كلية الهندسة	قسم الهندسة الكهربائية والالكترونية	الامتحان الفصلي الثاني
معالجة الاشارة الرقمية	خريف 2016	الزمن: 90 دقيقة

المجموع النهائي: 20

السؤال الأول:(4 + 4 درجات)

أوجد DTFT للإشارة التالية:

أ) $x(n) = a^n \, sin(\Omega_0 n) \, u(n), \quad |a| < 1$. استخدم الخواص.

ب) $h(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right] u(n)$ ثم استخدم النتيجة لايجاد الخرج $y(n)$ عندما يكون الدخل:

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

السؤال الثاني:(2+2+4 درجات)

افرض المنظومة السببية المعرفة بمعادلة الفروق التالية:

$$y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) = x(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$$

أ- اوجد الاستجابة الومضية $\left(\mathrm{h(n)}\right)$ لهذه المنظومة.

ب- باستخدام النتائج في الفقرة السابقة، اوجد الاستجابة للدخل $x(n) = e^{j\omega n}$

ت- اوجد الاستجابة الترددية ثم ارسم هذه الاستجابة خلال النطاق الترددي المتاح. حدد خصائص هذه الاستجابة.

السؤال الثالث:(2+2 درجة)

لكل من المنظومات الخطية المتقطعة التالية إذا كانت $x(n)$ و $y(n)$ هما دخل وخرج هذه المنظومات حدد فيماذا كانت هذه المنظومات خطية، سببية، مستقرة، ومتغيرة زمنيا أم لا:

أ- $\mathrm{y(n) = n^3 x(n)}$

ب- $\mathrm{y(n) = \alpha x(-n)}$ حيث أن α ثابت لا يساوي الصفر.

تمنياتي للجميع بالتوفيق

TABLE 4.5 PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM FOR DISCRETE-TIME SIGNALS

Property	Time Domain	Frequency Domain
Notation	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(\omega)$ $X_1(\omega)$ $X_2(\omega)$
Linearity	$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$	$a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$
Time shifting	$x(n-k)$	$e^{-j\omega k} X(\omega)$
Time reversal	$x(-n)$	$X(-\omega)$
Convolution	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(\omega) X_2(\omega)$
Correlation	$r_{x_1 x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$S_{x_1 x_2}(\omega) = X_1(\omega) X_2(-\omega)$ $= X_1(\omega) X_2^*(\omega)$ [if $x_2(n)$ is real]
Wiener–Khintchine theorem	$r_{xx}(l)$	$S_{xx}(\omega)$
Frequency shifting	$e^{j\omega_0 n} x(n)$	$X(\omega - \omega_0)$
Modulation	$x(n) \cos \omega_0 n$	$\frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0)$
Multiplication	$x_1(n) x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) X_2(\omega - \lambda) d\lambda$
Differentiation in the frequency domain	$n x(n)$	$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Conjugation	$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
Parseval's theorem	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega) X_2^*(\omega) d\omega$	

كلية الهندسة قسم الهندسة الكهربائية والالكترونية الإجابة النموذجية للامتحان الفصلي الثاني

معالجة الاشارة الرقمية **خريف 2016** **الزمن: 90 دقيقة**

السؤال الاول:

أ)

$x[n] = (a^n \sin \Omega_0 n)u[n]$

We can use the modulation property to evaluate this signal. Since

$$\sin \Omega_0 n \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\pi}{2j}[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)],$$

periodically repeated, then

$$X(\Omega) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1 - ae^{-j(\Omega-\Omega_0)}} - \frac{1}{1 - ae^{-j(\Omega+\Omega_0)}}\right]$$

periodically repeated.

ب)

We are given a system with impulse response

$$h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{\pi n}{2}\right] u[n]$$

The signal $h_1[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ has the Fourier transform

$$H_1(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

Using the modulation theorem, we have

$$H(\Omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j(\Omega-\pi/2)}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j(\Omega+\pi/2)}}\right]$$

We expect the system output to be a sinusoid modified in amplitude and phase. Using the results in part (a) and the fact that

$$x[n] = \tfrac{1}{2}e^{j(\pi n/2)} + \tfrac{1}{2}e^{-j(\pi n/2)},$$

we have

$$H(\Omega)\Big|_{\Omega=\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3},$$
$$H(\Omega)\Big|_{\Omega=-\pi/2} = H^*(\Omega)\Big|_{\Omega=\pi/2} = \frac{4}{3}$$

so

$$y[n] = \frac{2}{3}e^{j(\pi n/2)} + \frac{2}{3}e^{-j(\pi n/2)}$$
$$= \frac{4}{3}\cos\frac{\pi}{2}n$$

