

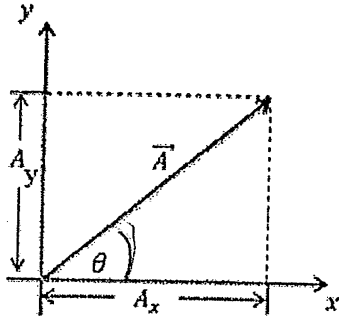
المتجهات

تعريف المتجه: هو كمية لها مقدار واتجاه مثل الإزاحة والسرعة والقوة.....

المتجهات في المستوى $x - y$

يعبر عن المتجه في المستوى $x - y$ بطريقتين:

1- الصورة الكارتيزية (x, y) :



حيث $x = A_x = |\vec{A}| \cos \theta$ ، $y = A_y = |\vec{A}| \sin \theta$

$$\vec{A} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$$

ويمكن كتابته في صورة معادلة اتجاهية

حيث $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ هي متجهات الوحدة في اتجاه المحاور x ، y على الترتيب

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

واتجاهه

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ويكون مقدار المتجه

مثال 1 / احسب مقدار واتجاه المتجه $\vec{A} = 3 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j}$

الحل /

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 53.1^\circ$$

2- الصورة القطبية (r, θ) حيث

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad r = |\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال 2 / من المثال السابق

$$r = 5, \quad \theta = 53.1^\circ \Rightarrow \vec{A} = (5, 53.1^\circ)$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

العلاقة بين التعبير القطبي والتعبير الكارتيزي

تستخدم هذه العلاقة للتحويل من الصورة القطبية إلى الصورة الكارتيزية

$$\vec{A} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}$$

مثال 3 / ضع المتجه $\vec{A} = (2\sqrt{3}, 150^\circ)$ على الصورة الكارتيزية.

الحل /

$$\vec{A} = (2\sqrt{3}, 150^\circ) = 2\sqrt{3} \cos 150^\circ i + 2\sqrt{3} \sin 150^\circ j = -3i + \sqrt{3}j$$

$$e_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

متجه الوحدة : هو متجه مقداره وحدة واتجاهه هو اتجاه المحور الذي يقع عليه

مثال 4 / اذا كان $\vec{A} = 3i - 4j$ أوجد (a) مقدار واتجاه المتجه (b) متجه الوحدة

الحل /

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x} = \tan^{-1} \frac{-4}{3} = -53.1^\circ$$

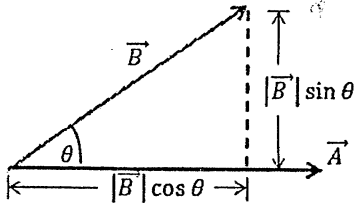
$$\therefore e_A = \frac{3i - 4j}{5} = 0.6i - 0.8j$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1$$

لاحظ

$$0.6i - 0.8j$$

الضرب القياسي (العددي) لمتجهين



إذا كان $\vec{A} = A_x i + A_y j$ و $\vec{B} = B_x i + B_y j$ فإن حاصل الضرب القياسي يعرف على النحو التالي :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 180^\circ$$

ومن التعريف نستنتج أن :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$i \cdot i = j \cdot j = 1, \quad i \cdot j = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2}} = e_A \cdot e_B$$

مثال 5 / إذا كان إذا كان $\vec{A} = 3i - j$ و $\vec{B} = 2i + K j$ أوجد قيمة K التي تجعل المتجهان متعامدان .

الحل /

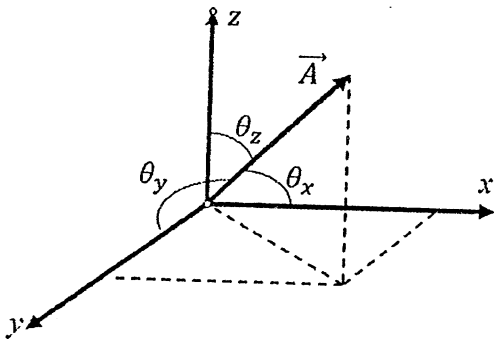
$$\begin{aligned} \because \vec{A} \perp \vec{B} &\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow A_x B_x + A_y B_y = 0 \\ &\Rightarrow (2)(3) + K(-1) = 0 \Rightarrow K = 6 \end{aligned}$$

مثال 6 / أوجد الزاوية بين المتجهين $\vec{A} = 2i + 3j$ و $\vec{B} = i - 2j$

الحل /

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y = (2)(1) + (3)(-2) = -4 \\ |\vec{A}| &= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} , |\vec{B}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{-4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = -0.5 \Rightarrow \theta = 120^\circ$$



المتجهات في المستوى $x-y-z$

تكون على الصورة : $\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$

حيث i, j, k هي متجهات الوحدة في اتجاه المحاور x, y, z علي الترتيب

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

ويكون مقدار المتجه

وللحصول على جيب تمام الزوايا التي يصنعها المتجه مع المحاور نحسب متجه الوحدة

$$e_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x i + A_y j + A_z k}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{|\vec{A}|} i + \frac{A_y}{|\vec{A}|} j + \frac{A_z}{|\vec{A}|} k$$

$$\Rightarrow e_A = \cos \theta_x i + \cos \theta_y j + \cos \theta_z k$$

$$\Rightarrow \cos \theta_x = \frac{A_x}{|\vec{A}|} , \cos \theta_y = \frac{A_y}{|\vec{A}|} , \cos \theta_z = \frac{A_z}{|\vec{A}|} \quad \text{و تكون جيب التمام :}$$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

مثال 7 / أوجد الزوايا التي يصنعها المتجه $\vec{A} = 4i - 4j + 7k$ مع المحاور .
الحل /

