امتحان عملي لمقرر تحليل عددي
(الجزء النظري)
الزمن: 35 دقيقة

جامعة مصراتة
كليـــة الهندســـة
القسم العام

أستاذ المقرر
مصطفى إدريس أبورويص

السؤال الأول – متسلسلة ماكلورين:

1. عند كتابتك للنص البرمجي، هل استخدمت range(n+1) بدل range(n)؟ ماذا يحدث لو غيرناها؟
2. ما هو تأثير تغيير قيمة x إلى قيمة قريبة من نهاية الفترة؟ هل المتسلسلة تبقى دقيقة؟ لماذا؟
3. ما المكتبة التي استخدمتها للرسم البياني؟ هل تعرف اسم الدالة التي رسمت بها؟ اشرح كيف استخدمتها.

السؤال الثاني – نيوتن، النقطة الثابتة، التنصيف:

1. في طريقة نيوتن، ما هي المشتقة التي استخدمتها؟ هل حسبتها يدويًا أم استخدمت مكتبة لذلك؟
2. كيف عرفت أن الطريقة تقاربت؟ هل استخدمت شرطًا محددًا للتوقف؟ ما هو؟
3. في النص البرمجي، كيف عرفت كم مرة تكررت الطريقة حتى وصلت للحل؟ ما المتغير الذي استخدمته؟
4. أي من الطرق الثلاث كانت أبطأ؟ ولماذا باعتقادك؟
5. هل جربت نفس المعادلة مع قيمة أولية مختلفة؟ كيف أثرت النتيجة؟

السؤال الثالث – جاوس–سيدل:

1. هل ترتيب المعادلات يغير النتيجة؟ كيف اختبرت ذلك في الحل؟
2. هل قمت بتخزين الخطأ عند كل خطوة؟ كيف كنت تحسبه؟

السؤال الرابع – طريقة سمبسون:

1. ما هو القانون الرياضي لطريقة سمبسون؟ اكتبه الآن.
2. ما دالة بايثون التي استخدمتها لحساب التكامل؟ هل برمجتها يدويًا أم استخدمت دالة جاهزة؟
3. هل رأيت أن الخطأ دائمًا ينقص بزيادة الفترات؟ متى لم ينقص؟ لماذا برأيك؟

امتحان نهائي لمقرر تحليل عددي
الزمن: 3ساعات

جامعة مصراتة
كليـــة الهندســـة
القسم العام

أستاذ المقرر
مصطفى إدريس أبوروبص

أجب عن جميع الأسئلة التالية مع تقديم الخطوات التفصيلية للوصول إلى الحل

السؤال الأول (10 درجة)

1. إذا كانت $h(x) = \frac{1}{(1-x^2)}$ وكانت:

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{A}{(1+x)} + \frac{B}{(1-x)}$$

أ) قرب الدالة $h(x)$ باستخدام متسلسلة ماكلورين للدالة $\frac{1}{(1+x)}$ إلى كثيرة حدود من الدرجة الرابعة إذا علمت أن $\frac{1}{(1+x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots$ ثم أوجد صيغة خطأ التقريب في هذه الحالة.

ب) استخدم طريقة متسلسلة تايلور حول النقطة $x = 1$ لتقريب الدالة $h(x)$ ، بكتابة الحدود الخمسة الأولى من هذه المتسلسلة. ثم قارن بين دقة هذا التمثيل وتمثيل ما كلورين عند حساب القيم القريبة من $x = 1$.

2. استخدم طريقة نيوتن – رافسون لحساب جذر المعادلة $xlog_{10}x = 1.2$ بدقة خمس أرقام عشرية إذا $x_o = 0.95$.

السؤال الثاني (15 درجة)

1. أعطيت الدالة التالية:

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

أ) باستخدام طريقة التنصيف، ابحث عن تقريب للجذر الحقيقي للدالة $f(x)$ في الفترة $[0,1]$ بدقة ثلاث منازل عشرية.

ب) باستخدام الدالة التحويلية المناسبة للدالة $f(x)$ طبق طريقة النقطة الثابتة لإيجاد قيمة تقريبية للجذر، بشرط $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-4}$.

