خريف
2024

الباب الرابع (منظومة المعادلات الخطية)

أ. عُمر علي بن ساسي

جامعة مصراتة - كلية الهندسة
القسم العام – رياضة GS203 3

منظومة المعادلات الخطية

ليكن لدينا نظام المعادلات التالي

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

يمكن تمثيله باستعمال المصفوفات كما يلي

حيث X مصفوفة المجاهيل، A مصفوفة المعاملات ، B مصفوفة الثوابت.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} , \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ ونكتب $A.X = B$ حيث

ولحل هذا النظام نضرب طرفي المعادلة بـ A^{-1}

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \quad \rightarrow \quad I.X = A^{-1}.B \quad \rightarrow \quad X = A^{-1}.B$$

1) طريقة المعكوس الضربي: 3×3

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

إذا كانت **منظومة المعادلات غير متجانسة** فإن احتمالات الحل هي:

1. يوجد حل وحيد إذا كان $\det(A) \neq 0$.

وهذا يعني هندسيًا أن المستويات الثلاثة متقاطعة في نقطة واحدة.

2. يوجد عدد لانهائي من الحلول إذا كان $\det(A) = 0$, $adj(A).B = 0$ ويتم ايجاد الحل العام بوضع $Z = k$ ثم نوجد x, y بدلالة k.

وهذا يعني هندسيًا أن المستويات الثلاثة متقاطعة في خط مستقيم(انطباق).

3. لا يوجد حل إذا كان $\det(A) = 0$, $adj(A).B \neq 0$

وهذا يعني هندسيًا أن المستويات الثلاثة كل اثنان منهما يتقاطع في خط مستقيم، وهذه الخطوط المستقيمة متوازية، أي أنه لا توجد نقطة تقع على المستويات الثلاثة معًا.

أما إذا كانت **منظومة المعادلات متجانسة** فإن احتمالات الحل هي:

1. يوجد حل وحيد (تافه) إذا كان $\det(A) \neq 0$ والحل هو $x = y = z = 0$.

وهذا الحل يعني هندسيًا أن المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة الأصل.

2. يوجد عدد لانهائي من الحلول إذا كان $\det(A) = 0$, ويتم ايجاد الحل العام بوضع $Z = k$ ثم نوجد x, y بدلالة k.

وهذا يعني هندسيًا أن المستويات الثلاثة كل اثنان منهما يتقاطع في خط مستقيم، مار بنقطة الأصل.

مثال1:

باستخدام المصفوفات أوجد حل هذه المنظومة.

$$x + y + 2z = 4$$
$$2x - 9 + 3z = -y$$
$$3x = 2 + y + z$$

ترتيب المعادلة أولاً:

$$x + y + 2z = 4$$
$$2x + y + 3z = 9$$
$$3x - y - z = 2$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 11 & -7 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 11/3 & -7/3 & 1/3 \\ -5/3 & 4/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x = A^{-1}.D}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 11/3 & -7/3 & 1/3 \\ -5/3 & 4/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -17/3 \\ 14/3 \end{bmatrix}$$

$$x = 1/3, y = -17/3, z = 14/3$$

مثال2:

أوجد باستخدام المصفوفات حل المعادلات الأتية:

$$x + y + z = 1$$

$$3x - y + z = -2$$

$$5x - 3y + z = -5$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$adj(A).D = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

∴ يوجد عدد للانهائي من الحلول ، نضع $Z = k$

$$x + y + k = 1$$
$$3x - y + k = -2$$

بجمع المعادلتين

$$4x + 2k = -1 \rightarrow\rightarrow x = \frac{-2k-1}{4}$$

نعوض بقيمة x في المعادلة الأولى لإيجاد قيمة y

$$\frac{-2k-1}{4} + y + k = 1 \rightarrow\rightarrow x = \frac{5-2k}{4}$$

2) طريقة المحددات (طريقة كرامر): 3×3

تستخدم هذه الطريقة لحل منظومة المعادلات التي يكون فيها عدد المعادلات = عدد المجاهيل

