج للاستكمال فإنها ستكون غير مناسبة بشكل كفوء؛ نتيجة عملية الضرب اللازمة في هذه الطريقة.

لذا نحتاج إلى طرق أكثر كفاءة خالية من عيوب الطريقة السابقة.

ومن الممكن التعبير عن كثيرة الحدود للاستكمال بدلالة الفروق المقسومة التي تعرف على النحو التالي:

$$f(x_p\,,x_{p+1}) = \frac{f(x_{p+1}) - f(x_p)}{x_{p+1} - x_p}$$

"الفرق المقسوم الأول"

وهو ما يمثل ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $(x_p\,,f(x_p))\,,(x_{p+1}\,,f(x_{p+1}))$.

وبصورة عامّة يكون الفرق المقسوم الميمي:

$$f(x_p\,,x_{p+1}\,,x_{p+1},\dots\dots,x_{p+m}) = \frac{f(x_{p+1}\,,x_{p+2}\,,x_{p+3},\dots,x_{p+m}) - (x_p\,,x_{p+1}\,,x_{p+2},\dots,x_{p+m})}{x_{p+m} - x_p}$$

ومن المناسب للحسابات اليدوية ترتيب جدول الفروق المقسومة على النحو التالي:

x_i	$f(x_i)$	الفرق المقسوم الأول $\Delta f(x_i)$	الفرق المقسوم الثاني $\Delta^2 f(x_i)$	الفرق المقسوم الثالث $\Delta^3 f(x_i)$	الفرق المقسوم الرابع $\Delta^4 f(x_i)$
x_0	$f(x_i)$				
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0,x_1)$			
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1,x_2)$	$f(x_0,x_1,x_2)$		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$	
x_4	$f(x_4)$	$f(x_3,x_4)$	$f(x_2,x_3,x_4)$	$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$	$f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$

ويمكن كتابة عديدة حدود الاستكمال $P_n(x)$ المارة بالنقاط: $[x_i\,,f(x_i)]$

$i = 0,1,2,\dots,n$، بدلالة الفروق المقسومة على النحو التالي:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0,x_1)(x - x_0) + f(x_0,x_1,x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0,x_1,\dots,x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

مثـال:

كون جدول الفروق المقسومة باستخدام البيانات التاليـة، ثم احسب $P_n(1.3)$.

x_i	0.5	1	3.5	4
$f(x_i)$	-3	-4	6	11

الحـل:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0.5	-3	-2		
1	-4		2	
		4		0
3.5	6		2	
		10		
4	11			

بالتعويض بالفروق المقسومة الواردة بالجدول السابق:

$$P_3(x) = -3 - 2(x - 0.5) + 2(x - 0.5)(x - 1) + 0\ (x - 0.5)(x - 1)(x - 3.5)$$

$$P_3(1.3) = -4.12$$

مثـال:

أوجد عديدة الحدود التي تحقق الجدول التالي ومنها أوجد $P_4(2.5)$.

x_i	-4	-1	0	2	5
$f(x_i)$	1245	33	5	9	1335

الحـل:

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$

-4	1245	$\frac{33-1245}{-1-(-4)}=-404$			
-1	33	$\frac{5-33}{0-(-1)}=-28$	$\frac{-8-(-404)}{0-(-4)}=94$		
0	5	$\frac{9-5}{2-0}=2$	$\frac{2-(-28)}{2-1}=10$	$\frac{10-94}{2-(-4)}=-14$	$\frac{13+14}{5+4}=3$
2	9	$\frac{1335-9}{5-2}=-442$	$\frac{442-2}{5-0}=88$	$\frac{88-10}{5-(-1)}=13$	
5	1335				

$$P_4(x) = 1245 + (-404)\big(x-(-4)\big) + 94\big(x-(-4)\big)(x-(-1)) + (-14)\,\big(x-(-4)\big)\big(x-(-1)\big)(x-0) + 3\big(x-(-4)\big)\,(x-(-1))(x-0)(x-2)$$

$$= 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 14x + 5$$

$$P_4(2.5) = 46.5625$$

قدّر قيمة $P_4(1.5)$ ولاحظ أن قيمتها تساوي 4.1875، (تذكر أن دالة الاستكمال غير خطية في هذا المثال، لذلك ليس شرطاً أن تقع قيمة الدالة بين $P_4(0) = 5$ و $P_4(2) = 9$).

3-الاستكمال بكثيرة الحدود (صيغة الفروق المحدودة).

