خريف
2024

الباب الخامس (الفضاء الاتجاهي)

أ. عُمر علي بن ساسي

جامعة مصراتة - كلية الهندسة
القسم العام – رياضة GS203 3

الفضاء الاتجاهي

هو مجموعة غير خالية من المتجهات V معرفة على المجال (الحقل)F تحت عمليتي الجمع والضرب بحيث تحقق الشروط الآتية:

إذا كان لدينا $u, v, w \in V$ و $\alpha, \beta \in R$ فإن:

1) $u + v \in V$
2) $u + v = v + u$
3) $(u + v) + w = v + (u + w)$
4) $u + \underline{0} = u$
5) $u + (-u) = \underline{0}$
6) $\alpha u \in V$
7) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
8) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
9) $(\alpha\beta)u = \alpha u + \alpha u$
10) $1 . u = u$

أنواع الاتجاهات الفضائية:

1. فضاء الأعداد الحقيقية R^n
2. فضاء المصفوفات $M_{m\times n}$
3. فضاء متعددات الحدود p_n
4. فضاء الدوال المتصلة $C[a, b]$

الفضاء الجزئي: W

نقول أن W فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي V إذا كانت W مجموعة غير خالية من V تحقق شرطين هما:

1) $\forall u, v \in W \rightarrow u + v \in W$
2) $\forall u \in W, \alpha \in R \rightarrow \alpha u \in W \in V$

مثال1:

هل $W = \{(x, y, 1) : x, y \in R\}$ فضاء جزئي من R^3.

let;

$$u = (x_1, y_1, 1) : \ x_1, y_1 \in R$$

$$v = (x_2, y_2, 1) : \ x_2, y_2 \in R$$

1. $u + v = (x_1, y_1, 1) + (x_2, y_2, 1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2) \notin W$

مثال2:

هل $W = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ فضاء جزئي من R^2.

let;

$$u = (x_1, y_1) \ : \ x_1 \geq 0, y_1 \geq 0$$

$$v = (x_2, y_2) \ : \ x_2 \geq 0, y_2 \geq 0$$

1. $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W$
2. $\alpha \in R \to \alpha u = (x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1) \notin W$

مثال3:

هل $W = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} : a, b \in R\right\}$ فضاء جزئي من $M_{2\times2}$.

let;

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & b_1 \end{pmatrix} : a_1, b_1 \in R$$

$$v = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix} : a_2, b_2 \in R$$

1. $u + v = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 2 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \notin W$

مثال4:

هل $W = \{a_0 - a_1x + 2a_1x^2 : a_0, a_1 \in R\}$ فضاء جزئي من p_2.

let;

$$p_{(x)} = b_0 - b_1x + 2b_1x^2 : b_0, b_1 \in R$$

$$q_{(x)} = c_0 - c_1x + 2c_1x^2 : c_0, c_1 \in R$$

1. $p_{(x)} + q_{(x)} = b_0 - b_1x + 2b_1x^2 + c_0 - c_1x + 2c_1x^2$

$$= (b_0 + c_0) - (b_1 + c_1)x + (2b_1 + 2c_1)x^2 \in W$$

2. $\alpha \in R \to \alpha p_{(x)} = \alpha(b_0 - b_1x + 2b_1x^2) = \alpha b_0 - \alpha b_1x + 2\alpha b_1x^2 \in W$

مثال5:

هل $W = \{f : f_{(-x)} = f_{(x)}\}$ فضاء جزئي من $F: R \to R$.

let;

$$f_{(-x)} = f_{(x)}$$

$$g_{(-x)} = g_{(x)}$$

1. $(f + g)_{(-x)} = f_{(-x)} + g_{(-x)} = f_{(x)} + g_{(x)} = (f + g)_{(x)} \in W$
2. $\alpha \in R \to (\alpha f)_{(-x)} = \alpha f_{(-x)} = \alpha f_{(x)} = (\alpha f)_{(x)} \in W$

مثال6:

هل $W = \{(a, b, c) : \ a, b, c \in R, a + b + c = 0\}$ فضاء جزئي من R^3.