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

إذا كانت **منظومة المعادلات غير متجانسة** فإن احتمالات الحل هي:

1. يوجد حل وحيد إذا كان $\det(A) \neq 0$. وهو $x = \frac{\det(x)}{\det(A)}$ ، $y = \frac{\det(y)}{\det(A)}$ ، $z = \frac{\det(z)}{\det(A)}$

حيث $\det(x) = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ، $\det(y) = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ، $\det(z) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

وهذا يعني هندسيًا أن المستويات الثلاثة متقاطعة في نقطة واحدة.

2. يوجد عدد لانهائي من الحلول إذا كان $\det(A) = 0$, $\det(x) = \det(y) = \det(z) = 0$ ويتم ايجاد الحل العام بوضع $Z = k$ ثم نوجد x, y بدلالة k.

وهذا يعني هندسيًا أن المستويات الثلاثة متقاطعة في خط مستقيم(انطباق).

3. لا يوجد حل إذا كان $\det(A) = 0$, $\det(x)\ or\ \det(y)\ or\ \det(z) \neq 0$

وهذا يعني هندسيًا أن المستويات الثلاثة كل اثنان منهما يتقاطع في خط مستقيم، وهذه الخطوط المستقيمة متوازية، أي أنه لا توجد نقطة تقع على المستويات الثلاثة معًا.

أما إذا كانت **منظومة المعادلات متجانسة** فإن احتمالات الحل هي:

1. يوجد حل وحيد (تافه) إذا كان $\det(A) \neq 0$ والحل هو $x = y = z = 0$.

وهذا الحل يعني هندسيًا أن المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة الأصل.

2. يوجد عدد لانهائي من الحلول إذا كان $\det(A) = 0$, ويتم ايجاد الحل العام بوضع $Z = k$ ثم نوجد x, y بدلالة k.

وهذا يعني هندسيًا أن المستويات الثلاثة كل اثنان منهما يتقاطع في خط مستقيم، مار بنقطة الأصل.

مثال3:

باستخدام طريقة كرامر (المحددات) أوجد حل هذه المنظومة.

$$x + z = 2$$
$$2x + y = 4$$
$$y - z = 1$$
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$
$$\det(x) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det(y) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\det(z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$x = \frac{\det(x)}{\det(A)} = \frac{1}{1} = 1 \ , y = \frac{\det(y)}{\det(A)} = \frac{2}{1} = 2 \ , z = \frac{\det(z)}{\det(A)} = \frac{1}{1} = 1$$

مثال4:

باستخدام طريقة كرامر (المحددات) أوجد حل هذه المنظومة.

$$x + y + z = 1$$

$$3x - y + z = -2$$

$$5x - 3y + z = -5$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(A) = \det(x) = \det(y) = \det(z) = 0$$

∴ يوجد عدد للانهائي من الحلول ، نضع $Z = k$

$$x + y + k = 1$$

$$3x - y + k = -2$$

بجمع المعادلتين

$$4x + 2k = -1 \rightarrow\rightarrow x = \frac{-2k - 1}{4}$$

نعوض بقيمة x في المعادلة الأولى لإيجاد قيمة y

$$\frac{-2k-1}{4}+y+k=1 \rightarrow\rightarrow x=\frac{5-2k}{4}$$

مثال5:

باستخدام طريقة كرامر (المحددات) أوجد حل هذه المنظومة.

$$x+2y+2z=5$$
$$2x+4y-z=7$$
$$3x+6y+2z=10$$
$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & -1\\ 3 & 6 & 2\end{vmatrix}=0$$
$$\det(x)=\begin{vmatrix}5 & 2 & 2\\ 7 & 4 & -1\\ 10 & 6 & 2\end{vmatrix}=26\neq 0$$
$$\det(A)=0\,,\det(x)\neq 0$$

∴ هذا النظام لا يوجد له حل.