هذه الطريقة تدرس السهولة الناتجة عندما تكون نقاط البيانات على أبعاد متساوية عند استكمال البيانات. كما يستحسن ترتيب البيانات تصاعديا أو تنازليا لتسهيل الحل.

بفرض أن $(x_i, f(x_i))$ هي مجموعة بيانات نقاط معطاة في جدول وعلى أبعاد متساوية h ، أي أن $x_i = x_0 + ih$ ، $f_i = f(x_i)$، عندئذ يمكن إيجاد تعبير بديل لكثيرة حدود الاستكمال بدلالة الفروق الأمامية التي تعرف على النحو التالي:

يشار إلى $f_{i+1} - f_i$ بفرق أمامي أول عند $x = x_i$ ويرمز له بالرمز Δf_i وتُعرف الفروق الأمامية من رتب أعلى تكرارياً على النحو التالي:

$$\Delta^m f_i = \Delta(\Delta^{m-1} f_i)$$

الفرق الميمي يساوي الفرق بين الفروق السابقة. فعلى سبيل المثال الفرق الأمامي الثاني عند $x = x_i$ يكون:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i)\\ &= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i\\ &= (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i)\\ &= f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i\end{aligned}$$

ويمكن سرد الفروق المتتالية في جدول كالآتي:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$\Delta f_0 = f_1 - f_0$	$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$	$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$
x_2	f_2	$\Delta f_1 = f_2 - f_1$	$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$	
x_3	f_3	$\Delta f_2 = f_3 - f_2$		

وبالتالي تكون صيغة عديدة حدود الاستكمال من الدرجة n أي $P_n(x)$ بدلالة الفروق الأمامية على **بصيغة الفروق المحدودة** على الصورة:

$$\begin{aligned}P_n(x) = f_0 + \frac{1}{h}\Delta f_0(x - x_0) + \frac{1}{2!\,h^2}\Delta^2 f_0(x - x_0)(x - x_1) + \ \dots\\ + \ \frac{1}{n!\ h^n}\Delta^n f_0(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})\end{aligned}$$

وهذه يمكن تبسيطها أكثر باستبدال المتغير $x = x_0 + sh$. ونتيجة لهذا فإن كثيرة الحدود التي من درجة n على الأكثر في x تتحول إلى كثيرة حدود من درجة n على الأكثر في s لاحظ أن:

$$x - x_i = (x_0 + sh) - (x_0 + ih) = (s - i)h$$

وبالتالي فإن $P_n(x)$ تصبح معطاة **بصيغة نيوتن للفروق الأمامية:**

$$P_n(x_0 + sh) = f_0 + \Delta f_0 s + \frac{1}{2!}\Delta^2 f_0 s(s-1) + \frac{1}{n!}\Delta^n f_0 s(s-1)\dots(s-n+1)$$

$$P_n(x_0 + sh) = \sum_{i=0}^{n} \Delta^i f_0 \binom{S}{i}$$

حيث $\binom{S}{i}$ يرمز لمعامل ذات الحدين (*Binomial Coefficient*)، ويعطى بالعلاقة:

$$\binom{S}{i} = s!/[i!\,(s-i)!]$$

مثال:

باستخدام صيغة نيوتن للفروق الأمامية احسب $P_4(0.12)$ حيث $P_4(x)$ تستكمل أول خمس نقاط من البيانات الواردة في الجدول التالي:

x	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0.0	−2.500000				
		0.512987			
0.1	−1.987013		−0.101732		
		0.411255		0.025432	
0.2	−1.575758		−0.076300		−0.007570
		0.334955		0.017862	
0.3	−1.240803		−0.058438		−0.004988
		0.276517		0.012874	
0.4	−0.964286		−0.045564		−0.003392
		0.230953		0.009482	
0.5	−0.733333		−0.036082		−0.002358
		0.194871		0.007124	
0.6	−0.538462		−0.028958		−0.001689
		0.165913		0.005435	
0.7	−0.372549		−0.025230		
		0.142390			
0.8	−0.230159				

$$P_4(x_0 + sh) = f_0 + \Delta f_0 s + \Delta^2 f_0 \frac{s(s-1)}{2!} + \Delta^3 f_0 \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} + \Delta^4 f_0 \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}$$