السؤال الثاني:

(a) Rewriting the difference equation, with $x(n) = \delta(n)$ and $h(n)$ denoting the unit-sample response

$$h(n) = \frac{1}{2} h(n-1) + \delta(n) + \frac{1}{2} \delta(n-1) \quad .$$

Since the system is causal, $h(n)$ is zero for $n < 0$. For $n \geq 0$,

$$h(0) = \frac{1}{2} h(-1) + \delta(0) + \frac{1}{2} \delta(-1) = 1$$

$$h(1) = \frac{1}{2} h(0) + \delta(1) + \frac{1}{2} \delta(0) = 1$$

$$h(2) = \frac{1}{2} h(1) + \delta(2) + \frac{1}{2} \delta(1) = \frac{1}{2}$$

$$h(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n \geq 1$$

$h(n)$ can also be expressed as

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) + u(n-1)] \quad .$$

(b) Substituting $x(n)$ and $h(n)$ into the convolution sum we obtain

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k [u(k) + u(k-1)] e^{j\omega(n-k)}$$

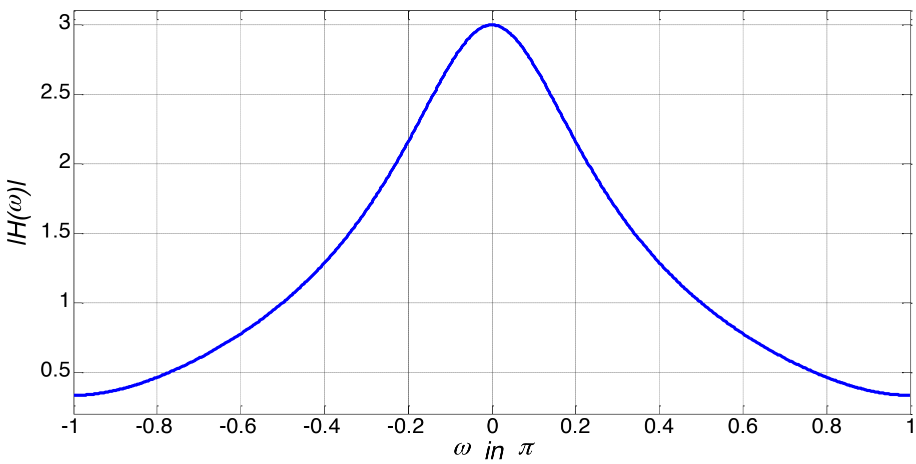
$$= e^{j\omega n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{-j\omega k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{-j\omega k} \right]$$

$$= e^{j\omega n} \left[\frac{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} \right]$$

(c) The frequency response of the system is the complex amplitude of the response with an excitation $e^{j\omega n}$. Thus, from part (a)

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

لرسم الدالة نستخدم الماتلاب لنتحصل على الشكل التالي



من الشكل نلاحظ ان هذه الاستجابة هي استجابة مرشح امرار منخفض LPF.

السؤال الثالث:

أ)

(a) $y[n] = n^2x[n]$.

For an input $x_i[n]$ the output is $y_i[n] = n^2x_i[n]$, $i = 1, 2$. Thus, for an input $x_3[n] = Ax_1[n] + Bx_2[n]$, the output $y_3[n]$ is given by $y_3[n] = n^2(Ax_1[n] + Bx_2[n]) = Ay_1[n] + By_2[n]$.

Hence the system is linear.

Since there is no output before the input hence the system is causal. However, $|y[n]|$ being proportional to n, it is possible that a bounded input can result in an unbounded output. Let $x[n] = 1 \ \forall \ n$, then $y[n] = n^2$. Hence $y[n] \to \infty$ as $n \to \infty$, hence not BIBO stable.

Let $y[n]$ be the output for an input $x[n]$, and let $y_1[n]$ be the output for an input $x_1[n]$. If $x_1[n] = x[n-n_0]$ then $y_1[n] = n^2x_1[n] = n^2x[n-n_0]$. However, $y[n-n_0] = (n-n_0)^2x[n-n_0]$. Since $y_1[n] \neq y[n-n_0]$, the system is not time-invariant.

ب)

The system is linear, stable, non causal. Let $y[n]$ be the output for an input $x[n]$ and $y_1[n]$ be the output for an input $x_1[n]$. Then $y[n] = \alpha x[-n]$ and $y_1[n] = \alpha x_1[-n]$.

Let $x_1[n] = x[n-n_0]$, then $y_1[n] = \alpha x_1[-n] = \alpha x[-n-n_0]$, whereas $y[n-n_0] = \alpha x[n_0-n]$.

Hence the system is time-varying.