مثال6:

أوجد قيمة k التي تجعل المعادتين

$$x+ky=2$$
$$(k-1)x+2y=k$$

حل وحيد عدد لانهائي من الحلول ليس لها حل

1) يكون لها حل وحيد عندما $\det(A)\neq 0$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & k\\ k-1 & 2\end{vmatrix}=2-(k^2-k)\neq 0$$
$$k^2-k-2\neq 0 \rightarrow\rightarrow (k+1)(k-2)\neq 0$$

معنى ذلك للمعادلتين حل وحيد لجميع قيم k الحقيقية ماعدا $k\neq 2\,,k\neq -1$

2) نضع $k=2$ في المعادلتين

$$x + 2y = 2$$

$$x + 2y = 2$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \det(x) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \det(y) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(A) = \det(x) = \det(y) = 0$$

∴ يوجد عدد للانهائي من الحلول عندما $k = 2$

3) نضع $k = -1$ في المعادلتين:

$$x - 2y = 2$$

$$-2x + 2y = -1$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(x) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$\det(A) = 0\,, \qquad \det(x) = 3$$

∴ لا يوجد حل للمعادلتين عندما $k = -1$

مثال7:

أثبت أن حل منظومة المعادلات

$$2x + 2y + 4z = 0$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$2x + 3y + 4z = 0$$

هو الحل الغير صفري ، ثم أوجد الحل العام، وأوجد الحل الخاص عندما $x + y = 1$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

بمأن المعادلات متجانسة و $\det(A) = 0$ معنى ذلك أن الحل غير صفري

∴ يوجد عدد للانهائي من الحلول ، نضع $Z = k$

$$2x + 2y + 4z = 0$$

$$2x - y + 4z = 0$$

بطرح المعادلتين

$$3y = 0 \rightarrow\rightarrow y = 0$$

نعوض بقيمة y في المعادلة الأولى لإيجاد قيمة x

$$2x + 2(0) + 4z = 0 \rightarrow\rightarrow x = -2k$$

∴ الحل العام هو $(x, y, z) = (-2k, 0, k)$

نوجد الخاص عندما $x + y = 1$

$$x + y = 1 \rightarrow\rightarrow -2k + 0 = 1 \rightarrow\rightarrow k = \frac{-1}{2}$$

∴ الحل العام هو $(x, y, z) = (1,0, \frac{-1}{2})$

مثال8:

أوجد قيم المتغير k التي تجعل المعادلات الآتية:

حل وحيد عدد لانهائي من الحلول ليس لها حل

$$x + y + (k^2 - 5)z = k$$
$$x + 2y + z = 3$$
$$x + y - z = 2$$

1) يكون لها حل وحيد عندما $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k^2-5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 + R_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & k^2-5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k^2-5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (k^2-5)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$5 - k^2 - 1 \neq 0 \rightarrow\rightarrow k^2 - 4 \neq 0 \rightarrow\rightarrow (k-2)(k+2) \neq 0$$

معنى ذلك للمعادلتين حل وحيد لجميع قيم k الحقيقية ماعدا $k \neq 2, k \neq -2$

2) نضع $k = 2$ في المعادلات

$$x + y - z = 2$$
$$x + 2y + z = 3$$
$$x + y - z = 2$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \det(x) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\det(y) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \det(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(A) = \det(x) = \det(y) = \det(z) = 0$$

∴ يوجد عدد للانهائي من الحلول عندما $k = 2$

3) نضع $k = -2$ في المعادلات:

$$x + y - z = -2$$
$$x + 2y + z = 3$$
$$x + y - z = 2$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \det(x) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

$$\det(A) = 0\,, \qquad \det(x) = 12$$

∴ لا يوجد حل للمعادلتين عندما $k = -1$

مثال9:

أوجد حل منظومة المعادلات الآتية

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} = 1$$
$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{8}{z} = 0$$
$$\frac{-1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} = 5$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & 3 & 8\\ -1 & 9 & 10\end{vmatrix}=-182\neq 0$$

$$\det(1/x)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 0 & 3 & 8\\ 5 & 9 & 10\end{vmatrix}=98$$

$$\det(1/y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & -4\\ 2 & 0 & 8\\ -1 & 5 & 10\end{vmatrix}=-108$$

$$\det(1/z)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ -1 & 9 & 5\end{vmatrix}=16$$

$$1/x=\frac{\det(x)}{\det(A)}=\frac{98}{-182}\rightarrow\rightarrow x=\frac{13}{-7}$$

$$1/y=\frac{\det(y)}{\det(A)}=\frac{-108}{-182}\rightarrow\rightarrow y=\frac{91}{54}$$

$$1/z=\frac{\det(z)}{\det(A)}=\frac{16}{-182}\rightarrow\rightarrow z=\frac{-91}{8}$$

3) طريقة جاوس للحدف: 3×3

تعتمد طريقة جاوس على كتابة منظومة المعادلات $AX=B$ على الصورة $(A|B)$ قم نجري العمليات الصفية الأولية حتى نحصل على الصورة $(U|\hat{B})$ واحتمال الحل هي:

1. يوجد حل وحيد $\left(\begin{array}{ccc|c}\ & \ & \ & \ \\ 0 & 0 & a & b\end{array}\right)$ حيث $a\neq 0$
2. يوجد عدد لاتهائي من الحلول $\left(\begin{array}{ccc|c}\ & \ & \ & \ \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$
3. لا يوجد حل $\left(\begin{array}{ccc|c}\ & \ & \ & \ \\ 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right)$ حيث $b\neq 0$

مثال10:

باستخدام طريقة جاوس للحذف أوجد حل منظومة المعادلات الآتية:

$$2x - y + z = 3$$
$$4x + 2y - 2z = 2$$
$$6x - 3y + z = 9$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2=R_2-2R_1]{R_3=R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$-2z = 0 \rightarrow\rightarrow \boxed{z = 0}$$
$$4y - 4z = -4 \rightarrow\rightarrow 4y = -4 \rightarrow\rightarrow \boxed{y = -1}$$
$$2x - y + z = 3 \rightarrow\rightarrow 2x + 1 = 3 \rightarrow\rightarrow \boxed{x = 2}$$

مثال11:

باستخدام طريقة جاوس للحذف أوجد حل منظومة المعادلات الآتية:

$$2x + 2y = 5$$
$$x - 4y = 0$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2=R_2-{}^1/_2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -{}^5/_2 \end{array}\right)$$

$$-5y = -{}^5/_2 \rightarrow\rightarrow \boxed{y = {}^1/_2}$$
$$2x + 2y = 5 \rightarrow\rightarrow 2x + 1 = 5 \rightarrow\rightarrow \boxed{x = 2}$$

مثال12:

باستخدام طريقة جاوس للحذف أوجد حل منظومة المعادلات الآتية:

$$-x - y = 1 \quad , \quad -3x - 3y = 2$$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 1 \\ -3 & -3 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2=R_2-3R_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$-x - y = 1 \rightarrow\rightarrow (0)x + (0)y = 1$$

هذا النظام لا يوجد له حل بسبب عدم تساوي الطرفين وهذا ما ذكرناه سلفًا.