وبما أن: $x_0 = 0,\ h = 0.1,\ x = 0.12$

إذاً في هذه الحالة $x_0 = 0\ ,\ h = 0.1\ ,\ x_0 + sh = 0.12$

وبالتالي ستكون: $s = 1.2$

وبالتعويض في الفروق الأمامية الواردة بالجدول نحصل على:

$$P_4(0.12) = -2.5 + (0.512987)(1.2) + \frac{1}{2}(-0.101732)(1.2)(0.2) + \frac{1}{6}(0.025432)(1.2)(0.2)(-0.8) + \frac{1}{24}(-0.007570)(1.2)(0.2)(-0.8)(-1.8)$$

$$= -1.897546$$

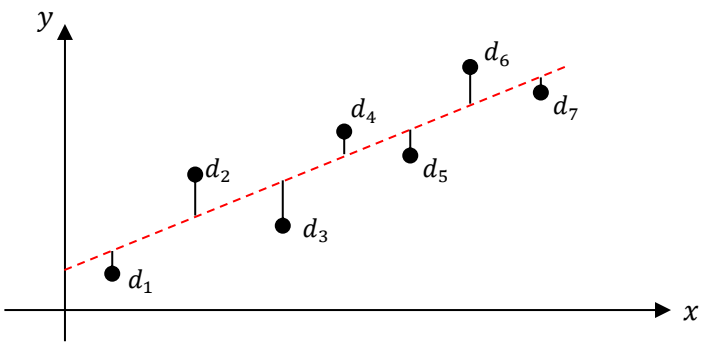
الباب السابع

انطباق (مـلاءمة) المنحنيات

Curve fitting

طرق التقريب التي درست فيما سبق كانت تهدف أساساً لإيجاد قيمة الدالة عند نقطة معينة غير معطاة في البيانات. أما في هذا الفصل فالهدف هو إيجاد الدالة الأقرب التي يمكن بها تقريب البيانات المعطاة (أي إيجاد الدالة الأكثر ملاءمة لسلوك البيانات).

لكن يجب أن نختار المعيار الذي على أساسه يمكن التعبير عن هذه الملاءمة.



فيمكن مثلا تقريب السبع نقاط الموضحة بالشكل المقابل بخط مستقيم بدلاً من عديدة حدود من الدرجة السادسة. ومعادلة هذا الخط المستقيم هي مثال على ما نبحث عنه في هذا الفصل.

ويمكن أن نختار المعيار ليكون إيجاد الخط المستقيم الذي يجعل الكمية $max_i|d_i|$ أقل ما يمكن، ويعرف هذا المعيار بمعيار أصغر أكبر (mini max).

وهناك معيار بديل وهو جعل $\sum_{i=1}^{n} w_i {d^2}_i$ أقل ما يمكن، حيث أن: $w_{\mathrm{i}}(\mathrm{i} = 1,2, \dots, n)$ هي أعداد موجبة معلومة. والمعالجة بهذا المعيار تعرف بتقريب المربعات الصّغرى $(least\ square)$، وهذا ما سنتبعه في هذا الفصل.

ولا يقتصر تقريب المربعات الصّغرى على الخطوط المستقيمة. لـذلك نفرض أن: $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ حيث المعاملات $a_0\ , a_1$ يتم اختيارها لجعل المجموع لمربعات الأخطاء الموزونة لكل البيانات أقل ما يمكن. فإذا رمزنا لهذا المجموع لمربعات الأخطاء بالرمز $E(a_0\ , a_1)$ فإن:

$$d_i = y_i - p(x_i)$$

هدفنا هو جعل مجموع مربعات الأخطاء أصغر ما يمكن: $E = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = min$

$$E(a_0\ , a_1) = \sum_{i=1}^{n} w_i [y_i - (a_0 + a_1 x)]^2 = min$$

ومن حساب التفاضل، فإن الشرط الضروري كي يكون لهذا المجموع نهاية صُغرى هو:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$$

هذه الشروط تؤدي إلى المعادلتين:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2 \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} w_i \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i)\right] = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2 \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} w_i \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i)\right] x_i = 0$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} w_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} w_i {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i$$

ولما كانت الأعداد $w_i\ ,x_i\ ,y_i$ معلومة فإن هذه المعادلات تمثل مجموعة من معادلتين خطيتين آنيتين في المجهولين $a_0\ ,\ a_1$.