let;

$$u = (a_1, b_1, c_1) : \ a_1 + b_1 + c_1 = 0$$

$$v = (a_2, b_2, c_2) : \ a_2 + b_2 + c_2 = 0$$

1. $u + v = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) \in W$$

2. $\alpha \in R \to \alpha u = \alpha(a_1, b_1, c_1) = (\alpha a_1 + \alpha b_1 + \alpha c_1) = \alpha(a_1 + b_1 + c_1) \in W$

مثال7:

هل $W=\{(a,b,c):\ a,b,c\in R, a^2+b^2+c^2\le 1\}$ فضاء جزئي من R^3.

let;

$$u=(a_1,b_1,c_1):\ {a_1}^2+{b_1}^2+{c_1}^2\le 1$$

$$v=(a_2,b_2,c_2):\ {a_2}^2+{b_2}^2+{c_2}^2\le 1$$

1. $u+v=(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)$

$$=(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2+(c_1+c_2)^2$$

$$=\left({a_1}^2+2a_1a_2+{a_2}^2+{b_1}^2+2b_1b_2+{b_2}^2+{c_1}^2+2c_1c_2+{c_2}^2\right)$$

$$=\left({a_1}^2+{b_1}^2+{c_1}^2\right)+\left({a_2}^2+{b_2}^2+{c_2}^2\right)+(2a_1a_2+2b_1b_2+2c_1c_2)\notin W$$

مثال8:

هل $W=\{(a,b,c):\ a,b,c\in R\ ,\ b=c=0\}$ فضاء جزئي من R^3.

let;

$$u=(a_1,b_1,c_1):\ b_1=c_1=0$$

$$v=(a_2,b_2,c_2):\ b_2=c_2=0$$

1. $u+v=(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)$

$$=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)$$

$$\to b_1+b_2=0\ ,\qquad c_1+c_2=0\in W$$

2. $\alpha\in R\to \alpha u=\alpha(a_1,b_1,c_1)=(\alpha a_1+\alpha b_1+\alpha c_1)\to \alpha b_1=0\ ,\ \alpha c_1=0\ \in W$

مثال9:

هل $W=\{f:f_{(3)}=0\}$ فضاء جزئي من $F:R\to R$.

let;

$$f_{(3)}=0\quad ,\quad g_{(3)}=0$$

1. $(f+g)_{(3)}=f_{(3)}+g_{(3)}=\ 0\in W$
2. $\alpha\in R\to(\alpha f)_{(3)}=\alpha f_{(3)}=0\in W$

الاستقلال الخطي والارتباط الخطي:

لتكن لدينا $v_1, v_2, v_3 \dots \dots \dots \dots v_n \in R^n$ فإن المتجه v هو تركيبة خطية للمتجهات السابقة إذا وجدت قيم k_i بحيث أن:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + \cdots + k_nv_n = 0$$

هناك طريقتين لمعرفة الاستقلال والارتباط.

1) طريقة المصفوفة المختزلة :

تعتمد هذه الطريقة على تحويل مصفوفة المتجهات إلى مصفوفة الوحدة فإذا استطعنا الحصول على مصفوفة الوحد فإن المتجهات مستقلة خطيًا وإلا فهي مرتبطة.

2) طريقة المحددات:

نقوم بإيجاد محدد مصفوفة المتجهات فإذا كان المحدد $\neq 0$ فإن المتجهات مستقلة وإلا فهي مرتبطة.

مثال10:

هل المتجهات $v_1(2,1,1), v_2(-1,3,1), v_3(1,-2,-3)$ مستقلة خطيًا أو لا.

الحل الأول: باستخدام طريقة اختزال المصفوفة:

نحول مصفوفة المتجهات إلى مصفوفة الوحدة

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow\rightarrow\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

استطعنا الوصول إلى مصفوفة الوحدة فهنا يكون لدينا الحل الصفري

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

نستطيع القول ان هذه المتجهات مستقلة خطيًا.

