خريف
2024

الباب السادس (القيم الذاتية والمتجهات الذاتية)

أ. عُمر علي بن ساسي

جامعة مصراتة - كلية الهندسة
القسم العام – رياضة GS203 3

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n فان المتجه الغير صفري X يُسمى متجهاً ذاتياً للمصفوفة A اذا كان AX مضاعفاً عددياً للمتجه X أي ان $AX = \lambda X$ حيث ان λ ثابت يُسمى القيمة الذاتية للمصفوفة A .
لايجاد القيم الذاتية للمصفوفة A نضع المعادلة $AX = \lambda X$ بالصورة $(\lambda I - A)X = 0$ والتي لها حل غير صفري اذا وفقط اذا كان $det(\lambda I - A) = 0$.

مثال1:

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

الحل :

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$det(\lambda I - A) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda(\lambda - 3) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

القيم الذاتية هي $\lambda = 2 \quad and \quad \lambda = 1$

$$(\lambda I - A)X = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

عندما $\lambda = 2$ فان

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x - 2y = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2y$$

عندما $\lambda = 1$ فان

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x - 2y = 0 \rightarrow x = -y$$

لذا فان المتجه الذاتي هو

$$X = \begin{bmatrix} -m \\ m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث $m \in \mathcal{R}$

مثال2:

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&4&-1\\-1&2&0\end{bmatrix}$

الحل : $\lambda I-A=\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&4&-1\\-1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-2&0&-1\\1&\lambda-4&1\\1&-2&\lambda\end{bmatrix}$

$$det(\lambda I-A)=0 \quad\rightarrow\quad (\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-4&1\\-2&\lambda\end{vmatrix}-(0)\begin{vmatrix}1&1\\1&\lambda\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}1&\lambda-4\\1&-2\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-2)\{\lambda(\lambda-4)+2\}-\{-2-(\lambda-4)\}=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+2)+(\lambda-2)=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+2+1)=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+3)=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

القيم الذاتية هي $\lambda=3 \quad and \quad \lambda=1 \quad , \quad \lambda=2$

عندما $\lambda=2$ فان $\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&-2&1\\1&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$z=0 \quad , \quad x-2y+z=0 \quad and \quad x-2y+2z=0 \quad\rightarrow\quad x=2y$$

لذا فان المتجه الذاتي هو $X=\begin{bmatrix}2m\\m\\0\end{bmatrix}=m\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

عندما $\lambda=1$ فان $\begin{bmatrix}-1&0&-1\\1&-3&1\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$-x-z=0 \quad , \quad x-3y+z=0 \quad and \quad x-2y+z=0 \quad\rightarrow\quad x=-z \ , y=0$$

لذا فان المتجه الذاتي هو $X=\begin{bmatrix}-m\\0\\m\end{bmatrix}=m\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

عندما $\lambda=3$ فان $\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&-1&1\\1&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$x - z = 0 \quad , \qquad x - y + z = 0 \quad and \quad x - 2y + 3z = 0 \;\rightarrow\; x = z \quad , \qquad y = 2z$$

لذا فان المتجه الذاتي هو $X = \begin{bmatrix} m \\ 2m \\ m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

نظرية كلي هاملتون:

كل مصفوفة مربعة تحقق معادلتها المميزة.

مثال3:

أثبت أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ تحقق نظرية كلي هاملتون.

تمارين على الفصل السادس

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لكل المصفوفات الآتية:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

2) $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

3) $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

أثبت أن $x = (-3,-1,1)$ ، $y = (1,0,0)$ هي متجهات ذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$، ثم

استنتج القيم الذاتية.