مثال:

احسب تقريب المربعات الصّغرى الخطي للبيانات التالية:

x_i	−5	−3	1	3	4	6	8
y_i	18	7	0	7	16	50	67
w_i	1	1	1	1	20	1	1

في هذا المثال افترضنا أن النقطة $(4,16)$ يعوَّل عليها أهمية أكثر من النقاط الأخرى. لذلك استخدمنا الوزن 20 لإعطاء أهمية معنوية لهذه النقطة. وباستخدام الجدول التالي لتسهيل الحسابات:

x_i	y_i	w_i	$w_i x_i$	$w_i y_i$	$w_i {x_i}^2$	$w_i x_i y_i$
−5	18	1	−5	18	25	−90
−3	7	1	−3	7	9	−21
1	0	1	1	0	1	0
3	7	1	3	7	9	21
4	16	20	80	320	320	1280
6	50	1	6	50	36	300
8	67	1	8	67	64	536

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} w_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} w_i {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i$$

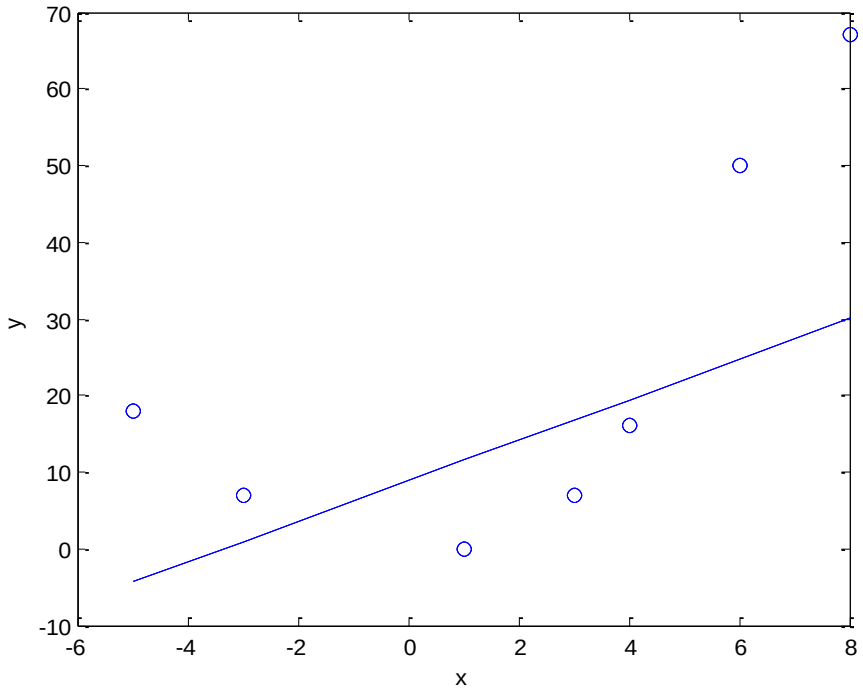
$$26\ a_0 + 90\ a_1 = 469$$
$$90\ a_0 + 464\ a_1 = 2026$$

وبحل المعادلتين نتحصل على:

$$a_0 = 8.8991\ ,\ \ a_1 = 2.6403$$

وبالتالي تكون عديدة حدود التقريب:

$$P_1(x) = 8.8991\ + 2.6403\ x$$



التقريب بعديدة حدود:

سندرس الآن تقريب المربعات الصُّغرى (الدُّنيا) لمجموعة n من نقاط بيانات $(x_i\ , y_i),\ i = 1,2, \dots \dots , n$ بعديدة حدود من الدرجة $m \leq n$ فإذا فرضنا أن $P_m(x)$ على النحو التالي:

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ \dots \dots + a_m x^m$$

فإن خطأ المربعات الصُّغرى (الدُّنيا) ذات الوزن هو:

$$E(a_0, a_1, \dots \dots , a_m) = \sum_{i=1}^{n} w_i [y_i - (a_0 + a_1 x + \ \dots \dots + a_m x_i^m)]^2$$

والشروط الضرورية لحدوث نهاية صُغرى عند $(a_0, a_1, \dots\dots, a_m)$ هي:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \frac{\partial E}{\partial a_1} = \frac{\partial E}{\partial a_2} = 0$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة إلى $a_0, a_1, \dots\dots, a_m$ على التوالي ثم إعادة ترتيبها نحصل على:

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} w_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + \dots\dots + a_m \sum_{i=1}^{n} w_i \, x_i^m = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} w_i {x_i}^2 + \dots\dots + a_m \sum_{i=1}^{n} w_i \, x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^{n} w_i {x_i}^{m+1} + \dots\dots + a_m \sum_{i=1}^{n} w_i \, x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^m y_i$$

وهي مجموعة من $(m+1)$ من المعادلات القياسية الخطية الآنية في المجاهيل $a_0, a_1, \dots, a_m$، وإذا كانت $m < n$ فإن مصفوفة المعاملات لهذه المجموعة من المعادلات تكون متماثلة.

مثـال:

أوجد المعادلات القياسية لتقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للبيانات المعطاة في المثال السابق.

