خريف
2024

الباب الثاني (المحددات)

أ. عُمر علي بن ساسي

جامعة مصراتة - كلية الهندسة
القسم العام – رياضة GS203 3

المحددات:

اذا كانت A مصفوفة مربعة فانها تمتلك محددة ونرمز لها بالرمز $det(A)$ أو $|A|$ وتحسب كما يلي

* اذا كانت A من الدرجة 2×2 فان $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ $det(A)=a_{11}\times a_{22}-a_{21}\times a_{12}$

** اذا كانت A من الدرجة 3×3 فان $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$

$$det(A)=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}\times a_{33}-a_{32}\times a_{23})-a_{12}(a_{21}\times a_{33}-a_{31}\times a_{23})+a_{13}(a_{21}\times a_{32}-a_{31}\times a_{22})$$

ويمكن حسابها بطريقة أُخرى وكما يلي :

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{33}a_{21}a_{12})$$

ملاحظة: $det(A)=det(A^T)$

مثال1:

لتكن المصفوفة المربعة من الدرجة الثانية المعرفة بالشكل التالي:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

$$det(A)=|A|=1\times 5-(-1)2=5+2=7$$

مثال 2: لتكن المصفوفة المربعة من الدرجة الثالثة المعرفة بالشكل التالي:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 6\\ -4 & 7 & -2\end{pmatrix}$$

نقوم بتثبيت أحد الاسطر أو أحد الاعمدة (أي الاختيار كيفي و النتيجة واحدة) و ليكن السطر الاول:

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix}0 & 6\\ 7 & -2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3 & 6\\ -4 & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 0\\ -4 & 7\end{vmatrix}$$
$$=(0(-2)-6\times 7)-2\big(3(-2)-6(-4)\big)+\big(3\times 7-0(-4)\big)$$
$$=-42-2\times 18+21=-57$$

ملاحظة هامة جدا: اختيار السطر أو العمود هو كيفي و لهذا يجب أن نختار السطر أو العمود الذي يسهل علينا العمليات الحسابية كاختيار السطر أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الاسفار.

نحسب نفس المحدد بالطريقة الأخرى (الأبسط)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & -2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

و بالتالي نجد و بسهولة أن:

$$det(A) = |A| = 0 + (-48) + 21 - 0 - 42 - (-12) = -57$$

ملاحظة هامة: هذه الطريقة خاصة بالمحدد من الدراجة الثالثة فقط.

طريقة أخرى لحساب قيمة المحدد (طريقة الاختزال)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1=R_2} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3+R_1} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3=3R_2-R_3} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -9$$

نتائج:

1. محدد المصفوفة المثلثية العلوية والسفلية والقطرية يساوي حاصل ضرب القطر الرئيسي.

مثال: لتكن لدينا المصفوفة التالية:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (3 \times 5 \times -2) = -30$$

2. محدد مصفوفة الوحدة يساوي 1.
3. إذا تبادل صفان أو عمودان في المحدد فإن إشارته تتغير.
4. ينعدم المحدد في الحالات التالية:

- إذا وجد صف أو عمود كل عناصره أصفار.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (0 \times 2) + (0 \times -1) = 0$$

- إذا وجد تساوي صفين أو عمودين.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

- إذا وجد تناسب بين صفيان أوعمودين $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ وكان الصفان الأول والثاني بينهما تناسب.

فيكون $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ مقدار ثابت.

يوجد تناسب بين الصفين الأول والثالث $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 10 \\ -6 & 2 & -14 \end{vmatrix}$ $\frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} = \frac{7}{-14} = -\frac{1}{2}$

- إذا وجد صف أو عمود يساوي مجموع صفين أو عمودين آخرين.

لان الصف الأول + الصف الثاني = الصف الثالث $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -10 & 2 & 3 \\ -7 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 0$

5. عند ضرب عدد قياسي في محدد فإنه يصرب في عمود واحد أو صف واحد.
6. $|AB| = |A||B|$ حتى وان كان الضرب غير تبادلي.
7. إذا احتوى أي صف أو عمود على مجموع جبري عدده N فإنه توجد N من المحددات.