2. باستخدام صيغة نيوتن للفروق المحدودة، كوّن كثيرة حدود من الدرجة الثالثة اعتمادًا على البيانات التالية:

$$f(-0.75) = -0.0718125, \quad f(-0.5) = -0.02475, \quad f(-0.25) = 0.3349375, \quad f(0) = 1.10100$$

ثم استخدم كثيرة الحدود الناتجة لتقريب قيمة $f(-\frac{1}{3})$؟

الصفحة ←

السؤال الثالث (10 درجة)

1. أوجد حل النظام الخطي التالي باستخدام طريقة جاوس-سيدل (قم بإجراء ثلاث تكرارات)

$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 - x_3 &= 10 \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 8 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

2. إذا كانت:

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cosx + 6)dx$$

أ. احسب قيمة التكامل تحليلياً.

ب. باستخدام قاعدة سيمبسون، قسّم الفترة إلى $n = 4$ أقسام فرعية، واحسب تقديرًا عدديًا لقيمة التكامل.

ج. احسب الخطأ المطلق بين القيمة التحليلية والقيمة العددية. هل تعتقد أن زيادة عدد الأقسام n سيحسن من الدقة بشكل ملحوظ؟ فسر إجابتك.

السؤال الرابع (15 درجة)

1. اعتبر الجدول التالي من قيم الدالة تم إنشاؤه باستخدام $f(x) = \ln(x)$:

i	x	$f(x)$
0	0.4	-0.916291
1	0.5	-0.693147
2	0.7	-0.356675
3	0.8	-0.223144

باستخدام طريقة لاجرانج أوجد $f(0.6)$ ؟

2. من خلال دراستك لمتسلسلة تايلور اثبت أن:

$$(1 + x)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$$

3. باستخدام طريقة أويلر وبخطوة مقدارها $h = 0.1$، احسب قيمة $y(0.2)$، علمًا بأن المعادلة التفاضلية المعطاة هي:

$\frac{dy}{dx} = -y$ حيث $y_o = 1,\ x_o = 0$.

مع أطيب التمنيات لكم بالتوفيق والنجاح

امتحان عملي لمقرر تحليل عددي الزمن: 48 ساعة	جامعة مصراتة كليـــة الهندســـة القسم العام	أستاذ المقرر مصطفى إدريس أبورويص

تعليمات عامة:

- ✓ الكتابة يجب أن تتم باستخدام الحاسوب فقط، ولن تُقبل الحلول المكتوبة بخط اليد.
- ✓ يجب إرفاق الكود البرمجي بشكل واضح ضمن ملف الحل.
- ✓ يجب الاهتمام بالتمثيل البياني وإدراجه في الحل، حيث يُعد جزءًا أساسيًا من التقييم.
- ✓ يُشترط أن يتضمن الحل تعليقات توضيحية في الكود وكتابة تحليلية مختصرة للنتائج.
- ✓ آخر موعد لتسليم الحل هو يوم السبت الموافق 05/17، الساعة 12:15 ظهرًا، ولن يُنظر في أي حلول بعد هذا الوقت.

السؤال الأول (30 درجة)

افترض أن لديك الدالة التالية:

$$h(x) = \frac{1}{2+x} \qquad 0 \le x \le 1$$

1. اكتب دالة بايثون بعنوان $taylor_approximation(x, n)$ تقوم بحساب القيمة التقريبية لـ $h(x)$ باستخدام أول n من الحدود، حيث:

   x: قيمة عددية أو مصفوفة من القيم في الفترة $[a, b]$.

   n: عدد الحدود المستخدمة في المتسلسلة والتي يقوم المستخدم بإدخالها.

2. قارن بين القيمة الحقيقية والقيمة المحسوبة.
3. استخدم مكتبة $matplotlib$ لإنشاء رسم بياني واحد يحتوي على الآتي:
   - منحنى الدالة الأصلية $h(x)$.
   - منحنيات تقريب الدالة باستخدام $n = 5,10,20$ حدًا.
4. اكتب تقريرًا موجزًا (يمكن أن يكون ضمن تعليقات الكود أو ملف PDF مرفق) يتضمن:
   - كيف يتغير الخطأ مع زياده عدد الحدود n؟
   - هل هناك نطاق معين داخل $[0,1]$ تكون فيه المتسلسلة أكثر دقة؟
   - ما هو تأثير القيم القريبة من $x = 2$ على تقارب المتسلسلة؟
   - أي ملاحظات أخرى تراها مناسبة.