الحـل:

$$a_0 \sum_{i=1}^{7} w_i + a_1 \sum_{i=1}^{7} w_i x_i + a_2 \sum_{i=1}^{7} w_i \, {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{7} w_i y_i$$

$$a_0\sum_{i=1}^{7} w_i x_i + a_1\sum_{i=1}^{7} w_i {x_i}^2 + a_2\sum_{i=1}^{7} w_i\, x_i^3 = \sum_{i=1}^{7} w_i x_i y_i$$

$$a_0\sum_{i=1}^{7} w_i x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{7} w_i {x_i}^3 + a_2\sum_{i=1}^{7} w_i\, x_i^4 = \sum_{i=1}^{7} w_i x_i^2 y_i$$

ويؤدي حساب هذه المجاميع إلى مجموعة المعادلات التالية:

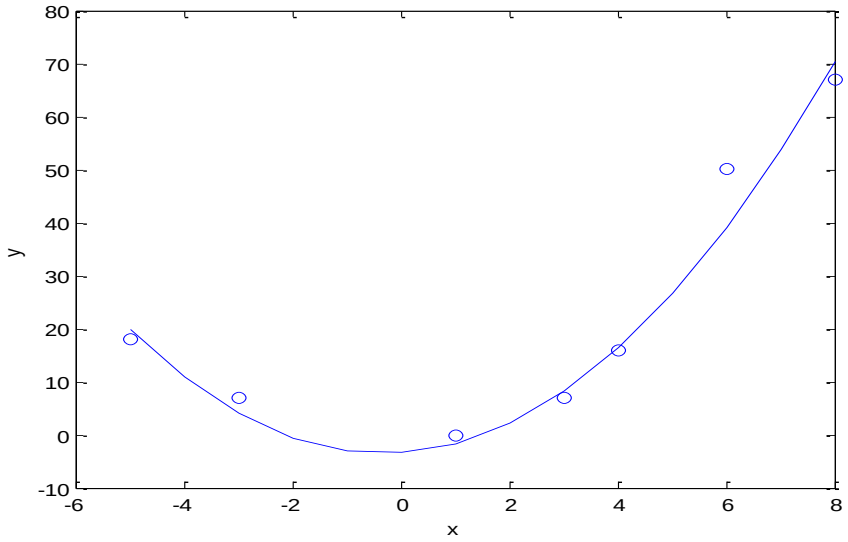
$$\begin{bmatrix} 26 & 90 & 464 \\ 90 & 464 & 1884 \\ 464 & 1884 & 11300 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 469 \\ 2026 \\ 11784 \end{bmatrix}$$

وبحل هذه المنظومة بإحدى الطرق التي تمت دراستها سابقاً نحصل على:

$$a_0 = -3.4079\ ,\ a_1 = 0.6964\ ,\ a_2 = 1.0667$$

إذاً نحصل على عديدة الحدود التالية:

$$P_2(x) = -3.4079 + 0.6964\,x + 1.0667\,x^2$$



التقريب بالدوال الأسية على الصورة $y = ae^{bx}$ (الأس متغير):

بالرغم من أن عديدة الحدود كثيراً ما تستخدم كدوال تقريب، إلا أنها ليست بأي حال من الأحوال الوسيلة الوحيدة للتقريب، لذا سندرس التقريب بأنواع أخرى من الدوال في الصورة:

$$y = ae^{bx}$$

حيث يتغير خطأ المربعات الصُّغرى في هذه الحالة من العلاقة:

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - ae^{bx_i})^2$$

وتصبح المعادلات القياسية المصاحبة لها على النحو التالي:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} w_i(y_i - ae^{bx_i})\, e^{bx_i} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} w_i(y_i - ae^{bx_i})\, ax_i e^{bx_i} = 0$$

وهي تمثل معادلتين في مجهولين (a, b) لكن المجموعة لا خطية, ويمكن تلافي صعوبة حل هذه المنظومة وذلك بتحويل المسألة الأصلية إلى مسألة خطية وذلك بأخذ اللوغاريثم لطرفي المعادلة:

$$y = ae^{bx}$$

لنحصل على:

$$ln\, y = ln\, a + bx$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة:

$$Y = A + BX$$

حيث:

$$B = b\,,\quad A = ln\, a\,,\quad X = x\,,\quad Y = ln\, y$$

ويمكن اختيار A و B لتجعل المجموع التالي نهاية صُغرى.

$$\sum_{i=1}^{n} w_i[Y_i - (A + BX_i)]^2$$

ومن ثم يمكن حل المعادلات بسهولة لإيجاد A و B ومن ثمّ قيم a و b من العلاقات:

$$a = e^b \quad , \quad b = B$$

مثـال:

باستخدام تقريب المربعات الصُّغرى (الدُّنيا) قرب البيانات التالية على الصورة $y = ae^{bx}$

x_i	0	0.25	0.4	0.5
y_i	9.532	7.983	4.826	5.503

w_i	1	1	1	1

الحـل:

نقوم بتحويل البيانات باستخدام العلاقات $Y = ln\, y\ ,\ X = x$ لتحويل المسألة إلى مسألة خطيـة.