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a_1 & b_1 \\ d+e+f & a_2 & b_2 \\ x+y & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & b_1 \\ d & a_2 & b_2 \\ x & a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a_1 & b_1 \\ e & a_2 & b_2 \\ y & a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a_1 & b_1 \\ f & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال3:

إذا كانت $\begin{vmatrix} a & b \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 11$ فأوجد قيمة $\begin{vmatrix} a+8 & b-5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$

الحل:

$$\begin{vmatrix} a+8 & b-5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+8 & b-5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 11 + (56 + 20) = 87$$

مثال4:

أثبت بدون فك المحدد أن $\begin{vmatrix} x^2 & xz & xy \\ xy & z^2 & y^2 \\ xz & xy & yz \end{vmatrix} = 0$

الحل: $xy\begin{vmatrix} x & xz & x \\ y & z^2 & y \\ z & xy & z \end{vmatrix} = xy \times 0 = 0$

مثال5:

أثبت بدون فك المحدد أن $\begin{vmatrix} a-b & a-c & c \\ a-b & c & a-c \\ -b & a-c & a+c \end{vmatrix} = a(2a-b)(2c-a)$

الحل:

$$c_1' = c_1 + c_2 + c_3 \rightarrow \begin{vmatrix} 2a-b & a-c & c \\ 2a-b & c & a-c \\ 2a-b & a-c & a+c \end{vmatrix}$$

$$(2a-b)\begin{vmatrix} 1 & a-c & c \\ 1 & c & a-c \\ 1 & a-c & a+c \end{vmatrix} R_2' = R_2 - R_1, \qquad R_3' = R_3 - R_1$$

$$(2a-b)\begin{vmatrix} 1 & a-c & c \\ 0 & 2c-a & a-2c \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a(2a-b)(2c-a)$$

مثال6:

إذا كان $x-1$ هو أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \\ -1 & 1 & x+k \end{vmatrix}$ أوجد قيمة k.

بمأن $x-1$ أحد عوامل المحدد فإن المحدد $= 0$ وعلى هذا فإن $x = 1$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1+k \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1+k \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - k - 2 + 2 = 0$$

$$= -3 - k + 2 = 0 \rightarrow k = -1$$

مثال7:

باستخدام خواص المحددات أثبت أن $\begin{vmatrix} x+y+2 & x & y \\ 1 & y+2x+1 & y \\ 1 & x & x+2y+1 \end{vmatrix} = 2(x+y+1)^3$

$$c_1' = c_1 + c_2 + c_3 \begin{vmatrix} 2x+2y+2 & x & y \\ 2x+2y+2 & y+2x+1 & y \\ 2x+2y+2 & x & x+2y+1 \end{vmatrix}$$

$$(2x+2y+2)\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & y+2x+1 & y\\ 1 & x & x+2y+1\end{vmatrix}\ R_2' = R_2 - R_1, \qquad R_3' = R_3 - R_1$$

$$2(x+y+1)\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 0 & y+x+1 & 0\\ 0 & 0 & x+y+1\end{vmatrix} = 2(x+y+1)(x+y+1)^2$$

$$\begin{vmatrix}x+y+2 & x & y\\ 1 & y+2x+1 & y\\ 1 & x & x+2y+1\end{vmatrix} = 2(x+y+1)^3$$

مثال8:

إذا كان $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = \frac{2}{3}k$ فأوجد قيمة $\begin{vmatrix}3a_1 & 3b_1 & 3c_1\\ a_1+2a_2 & b_1+2b_2 & c_1+2c_2\\ ka_3 & kb_3 & kc_3\end{vmatrix}$

$$3k\left(\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix}3a_1 & 3b_1 & 3c_1\\ a_1+2a_2 & b_1+2b_2 & c_1+2c_2\\ ka_3 & kb_3 & kc_3\end{vmatrix} = (3k)\times 2\left(\frac{2}{3}k\right) = \frac{12}{3}k^2 = 4k^2$$

تمارين على الفصل الثاني(المحددات)

1. باستخدام خواص المحددات وبدون فك المحدد أثبت أن :

a) $\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ c & c+a & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix} = 2a(b^2+c^2)$

أسئلة الجزئي الأول والثاني والنهائي

2. أثبت باستخدام الخواص بدون فك أن $\begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x & sin^2 x \\ 2\cos x & 1 & \sin x \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

3. أثبت أن $\begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{vmatrix} = -8$