خريف
2024

الباب الأول (المصفوفات)

أ. عُمر علي بن ساسي

جامعة مصراتة - كلية الهندسة
القسم العام – رياضة GS203 3

المصفوفة Matrix: عبارة عن مجموعة من الاعداد الحقيقية أو المعقدة أو منهما معاً مرتبة على شكل صفوف واعمدة بشكل مستطيل .

المصفوفة التي تملك m من الصفوف و n من الاعمدة تدعى مصفوفة من الدرجة $m \times n$ وتكتب بالشكل

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فمثلاً المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ \sqrt{3} & 2+i & 4 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة من الدرجة 2×3 .

اذا كانت $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ \ln 4 & 2 & e^3 \end{bmatrix}$ فان

$$a_{11} = 1\,, a_{12} = -3\,, a_{13} = \sqrt{2}\,, a_{21} = \ln 4\,, a_{22} = 2\,, a_{23} = e^3$$

أنواع المصفوفات:

1. **مصفوفة الصف:** هي التي تتكون من صف واحد بغض النظر عن عدد الأعمدة وتكون من الدرجة $1 \times n$ $\quad (2 \quad 2+i \quad 1)$
2. **مصفوفة العمود:** هي التي تتكون من عمود واحد بغض النظر عن عدد الصفوف وتكون من الدرجة $m \times 1$. $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
3. **المصفوفة الثابتة:** هي التي جميع عناصرها أعداد ثابتة **أي أن** $a_{ij} = c$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **المصفوفة الصفرية:** هي التي جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز $\underline{o}$ (المحايد الجمعي).

مثل: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. **المصفوفة المربعة:** هي التي يكون فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة وتكون درجتها $m \times m$ أو $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

6. **المصفوفة القطرية:** هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{مثل} \quad a_{ij} = \begin{cases} 0 & , \ i \neq j \\ O.W & , \ i = j \end{cases}$$

7. **المصفوفة الوحدة:** هي مصفوفة قطرية عناصر القطر الرئيسي يساوي 1 (المحايد الضربي).

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 0 & , \ i \neq j \\ 1 & , \ i = j \end{cases}$$

8. **المصفوفة المثلثية العليا:** هي مصفوفة مربعة العناصر التي تحت القطر الرئيسي أصفار.

ويرمز لها بالرمز U **أي أن** $a_{ij} = \begin{cases} 0 & , \ i > j \\ O.W & , \ i \leq j \end{cases}$ مثل: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

9. **المصفوفة المثلثية السفلى:** هي مصفوفة مربعة العناصر التي فوق القطر الرئيسي أصفار.

ويرمز لها بالرمز L **أي أن** $a_{ij} = \begin{cases} 0 & , \ i < j \\ O.W & , \ i \geq j \end{cases}$ مثل: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

10. **المصفوفة المتماثلة:** هي مصفوفة مربعة العناصر التي فوق وتحت القطر الرئيسي متساوية في المقدار والاشارة. $A = A^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & -4 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

11. **المصفوفة ملتوية التماثل:** هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيسي أصفار. والعناصر التي فوق وتحت القطر الرئيسي متساوية في المقدار ومختلفة في الاشارة. $A = -A^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & 4 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: يمكن كتابة أي مصفوفة مربعة على هيئة حاصل جمع مصفوفتين الأولى متماثلة والأخرى ملتوية التماثل. **مثلا:**

$$A = S + K$$

$$S = \frac{1}{2}(A + A^T), \qquad K = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

مثال: أكتب المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ على صورة مجموع مصفوفتين الأولى متماثلة والأخرى غير متماثلة.