وبالتالي فإن البيانات المناظرة تصبح على النحو التالي:

x_i	0	0.25	0.4	0.5
y_i	2.255	2.077	1.574	1.705
w_i	1	1	1	1

وتأخذ المعادلات القياسية الصورة:

$$A\sum_{i=1}^{n} w_i + B\sum_{i=1}^{n} w_i X_i = \sum_{i=1}^{n} w_i Y_i$$

$$A\sum_{i=1}^{n} w_i X_i + B\sum_{i=1}^{n} w_i {X_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i Y_i$$

$$4.000\, A + 1.150\, B = 7.611$$

$$1.150\, A + 0.473\, B = 2.002$$

وبحلها نحصل على:

$$A = 2.281 \quad , \quad B = -1.315$$

عندئذٍ تصبح:

$$b = B = -1.315 \quad , \quad a = e^A = 9.786$$

وبالتالي تكون الصورة التقريبية للبيانات $y = ae^{bx}$ كالتالي:

$$y = 9.786\, e^{-1.315\, x}$$

دوال القوى: حيث الأساس متغير وتأخذ الصورة العامة $y = ax^b$.

مثـال:

أوجد الدالة على الصورة $y = cx^{\alpha}$ والتي تعطي أفضل انطباق للنقاط التاليـة:

x	2	4	5	6	8
y	0.75	0.1875	0.12	0.0833	0.0469

الحل:

نجعل الدالة على الصورة الخطية بأخذ اللوغاريثم (log) للطرفين:

$$log\, y = log\, c + \alpha\, log\, x$$

$$Y = a_0 + aX$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} w_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} w_i X_i = \sum_{i=1}^{n} w_i Y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} w_i X_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} w_i {X_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i Y_i$$

ولكن w_i غير معطية بالمسألة، ممّا يعني أن النقاط كلها بنفس الأهمية، لذلك $w_i = 1 \ , \ i = 1,2, \dots . , n$.

$$a_0(n) + a_1 \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$$

$X = \log x$	$Y = \log y$	X^2	XY
0.30103	−0.12494	0.09062	−0.03761
0.60206	−0.72700	0.36248	−0.43770
0.69897	−0.92082	0.48856	−0.64363
0.77815	−1.07935	0.60552	−0.83990
0.90309	−1.32883	0.81557	−1.20005
$\sum = 3.2833$	$\sum = -4.18094$	$\sum = 2.36275$	$\sum = -3.15889$

وبالتالي نحصل على:

$$5\ a_0 + 3.2833\ a_1 = -4.18094$$
$$3.2833\ a_0 + 2.36275\ a_1 = -3.15889$$

وبحل هذه المنظومة نحصل على:

$$a_0 = 0.477 \quad , \quad a_1 = -1.99979$$
$$\rightarrow \alpha = a_1 = -1.99979$$
$$C = 10^{a_0} = 10^{0.447} = 2.999$$

إذاً فالدالة المطلوبة تكون على الصورة:

$$\boldsymbol{y \cong 3\ x^{-2}}$$

الفصل الثامن

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية

(مسائل القيم الابتدائيـة)

كثير من النماذج الرياضية لمسائل فيزيائية تُعطي عند صياغتها معادلة تفاضلية عادية (لأننا في العادة نجري القياسات بحساب معدلات التغير وهي تفاضل الدالة المُقاسة).ويمكن صياغة المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى في الصورة:

$$y' = f(x, y)$$

حيث f دالة معلومة في متغيرين حقيقيين . y دالة في المتغير المستقل x وهي غير معلومة. ويحوي الحل العام على ثابت اختياري، لذا لتعيين حل وحيد يكون من الضروري فرض شرط ابتدائي إضافي على y, وهذا الشرط يأخذ الصورة

$$y(x_0) = y_0$$

إذاً سنأخذ في الاعتبار مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الأولى:

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

والمطلوب هو إيجاد قيمة (y) عند $(x = x_0 + \Delta x)$ أو $(x = x_0 + h)$.