4) طريقة جاوس جوردان(المصفوفة المختزلة): 3×3

تعتمد طريقة جاوس على كتابة منظومة المعادلات $AX = B$ على الصورة $(A|B)$ قم نجري العمليات الصفية الأولية حتى نحصل على الصورة $(I|\hat{B})$ واحتمال الحل هي:

1. يوجد حل وحيد $\begin{pmatrix} & & & | & \\ 0 & 0 & a & | & b \end{pmatrix}$ حيث $a \neq 0$

2. يوجد عدد لاتهائي من الحلول $\begin{pmatrix} & & & | & \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

3. لا يوجد حل $\begin{pmatrix} & & & | & \\ 0 & 0 & 0 & | & b \end{pmatrix}$ حيث $b \neq 0$

مثال13:

باستخدام طريقة جاوس جوردان أوجد حل منظومة المعادلات الآتية:

$$x + z = 2$$

$$2x + y = 4$$

$$y - z = 1$$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 2 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2=R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&-2&0\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2=R_2+2R_3]{R_1=R_1-R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

استطعنا من خلال العمليات الأولية الصفية للوصول إلى مصفوفة الوحدة

أي أن لمنظومة المعادلات حل وحيد وهو: $x=1\ ,\ y=2\ ,z=1$

مثال14:

باستخدام طريقة جاوس جوردان أوجد حل منظومة المعادلات الآتية:

$$x+y+z=1$$

$$3x-y+z=-2$$

$$5x-3y+z=-5$$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\3&-1&1&-2\\5&-3&1&-5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3=R_3-5R_2]{R_2=R_2-3R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-4&-2&-5\\0&-8&-4&-10\end{array}\right)\xrightarrow{R_2=-{}^1/_4R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&{}^1/_2&{}^5/_4\\0&-8&-4&-10\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3=R_3+8R_2]{R_1=R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&{}^1/_2&{}^{-1}/_4\\0&1&{}^1/_2&{}^5/_4\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

∴يوجد عدد للانهائي من الحلول نضع $Z=k$

$$y+{}^1/_2z={}^5/_4\rightarrow\rightarrow y+{}^1/_2k={}^5/_4\rightarrow\rightarrow y=\frac{5-2k}{4}$$

$$x+{}^1/_2y={}^{-1}/_4\rightarrow\rightarrow x=\frac{-1-2k}{4}$$

مثال14:

أوجد حل منظومة المعادلات الآتية:

$$b\ \cos\gamma + c\ \cos\beta = a$$

$$c\ \cos\alpha + a\ \cos\gamma = b$$

$$a\ \cos\beta + b\ \cos\alpha = c$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} b & c & 0 & a \\ a & 0 & c & b \\ 0 & a & b & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2=R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} b & c & 0 & a \\ 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=bR_3-aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} b & c & 0 & a \\ 0 & a & b & c \\ 0 & -ab & bc & b^2-a^2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3+cR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} b & c & 0 & a \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 2bc & b^2-a^2+c^2 \end{array}\right)$$

$$2bc\ \cos\alpha = b^2 - a^2 + c^2 \rightarrow\rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2-a^2+c^2}{2bc}$$

$$a\cos\beta + b\ \cos\alpha = c \rightarrow\rightarrow a\cos\beta + b\ \times\frac{b^2-a^2+c^2}{2bc} = c$$

$$\cos\beta = \frac{c^2-b^2+a^2}{2ac}$$

$$b\ \cos\gamma + c\ \times\frac{c^2-b^2+a^2}{2ac} = a\ \rightarrow\rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

تمارين على الفصل الرابع(منظومة المعادلات الخطية)

1) أوجد قيمة μ , σ التي تجعل المعادلات الآتية:

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + 3z = 10$$
$$x + 2y + \sigma z = \mu$$

حل وحيد عدد لانهائي من الحلول ليس لها حل

2) أوجد قيم a , b التي تجعل نظام المعادلات الآتية:

$$x - 2y + bz = 3$$
$$ax + 2z = 2$$
$$5x + 2y = 1$$

حل وحيد عدد لانهائي من الحلول ليس لها حل

3) باستخدام جاوس جوردان أوجد حل المنظومة الأتية:

$$2x - 3y + 7z = 5$$
$$3x + y - 3z = 13$$
$$2x + 19y - 47z = 32$$