محورة المصفوفة

- اذا كانت لدينا المصفوفة A من الدرجة $m \times n$ فان محورة A تكون من الدرجة $n \times m$ ويرمز لها بالرمز A^T. ويمكن الحصول عليها بإبدال الصفوف بالأعمدة فمثلا اذا كانت لدينا المصفوفة

$$A = [k \quad 1 \quad 1], \qquad A^T = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

خواص محورة المصفوفة:

إذا كان لدينا ثلاث مصفوفات A, B, C وكان k مقدارًا ثابتًا فإن

1. $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^T = A$
2. $(A + B)^T = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$
3. $(AB)^T = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$
4. $(ABC)^T = \mathrm{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$
5. $(kA)^T = k\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$
6. $(\mathrm{A}^{\mathrm{n}})^T = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^n$

أثر المصفوفة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإنه يمكن تعريف أثر المصفوفة $tr(A)$ على أنه مجموع عناصر القطر الرئيسي. **أي أن** $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

فمثلاً إذا كان لدينا $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 93 & 94 \\ 95 & 17 \end{bmatrix}$ فإن $tr(A) = 93 + 17 = 110$

خواص أثر المصفوفات:

إذا كان لدينا ثلاث مصفوفتين A, B وكان k مقدارًا ثابتًا فإن

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
2. $tr(AB) = tr(BA) \neq tr(A) \times tr(B)$
3. $tr(kA) = ktr(A)$

4. $tr(A) = tr(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$

العمليات على المصفوفات:

ضرب عدد ثابت في مصفوفة

اذا ضُربت مصفوفة بثابت معين c فان جميع عناصرها تُضرب بهذا الثابت فمثلاً

$$2\begin{bmatrix}3 & -2\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\times 3 & 2\times(-2)\\2\times 0 & 2\times 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & -4\\0 & 2\end{bmatrix}$$

جمع وطرح المصفوفات:

لجمع أو طرح مصفوفتين أو أكثر فإننا نجمع أو نطرح العناصر المتناظرة وفي هذه الحالة يجب ان تكون المصفوفات من الدرجة ذاتها فمثلاً

$$\begin{bmatrix}2 & -2\\0 & 1\\4 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-5 & 1\\-3 & 4\\-6 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+(-5) & -2+1\\0+(-3) & 1+4\\4+(-6) & 3+(-2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & -1\\-3 & 5\\-2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-(-2)\\2-1\\3-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$$

خواص عملية الجمع والطرح:

إذا كان لدينا ثلاث مصفوفات A, B, C وكان k مقدارًا ثابتًا فإن

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$
4. $A + (-A) = \underline{0}$
5. $k(A + B) = kA + kB$

ضرب المصفوفات:

يمكن ضرب مصفوفتين اذا كان عدد الاعمدة في الاولى يساوي عدد الصفوف في الثانية فاذا كانت المصفوفة A من الدرجة $m \times n$ والمصفوفة B من الدرجة $n \times r$ فان المصفوفة $C = A.B$ تكون من الدرجة $m \times r$ ويمكن التعبير عن حاصل ضرب المصفوفتين A و B كما يلي :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

تمرين: أوجد $A.B$ و $B.A$ إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & -\sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & -\sqrt{2} & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 3 + 0\times(-2) + 1\times 4 & 2\times(-1) + 0\times\sqrt{2} + 1\times(-3) \\ -4\times 3 + (-\sqrt{2})\times(-2) + 5\times 4 & -4\times(-1) + (-\sqrt{2})\times\sqrt{2} + 5\times(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 8+2\sqrt{2} & -13 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & -\sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times 2 + (-1)\times(-4) & 3\times 0 + (-1)\times(-\sqrt{2}) & 3\times 1 + (-1)\times 5 \\ (-2)\times 2 + \sqrt{2}\times(-4) & (-2)\times 0 + \sqrt{2}\times(-\sqrt{2}) & (-2)\times 1 + \sqrt{2}\times 5 \\ 4\times 2 + (-3)\times(-4) & 4\times 0 + (-3)\times(-\sqrt{2}) & 4\times 1 + (-3)\times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & \sqrt{2} & -2 \\ -4-4\sqrt{2} & -2 & -2+5\sqrt{2} \\ 20 & 3\sqrt{2} & -11 \end{bmatrix}$$

خواص عملية الضرب:

إذا كان لدينا ثلاث مصفوفات A, B, C وكان k مقدارًا ثابتًا فإن

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B \pm C) = AB \pm AC$
3. $(B \pm C)A = BA \pm CA$
4. $A.\underline{0} = \underline{0}.A = 0$
5. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
6. $AI = IA = I$

الفرق بين جبر المصفوفات وجبر الأعداد:

1. إذا كانت لدينا A, B مصفوفتان وكان حاصل ضربهما $= \underline{0}$ فليس من الضروري أن تكون Aأو$B = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ فان } A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+4-6 & 18-6-12 \\ 6+12-18 & 54-18-36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. إذا كانت لدينا A, B مصفوفتان فإن $AB \neq BA$ ولكن ليس دائماً.

$$(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2A.B$$
$$(A-B)^2 \neq A^2 + B^2 - 2A.B$$
$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

المصفوفات المتساوية:

نقول أن المصفوفات متساوية إذا تحقق شرطين:

1. المصفوفتان من نفس السعة.
2. العناصر المتناظرة لابد أن تكون متساوية.

فعلى سبيل المثال، المصفوفتان $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ غير متساويتين لأنهما مختلفتا الدرجة ، أما المصفوفة $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ فإنها تساوي المصفوفة A إذا وفقط إذا كان $a = 5 \ , b = -1 \ , c = 7, d = 0$

مثال:

إذا كان $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ c & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ فعين قيمة كل من a, b, c

الحل: بما أن $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ c & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4 & 11 \\ 1+c & b-1 \end{pmatrix}$

فإن $a + 4 = 1 \ , 1 + c = 5 \ , \ b - 1 = -4$

وبالتالي $a = -3 \, , c = 4 \, , b = -3$

العمليات الصفية الأولية:

سنجري ثلاثة عمليات على المصفوفة تسمز العمليات الصفية الأولية وهي:

1. تغيير ترتيب أي صفين من المصفوفة.
2. ضرب أي صف من صفوف المصفوفة بعدد غير صفري.
3. ضرب أي صف من صفوف المصفوفة بعدد وإضافته إلى صف آخر.

تمارين على الفصل الأول

1. إذا كانت مصفوفة A من نوع $(m+2)(10-n)$، B من نوع $(n+3)(m+1)$ وكانت AB, BA أوجد قيمة m, n.

2. إذا كانت $z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ وكانت $x = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$m = x^T[y^T z - 2]$ أوجد m.

3. إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 8 & a^2 & 3c \\ 9 & 3 & b-4 \\ 2b & 4 & d \end{pmatrix}$ متماثلة. أوجد قيمة الثوابت a, b, c, d

4. إذا كانت $A = \begin{pmatrix} a-b & 3 & b+c \\ -a & 0 & c-d \\ -8 & -2 & d-b \end{pmatrix}$ ملتوية التماثل. أوجد قيمة الثوابت a, b, c, d

5. إذا كانت $\begin{pmatrix} x^2+1 & 2 & 8 \\ z+1 & -3 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 2 & 8 \\ z+1 & -3 & -12 \end{pmatrix}$ أوجد قيم x, z

أسئلة الامتحانات السابقة

6. إذا كانت $A = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & \sin 2x \\ \sin 2x & 0 \end{bmatrix}$ فأوجد $A^2 - B$.

7. إذا كانت $P(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فأوجد $P(A)$.

8. أوجد قيمة k التي تجعل $[k \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

9. كون مصفوفة من الثانية والتي عناصرها تأخذ الصورة العامة

a. $a_{ij} = \begin{cases} 3i + j^2 & , i = j \\ 3(i-j)^2 & , i \neq j \end{cases}$ b. $b_{ij} = (-1)^{i+j}$

10. أوجد قيمة C التي تجعل المصفوفة التالية مثماتلة.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & c & 1 \\ 2c & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1+c & 6 \\ 2 & c & -4 \\ c & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

11. لتكن لدينا مصفوفات $C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

فأثبت $tr((CB^T)^T A) = 99$