هناك طرق عددية كثيرة لإيجاد الحل منها:

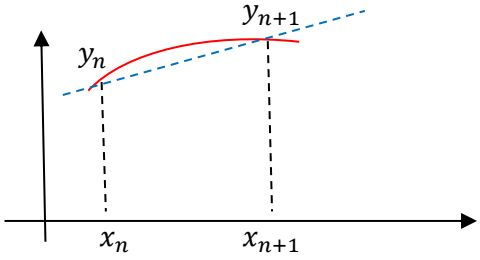
- طريقة أويلر.
- طريقة رانجي–كوتا.

1–طريقة أويلـر Euler's formula :

إن أبسط طريقة لتقريب المعادلة:

$$y'(x_n) = f\big(x_n\,,\ y(x_n)\big)$$

يكمن الحل في استبدال المشتقة الأولى $y'(x_n)$ بتقريب فرقها الأمامي:



$$\frac{y_{n+1}-y_n}{h}$$

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{h}=f(x_n\ ,\ y_n)$$

والتي يمكن إعادة ترتيبها كالتالي:

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n\ ,\ y_n)$$

وبالتالي يمكن بهذه الطريقة حساب y_{n+1} من قيمة معلومة y_n ومن ثمّ يمكن استخدام هذه الصيغة بصورة تكرارية كما في المثال التالي:

مثـــــال:

أوجد تقديراً لقيمة $y(0.2)$ حيث y تحقق المعادلة التفاضلية:

$$y'=\frac{-y^2}{1+x}\ ,\quad y(0)=1$$

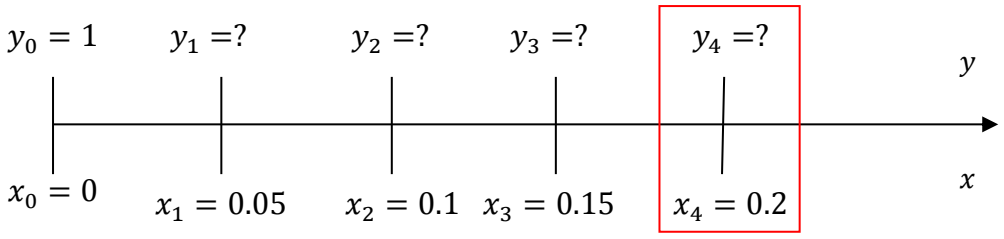
مستخدماً طول خطوة $h=0.05$.

الحـل:

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n\ ,\ y_n)$$

$$y_{n+1}=y_n-\frac{0.05\ y_n^2}{1+x_n}$$

وعندئذٍ يكون:



عدد المراحل $=\frac{x_e-x_s}{h}$

$$y_1=y_0-\frac{0.05\ y_0^2}{1+x_0}=1-\frac{0.05\ (1)^2}{1+0}=0.95$$

$$y_2 = y_1 - \frac{0.05\, y_1^2}{1 + x_1} = 0.95 - \frac{0.05\,(0.95)^2}{1 + 0.05} = 0.90702$$

$$y_3 = y_2 - \frac{0.05\, y_2^2}{1 + x_2} = 0.90702 - \frac{0.05\,(0.90702)^2}{1 + 0.1} = 0.86963$$

$$y_4 = y_3 - \frac{0.05\, y_3^2}{1 + x_3} = 0.86963 - \frac{0.05\,(0.86963)^2}{1 + 0.15} = 0.83675$$

وبمقارنة الحل العددي بالحل التحليلي الذي هو:

$$y = \frac{1}{1 + ln(1 + x)}$$

نجد أن الخطأ المطلق في تقدير القيمة $y(0.2)$ يكون:

$$|0.84579 - 0.83675| = 0.00904$$

أو:

$$\frac{0.84579 - 0.83675}{0.84579} \times 100\% = 1.06\%$$

مثـــال:

أوجد $y(1.55)$ لمسألة القيم الابتدائية الآتيـة:

$$y' = 1 - xy \quad , \quad y(1.5) = 0$$

عندما $h = 0.05$ ، $h = 0.025$.

