خريف
2024

الباب الثالث (المعكوس الضربي)

أ. عُمر علي بن ساسي

جامعة مصراتة - كلية الهندسة
القسم العام – رياضة GS203 3

المعكوس الضربي للمصفوفة

العامل المرافق:

لتكن A مصفوفة مربعة فان لكل عنصر من عناصرها مرافق A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, det(M_{ij})$$

حيث $det(M_{ij})$ هي المحدة الناتجة من المصفوفة A وذلك بحذف الصف i والعمود j

فمثلاً في المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ ، العامل المرافق للعنصر 2 هو

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\, det(M_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-9) = 9$$

ال مصفوفة القرينة:

هي محورة مصفوفة المعاملات المرافقة ويرمز لها بالرمز $adj(A)$ أي أن $adj(A) = [cof(A)]^T$

مثال9:

إذا كان لدينا $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, أوجد $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ و $cof(A)$ $adj(A)$

الحل

$$A_{11} = (-1)^{1+1}(4) = 4 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}(1) = -1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}(3) = 3$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 30 \quad B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 24 \quad B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -48$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -10 \quad B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 27 \quad B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{vmatrix} = 0 \quad B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} = -15 \quad B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 0 & 6\end{vmatrix} = 30$$

$$C = \begin{bmatrix}30 & 24 & -48\\ 10 & 27 & -4\\ 0 & -15 & 30\end{bmatrix}$$

$$adj(B) = C^T = \begin{bmatrix}30 & 10 & 0\\ 24 & 27 & -15\\ -48 & -4 & 30\end{bmatrix}$$

<u>طريقة حساب معكوس المصفوفة الضربي:</u>

لتكن A مصفوفة مربعة يحيث ان $det(A) \neq 0$ فان معكوس A يُرمز له بالرمز A^{-1} يُحسب من القاعدة التالية :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

يمكن ايجاده كالآتي:

1. المعكوس الضربي لمحدد 2×2

$A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ فإن المعكوس الضربي لها $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

خطوات إيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة 2×2

أ. تبديل عناصر القطر الرئيسي.
ب. تغيير إشارات القطر الفرعي.
ج. القسمة على قيمة المحدد $\det(A)$.

مثال1:

إذا كانت $A = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ أوجد A^{-1}

$$\det(A) = \begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix} = (12 - 2) = 10 \neq 0$$

∴ يوجد لهذه المصفوفة معكوس ضربي ويمكن إيجاده كالتالي:

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

ملحوظة بسيطة: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

لاحظ في المثال السابق

$$A.A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}12-2 & -3+3\\ 8-8 & -2+10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

مثال2:

إذا كانت $B = \begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 1\end{bmatrix}$ أوجد B^{-1}

$$\det(B) = \begin{vmatrix}3 & -1\\ -5 & 1\end{vmatrix} = (3-5) = -2 \neq 0$$

∴ يوجد لهذه المصفوفة معكوس ضربي ويمكن إيجاده كالتالي:

$$B^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/-2 & 1/-2\\ 5/-2 & 3/-2\end{bmatrix}$$

2. المعكوس الضربي لمحدد 3×3

هناك طريقتين سنتطرق لها في هذا الفصل هي:

الطريقة الأولى: طريقة المصفوفة المرافقة.

إذا كان $A = \begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ h & l & m\end{bmatrix}$ فإن المعكوس الضربي لها $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A)$

خطوات إيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة 3×3

أ. نوجد محدد المصفوفة $\det(A)$.

ب. نوجد المحددات الجزئية، وذلك باستبدال كل عنصر في المصفوفة بالمحدد الأصغر المناظر مسبوق بإشارته $cof(A)$.

ج. نوجد محورة مصفوفة المحددات الجزئية $adj(A)$

مثال3:

إذا كانت $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -5 & -7\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}$ أوجد A^{-1}

$$\det(A) = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -5 & -7\\ 2 & 4 & 5\end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

نوجد $cof(A)$

$$cof(A)=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}-5 & -7\\ 4 & 5\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -7\\ 2 & 5\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -5\\ 2 & 4\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}2 & 3\\ -5 & -7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -7\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -5\end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -24 & 18\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 13 & -9\end{bmatrix}$$

نوجد $adj(A)$

$$adj(A)=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -24 & -1 & 13\\ 18 & 0 & -9\end{bmatrix}$$

الآن نوجد A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -24 & -1 & 13\\ 18 & 0 & -9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/9 & 2/9 & 1/9\\ -24/9 & -1/9 & 13/9\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

<u>الطريقة الثانية:</u> طريقة المصفوفة المختزلة(الموسعة).

في هذه الطريقة تُكوّن مصفوفة جديدة على صورة $[A|I]$ وتحويلها بإجراء العمليات الأولية على الصفوف فنتحصل على الصورة $[I|A^{-1}]$

مثال4:

إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -5 & -7\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}$ أوجد A^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -5 & -7 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[R'_3=R_3-2R_1]{R'_2=R_2-2R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -9 & -13 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R''_3=-R'_3]{R''_2=-1/9R'_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 13/9 & 2/9 & -1/9 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R'_1=R_1-2R''_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1/9 & -5/9 & 2/9 & 0\\ 0 & 1 & 13/9 & 2/9 & -1/9 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R'''_2=R''_2-\frac{13}{9}R''_3]{R''_1=R'_1+\frac{1}{9}R''_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{24}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{13}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{24}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{13}{9} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

خواص المعكوس الضربي للمصفوفة:

إذا كان لدينا المصفوفة A وكان $\det(A) \neq 0$ و k مقدارًا ثابتًا فإن

1. $(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$
3. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$
4. $(\mathrm{A}^{-1})^{T} = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$
5. $|\mathrm{A}^{-1}| = |A|^{-1}$

مثال5:

إذا كان $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $BA = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ أوجد B

$$BA.A^{-1} = BA.A^{-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

مثال6:

إذا كان $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد B

$$AB = ((AB)^{-1})^{-1} \rightarrow\rightarrow AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\det(AB) = 4 \neq 0$$

$$AB = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow\rightarrow AB = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}.AB = A^{-1}.\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/4 & 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow\rightarrow B = \begin{bmatrix} -5/2 & 1 \\ -4 & 3/2 \end{bmatrix}$$

مثال7:

إذا كانت $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ فأوجد المصفوفة X التي تحقق $AXB = I$

$$A^{-1}.AXB = A^{-1}.I$$

$$XB.B^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$$

$$X = A^{-1}.B^{-1} = (BA)^{-1}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Delta = -2 \neq 0$$

$$X^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow\rightarrow X^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

مثال6:

إذا كان $(AB)^T = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ أوجد B

$$AB = ((AB)^T)^T = \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}.AB = A^{-1}.\begin{bmatrix} -8 & 6 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 & 6 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow\rightarrow B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2I_2$$

تمارين على الفصل الثالث(المعكوس الضربي)

1. إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$

فأوجد حل المعادلة $AX-C=BX$.

2. إذا كانت $XA=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ وكان A مصفوفة من النوع 2×2 ،

حيث: $a_{ij}=\begin{cases}3i+j^2 & ,i=j\\ 3(i-j)^2 & ,i\neq j\end{cases}$ ، أوجد $2X$.

3. أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة الأتية.

$$A=\begin{bmatrix}c & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 3c & 3 & 0\end{bmatrix}$$