السؤال الثاني (30 درجة)

$$f(x) = x^3 - cos(x) = 0$$

حل المعادلة غير الخطية السابقة باستخدام الثلاث طرق العددية (نيوتن رافسون – النقطة الثابتة – التنصيف) ومقارنة أدائها من خلال إجابتك على الأسئلة التالية:

1. أي طريقة كانت أسرع تقاربًا؟ ولماذا؟
2. هل كانت جميع الطرق متقاربة؟ وهل هناك أي طريقة فشلت؟
3. ما هو تأثير القيمة الأولية أو الفترة على أداء كل طريقة؟
4. أي طريقة تُفضل استخدامها في هذه الحالة ولماذا؟
5. من خلال استخدامك لغة بايثون اختبر الدالة السابقة $f(x)$ على أكثر من صيغة ثم قارن بينها من حيث عدد التكرارات والنتيجة النهائية لكل منهما، هل كانت النتيجة متقاربة ولماذا ؟

السؤال الثالث (20 درجة)

(0.1374, 1.1805, -2.4447)

إذا كان الحل الدقيق لمنظومة المعادلات التالية هو $(1, -2, 1)$،

$$10x + y - z = 5$$
$$x - 10y - 6z = 3$$
$$x - 2y - 5z = 10$$

أ. باستخدام لغة بايثون وباستخدام طريقة جاوس – سيدل اكتب برنامج يعمل على حل أي منظومة معادلات مشابهة للمنظومة المعطاة على أن يحدد البرنامج قبل البدء في الحل ما إذا كان شرط الحل متحقق أم لا؟

ب. بدل ترتيب المعادلات أكثر من مرة ثم قارن الحل بالحل المضبوط في كل مرة وبعد ذلك قارن الحلول مع بعضها اعتمادًا على اختلاف الترتيب وهل تتغير سرعة التقارب؟ ولماذا؟

السؤال الرابع (20 درجة)

باستخدام طريقة سمبسون لحساب التكامل العددي ومن خلال برمجتها بلغة $Python$ وضح مع الرسم البياني تغير الخطأ المطلق مع عدد الفترات ثم أجب عن التالي:

1. كيف يتغير الخطأ مع زيادة عدد الفترات n؟
2. هل كانت جميع النتائج دقيقة؟ وهل هناك أي انحراف كبير؟
3. ما هي مميزات وعيوب طريقة سمبسون مقارنة بطرق أخرى مثل قاعدة شبه المنحرف؟

مع أطيب التمنيات لكم بالتوفيق والنجاح

عطوفي أبو رمان

تحليل عددي

Homework (1)

① أوجد الأربع حدود الأولى من كثيرة الحدود لمتسلسلة تايلور للدوال التالية :-

a) $\ln(x)$ at $x_0 = 1$ b) $\frac{1}{x}$ at $x_0 = 1$

② أوجد كثيرة الحدود لمتسلسلة تايلور للدالة $\sin(\pi x)$ عند $x_0 = 0.5$ ثم قرب الدالة $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$

③ أوجد سلسلة تايلور للدالة $x^4 + x - 2$ عند $x_0 = 1$

④ أوجد الخمس الحدود الأولى لكثيرة الحدود لمتسلسلة تايلور للدالة $(x-1)e^x$ عند $x_0 = 1$ ثم قارن القيمة المقربة بالقيمة الحقيقية عند $f(2)$

⑤ أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $x\sin(x)$

⑥ أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $\sin^2(x)$ باستخدام متسلسلة الدالة $\cos 2x$ ثم أوجد

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$$

7) أوجد كثيرة حدود ماكلورين للدالة $\cos(\sin(x))$ ثم أوجد

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(\sin(x))}{x^2}$$

8) المعادلة $e^{-2x} = 3x^2$ لها جذر عند القرب من $x = 0$. أوجد تقريب لدالة e^{-2x} ثم أوجد الجذر التقريبي للمعادلة.

9) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة e^x والدالة $\sin(x)$ ثم أوجد مع التقييم

$$\int_0^1 e^{\sin(x)} \, dx$$

```
import sympy as sp
from sympy import pretty
def taylor_series(func, var, a, n):
    series = 0
    for i in range(n + 1):
        term = (func.diff(var, i).subs(var, a) /
sp.factorial(i)) * (var - a)**i
        series += term
    return series


x = sp.symbols('x')

f = sp.exp(x)

n = 5
a = 0
taylor_expansion = taylor_series(f, x, a, n)


print(f"Taylor series of the function {f} around x={a} up to
order {n}:")
```