الحـــل:

عندما $h = 0.05$:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n\,,\, y_n)$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0\,,\, y_0)$$

$$y_1 = 0 + 0.05[1 - (1.5)(0)] = 0.05$$

عندما $h = 0.025$:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n\,,\, y_n)$$

$$y_1 = 0 + 0.025[1 - 0] = 0.025$$

$$y_1 = 0.025 + 0.025[1 - (1.525)(0.025)] = 0.049047$$

مثـــال:

استخدم طريقة أويلر لتقدير حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = (1-x)y^2 - y \quad , \quad y(0) = 1$$

عندما $x = 1$, وذلك بأخذ:

أ) $h = 0.1$
ب) $h = 0.25$

حقق الحل وقارن دقته (احسب قيمة $\varepsilon_r\%$) بالتعويض المباشر في المعادلة التفاضلية علماً بأن الحل التحليلي:

$$y(x) = \frac{1}{e^x - x}$$

الحل:

$h =$ ....

n	x_n	y_n	y_{n+1}
0	x_0	y_0	$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$
1	$x_1 = x_0 + h$	y_1	$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$
2	$x_2 = x_1 + h$	y_2	$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$
⋮	⋮	⋮	⋮

ونستمر حتى نصل إلى قيمة y_n المطلوبة.

2-طريقة رانج-كوتا *Range- Kutta Method*:

هذه الطريقة تعتمد على طريقة سيمسون للتكامل العددي، فبأخذ مسألة القيمة الابتدائية التالية في الاعتبار:

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

والمطلوب إيجاد $y(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y = y_1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x,y)\,dx$$

وباستخدام قاعدة سيمسون (فترتين) خلال المسافة الجزئية (Δx) : $w = \frac{\Delta x}{2}$ لكل فترة.

$$y_1 = y_0 + \frac{\Delta x}{6}\left[f(x_0\,,y_0) + 4f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right) + f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\right]$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة على الصورة:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

حيث:

$$k_1 = \Delta x\, f(x_0\,, y_0)$$
$$k_2 = \Delta x\, f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\,, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = \Delta x\, f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\,, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = \Delta x\, f(x_0 + \Delta x\,, y_0 + k_3)$$

كذلك يمكن صياغة طريقة رانج–كوتا بصورة عامة كالتالي:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

حيث:

$$k_1 = f(x_n\,, y_n)$$
$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h\ ,\ y_n + \frac{1}{2}h\,k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h\ ,\ y_n + \frac{1}{2}h\,k_2\right)$$
$$k_4 = f(x_n + h\ ,\ y_n + hk_3)$$

وهي تسمى بطريقة المراحل الأربعة.

مثـال:

باستخدام طريقة رانج–كوتا أوجد $y(0.2)$ حيث y تحقق المعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{-y^2}{1+x}\ \ ,\ \ y(0) = 1$$

وبطول خطوة $h = 0.05$.

الحل:

عند $n = 0$:

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = \frac{-(1)^2}{1+0} = -1$$

$$k_2 = f(x_0 + 0.025\ ,\ y_0 + 0.025\, k_1) = f(0.025, 0.975) = \frac{-(0.975)^2}{1+0.025}$$
$$= -0.92744$$

$$k_3 = f(x_0 + 0.025\ ,\ y_0 + 0.025\, k_2) = f(0.025, 0.97681) = \frac{-(0.97681)^2}{1+0.025}$$
$$= -0.93089$$

$$k_4 = f(x_0 + 0.05\ ,\ y_0 + 0.05\, k_3) = f(0.05, 0.95346) = \frac{-(0.95346)^2}{1+0.05}$$
$$= -0.86580$$

$$y_1 = y_0 + \frac{0.05}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 0.95348$$

ويبيّن الجدول التالي حسابات القيم الثلاث التالية:

n	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{n+1}
1	−0.86583	−0.80773	−0.81026	−0.75774	0.91298
2	−0.75776	−0.71049	−0.71237	−0.66936	0.87737
3	−0.66937	−0.63038	−0.63181	−0.59612	0.84579

وكما نعلم أن الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{-y^2}{1+x}\ ,\ y(0) = 1$$

هو:

$$y = \frac{1}{1 + ln\,(1+x)}$$

إذاً فالقيمة الحقيقية لـ $y(0.2)$ هي : 0.84579

وبالتالي نلاحظ أن طريقة رانج–كوتا رباعية المراحل تعطى في هذه المسألة الحل بدقة خمس أرقام عشرية عند استخدام $h = 0.05$.

التقويـم:

استخدم طريقة رانج–كوتا ذات المراحل الأربعة, لتقدير حل مسألة القيم الابتدائية:

$$y' = (1 - x)y^2 - y\,, \quad y(0) = 1$$

عند $x = 1$ مستخدماً:

أ) $h = 0.25$
ب) $h = 0.5$

وإذا عُلِم أن الحل التحليلي هو $y(x) = (e^x - x)^{-1}$ ، أكتب الأخطاء لهذين التقديرين.