الحل الثاني: باستخدام المحددات.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

المحدد لا يساوي صفر نقول أن المتجهات مستقلة خطيًا.

مثال11:

هل المتجهات $v_1(7,-4,1), v_2(2,1,-1), v_3(1,-2,1)$ مستقلة خطيًا أو لا.

الحل الأول: باستخدام طريقة اختزال المصفوفة:

نحول مصفوفة المتجهات إلى مصفوفة الوحدة

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow\rightarrow\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تحصلنا على صف صفري تكون هذه المتجهات مرتبطة خطيًا

الحل الثاني: باستخدام المحددات.

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

المحدد يساوي صفر نقول أن المتجهات مرتبطة خطيًا.

التركيبة الخطية:

لتكن لدينا $v_1, v_2, v_3 \dots \dots \dots \dots v_n \in R^n$ فإن المتجه v هو تركيبة خطية للمتجهات السابقة إذا وجدت قيم k_i بحيث أن:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + \cdots + k_nv_n = v$$

مثال12:

أكتب المتجه $v = (1,-2,5)$ كتركيبة من المتجهات $e_1(1,1,1), e_2(1,2,3), e_3 = (2,-1,1)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

بطريقة جاوس للحذف استطعنا الحصول على مصفوفة الوحدة إذًا للمصفوفة حل وحيد

$$v = -6e_1 + 3e_2 + 2e_3$$

مثال13:

هل المتجه $v = (2,-5,3)$ كتركيبة من المتجهات $e_1(1,-3,2), e_2(2,-4,-1), e_3 = (1,-5,7)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & -5 & -5 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \end{array}\right) \rightarrow\rightarrow\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{array}\right)$$

في هذه الحالة لم نتحصل على مصفوفة وحدة بل تحصلنا غلى صف صفري فبهذا يمكننا القول أن المتجه v ليس تركيبة خطية للمتجهات e_1, e_2, e_3.

مثال14:

هل يمكن كتابة متعددة الحدود $p_{(t)} = t^2 + t + 1$ كتركيبة خطية من متعددات الحدود

$$e_1 = t^2 + 2t + 3 \quad , e_2 = t + 2 \quad , e_3 = -t^2 + 1 \ .$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow\rightarrow\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

بعد حل هذه المعادلات الخطية يظهر لنا صف بالكامل أصفار هذا ما يدل على وجود على عدد لانهائي من الحلول بوضع $z = k \rightarrow\rightarrow x = 1 + k \rightarrow\rightarrow y = -1 - 2k$

$$p_{(t)} = (1+k)e_1 + (-1-2k)e_2 + ke_3$$

مثال15:

أكتب المصفوفة $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ كتركيبة خطية من المصفوفات

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = 3 \rightarrow\rightarrow k_2 = -2 \rightarrow\rightarrow k_3 = -1$$

$$E = 3A - 2B - C$$

تمارين على الفصل الخامس(الفضاء الاتجاهي)

1) هل $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0\right\}$ فضاء جزئي من $M_{2\times2}$.

2) هل $W = \left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : tr(A) = 0\right\}$ فضاء جزئي من $M_{2\times2}$

3) هل $W = \{(x + y + z): x, y, z \in R\ , x^2 - z^2 = 0\}$ فضاء جزئي من R^3 .

4) أوجد قيم λ التي تجعل مجموعة المتجهات$(\lambda, -1, -1), (-1, \lambda, -1), (-1, -1, \lambda)$ غير مستقلة خطيًا.

5) هل المتجهات $(1, -2,1), (2,1, -1), (7, -4,1)$ مرتبطة خطيًا أو لا. باستخدام المصفوفة المختزلة.

6) هل $W = \{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4): x_1, x_2, x_3, x_4 \in R\ ,\ x_1 + 3x_4 = 0, x_2 = x_3\}$ فضاء جزئي من R^4 .

7) هل $W = \{a_0 + b_0x + c_0x^2 : a_0, b_0, c_0 \in R, a_0 + 2b_0x - c_0x^2 = 1\}$ فضاء جزئي من p_2.