برنامج بايثون يطبع كبرى حدود
لمتسلسلة تايلور لأي دالة

```
import sympy as sp
from sympy import pretty

def taylor_series(func, var, a, n):
    series = 0
    for i in range(n + 1):
        term = (func.diff(var, i).subs(var, a) / sp.factorial(i)) * (var - a)**i
        series += term
    return series

# تعريف المتغيرات الرمزية
x = sp.symbols('x')

# تعريف الدالة المطلوبة
f = sp.sin(x)

# تحديد درجة التوسيع ونقطة التوسع
n = 5
a = 0

# حساب متسلسلة تايلور
taylor_expansion = taylor_series(f, x, a, n)

# اختيار نقطة لحساب قيمة الدالة ومتسلسلة تايلور عندها
x_value = 0.5  # يمكنك تغيير هذه القيمة

# حساب القيم الحقيقية والتقريبية
actual_value = f.subs(x, x_value)
approx_value = taylor_expansion.subs(x, x_value)

# حساب الخطأ المطلق والنسبي
absolute_error = abs(actual_value - approx_value)
relative_error = absolute_error / abs(actual_value) if actual_value != 0 else 0

# طباعة النتائج
print(f"Taylor series of the function {f} around x={a} up to order {n}:")
print(pretty(taylor_expansion, use_unicode=True, wrap_line=False))
print(f"\nActual value at x={x_value}: {actual_value}")
print(f"Approximate value at x={x_value} using Taylor series: {approx_value}")
print(f"Absolute Error: {absolute_error}")
print(f"Relative Error: {relative_error}")
```

```
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import pretty

def taylor_series(func, var, a, n):
    series = 0
    for i in range(n + 1):
        term = (func.diff(var, i).subs(var, a) / sp.factorial(i)) * (var - a)**i
        series += term
    return series

# تعريف المتغيرات الرمزية
x = sp.symbols('x')

# تعريف الدالة المطلوبة
f = sp.sin(x)

# تحديد درجة التوسيع ونقطة التوسع
n = 5
a = 0

# حساب متسلسلة تايلور
taylor_expansion = taylor_series(f, x, a, n)

# اختيار نقطة لحساب قيمة الدالة ومتسلسلة تايلور عندها
x_value = 0.5  # يمكنك تغيير هذه القيمة

# حساب القيم الحقيقية والتقريبية
actual_value = f.subs(x, x_value)
approx_value = taylor_expansion.subs(x, x_value)

# حساب الخطأ المطلق والنسبي
absolute_error = abs(actual_value - approx_value)
relative_error = absolute_error / abs(actual_value) if actual_value != 0 else 0

# طباعة النتائج
print(f"Taylor series of the function {f} around x={a} up to order {n}:")
print(pretty(taylor_expansion, use_unicode=True, wrap_line=False))
print(f"\nActual value at x={x_value}: {actual_value}")
print(f"Approximate value at x={x_value} using Taylor series: {approx_value}")
print(f"Absolute Error: {absolute_error}")
print(f"Relative Error: {relative_error}")

# رسم الدالتين الأصلية وتقريب تايلور
x_vals = np.linspace(-2, 2, 400)
y_actual = [sp.sin(val) for val in x_vals]
y_taylor = [taylor_expansion.subs(x, val) for val in x_vals]

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(x_vals, y_actual, label='sin(x)', color='blue')
plt.plot(x_vals, y_taylor, label=f'Taylor Approximation (n={n})', linestyle='dashed',
color='red')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.legend()
plt.title("Taylor Series Approximation vs. Actual Function")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.grid()
```

امتحان نصفي تحليل عددي الزمن: 90 دقيقة	جامعة مصراتة كليـــة الهندســة القسم العام	أستاذ المقرر مصطفى إدريس أبورويص

يرجى الإجابة عن جميع الأسئلة، مع الحرص على الاختصار والتركيز على ما يفيد في فهم وحل الأسئلة النظرية.

السؤال الأول (10 درجات)

في العديد من التطبيقات الهندسية، تظهر دوال معقدة يصعب تكاملها تحليليًا. هنا، يلجأ المهندسون إلى تقريب هذه الدوال بـــكثيرات حدود بسيطة تسهل التعامل معها رياضيًا. هذا ما قاله وائل، أحد طلبة مقرر التحليل العددي المجتهدين، حين عرض الفكرة على زملاء له تجاوزوا المقرر سابقا لكنهم لم يستوعبوا منه سوى القليل، حيث حاول إيضاح الأمر لهم من خلال اختبارهم في التالي:

افترض أن لديك الدالة التالية التي تمثل ارتفاع شكل هندسي غير منتظم:

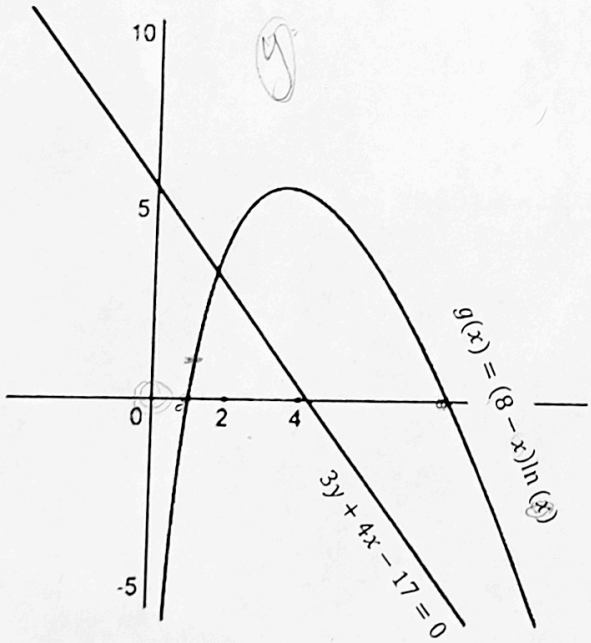
$$h(x) = \frac{1}{2+x} \qquad 0 \le x \le 1$$

أ) باستخدام تقريب ماكلورين للدالة $\frac{1}{1+x}$ أوجد تقريب الدالة $h(x)$ وليكن $P(x)$ (اكتب أول خمسة حدود فقط من المتسلسلة المقربة) ثم أوجد $\int_0^1 P(x)dx$.

ب) احسب تكامل الدالة $h(x)$ باستخدام طريقة سيمبسون على الفترة المعطاة على اعتبار $n = 6$، ثم قارن ناتج التكامل مع تكامل الدالة المقربة في الفقرة السابقة نسبة للقيمة المضبوطة وعلل إجابتك.

كُن مثل وائل، الذي حوّل التعقيد إلى بساطة، واستخدم المعرفة النظرية لخدمة الواقع العملي وأجب ما سبق.

السؤال الثاني (10 درجات)



تخيل أنك تعمل ضـــمن فريق تطوير نظام ملاحة ذكي، يعتمد على نماذج رياضية لتحديد نقاط تقاطع بين مسارات مختلفة. تم إعطاؤك مستقيماً يمثل "المسار المقترح للطائرة"، ومعادلة لمنحنى يمثل مسار الرياح كما هو موضح في الشكل.

أ. من خلال الشكل البياني المرفق، وباستخدام طريقة النقطة الثابتة وبدقة 3 أرقام عشرية حدد نقطة تقاطع المستقيم مع المنحنى.

ب. من خلال الشكل البياني المرفق، وباستخدام طريقة نيوتن رافسون وبدقة ثلاثة أرقام عشرية أوجد أحد جذور معادلة المنحنى.

ج. حدد الشروط اللازمة لتقارب طريقة النقطة الثابتة.

اقلب الورقة

السؤال الثالث (6 درجات)

في عالم الهندسة، كما في الحياة، لا أحد يصل إلى الحل الصحيح من المحاولة الأولى، نبدأ بتخمين، ثم نُحسّنه تدريجيًا، ونتقارب نحو الهدف شيئًا فشيئًا، هذا ما تعلّمه وائل في إحدى محاضراته، حين أدرك أن النجاح لا يأتي دفعة واحدة، بل عبر خطوات صغيرة محسوبة، وهذا بالضبط ما تفعله طريقة جاوس - سيدل: تبدأ بتقدير تقريبي، وتستخدمه لتُحسن التقدير التالي، وهكذا حتى تقترب من الحل. **إذا كان الحل الدقيق لمنظومة المعادلات التالية هو $(1, -2, 1)$،**

$$10x + y - z = 5$$
$$x - 10y - 6z = 3$$
$$x - 2y - 5z = 10$$

أ. هل تعتقد أن هذا النظام يحقّق شرط التقارب لطريقة جاوس-سيدل؟ ما هو هذا الشرط؟

ب. بعد 3 خطوات قارن تقريبك الناتج بالحل الدقيق. هل ترى أن القيم تقترب فعلاً؟ وضح ذلك.

ج. إذا بدّلت ترتيب المعادلات، هل تتوقع أن تتغير سرعة التقارب؟ ولماذا؟

السؤال الرابع (4 درجات)

باستخدام تقريب ماكلورين حتى الدرجة الثانية اوجد:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{-x}}{2x^3 + 1}$$

الوقت المتاح كافٍ تمامًا، مع أطيب التمنيات لكم بالتوفيق والنجاح