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (7)^2} = 9$$

$$e_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{4i - 4j + 7k}{9} = \frac{4}{9}i - \frac{4}{9}j + \frac{7}{9}k$$

$$\therefore \cos \theta_x = \frac{A_x}{|\vec{A}|} \Rightarrow \theta_x = \cos^{-1} \frac{4}{9} = 63.6^\circ$$

$$\cos \theta_y = \frac{A_y}{|\vec{A}|} \Rightarrow \theta_y = \cos^{-1} \frac{-4}{9} = 116.4^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{A_z}{|\vec{A}|} \Rightarrow \theta_z = \cos^{-1} \frac{7}{9} = 38.9^\circ$$

الضرب القياسي (العددي) لمتجهين

إذا كان $\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$ و $\vec{B} = B_x i + B_y j + B_z k$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 180^\circ$$

ومن التعريف نستنتج أن :

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

$$i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

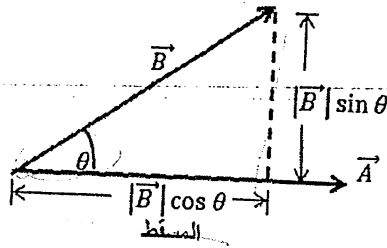
$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = e_A \cdot e_B$$

مثال 8 / أوجد قيمة c التي تجعل المتجهان $\vec{A}$, $\vec{B}$ متعامدان حيث

$$\vec{A} = 2i + cj + k \quad ; \quad \vec{B} = 4i - 2j - 2ck$$

الحل /

$$\begin{aligned} \therefore \vec{A} \perp \vec{B} &\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow (2)(4) + c(-2) + 1(-2c) = 0 \\ &\Rightarrow 8 - 2c - 2c = 0 \Rightarrow 4c = 8 \Rightarrow c = 2 \end{aligned}$$



مسقط متجه على متجه آخر

$$\vec{B} = B_x i + B_y j + B_z k \quad \text{مسقط المتجه}$$

$$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k \quad \text{على المتجه}$$

يرمز له بالرمز $B)_A$

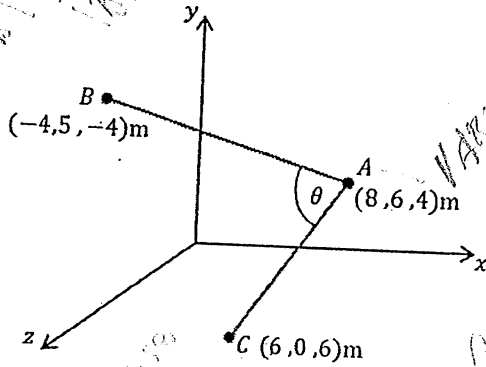
$$\therefore B)_A = |B| \cos \theta = |B| \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{|\vec{B}| |\vec{A}|} = \vec{B} \cdot \vec{e}_A$$

مثال 9 /

من الشكل المقابل

(أ) أوجد الزاوية بين المتجهين $\vec{AC}, \vec{AB}$

(ب) مسقط $\vec{AB}$ على $\vec{AC}$



الحل /

(أ)

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (-4, 5, -4) - (8, 6, 4) = (-12, -1, -8)$$

$$= -12i - j - 8k$$

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (6, 0, 6) - (8, 6, 4) = (-2, -6, 2) = -2i - 6j + 2k$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-12)(-2) + (-1)(-6) + (-8)(2) = 14$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{144 + 1 + 64} = 14.5, \quad |\vec{AC}| = \sqrt{4 + 36 + 4} = 6.6$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{14}{(14.5)(6.6)} = 0.146 \Rightarrow \theta = 81.6^\circ$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|}$$

$$\therefore \vec{AB})_{\vec{AC}} = |\vec{AB}| \cos \theta = 14.5 \cos 81.6^\circ = 2.12$$

حل آخر

$$\therefore \vec{AB})_{\vec{AC}} = \vec{AB} \cdot \vec{e}_{AC} = (-12i - j - 8k) \cdot \left(\frac{-2i - 6j + 2k}{6.6} \right)$$

$$= (-12i - j - 8k) \cdot (-0.303i - 0.909j + 0.303k) = 2.12$$

$$|\vec{AB}| \cos \theta$$

$$|\vec{AB}| \cdot \vec{e}_{AC}$$

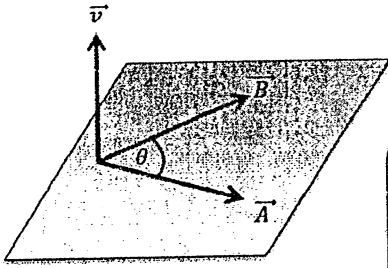
$$(-2 + 48)i + (-72 - 2)j + (-24 + 16)k$$

$$46i - 70j + 8k$$

الضرب الاتجاهي للمتجهات

حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$ و $\vec{B} = B_x i + B_y j + B_z k$ هو متجه آخر $\vec{v}$ عمودي على مستويهما.

ويعرف الضرب الاتجاهي كالتالي:



$$\vec{v} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} = (A_y B_z - A_z B_y)i - (A_x B_z - A_z B_x)j + (A_x B_y - A_y B_x)k$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

ملاحظات هامة:

$$1 - i \times i = 0 \quad j \times j = 0 \quad k \times k = 0 \quad i \times j = k \quad j \times k = i \quad k \times i = j$$

$$2 - \vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$$

$$3 - \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$$4 - (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} \neq \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

$$5 - |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

$$6 - \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$(A_y B_z - A_z B_y)i - (A_x B_z - A_z B_x)j + (A_x B_y - A_y B_x)k$$

مثال 10/ إذا كان $\vec{A} = 20i - 40k$ ، $\vec{B} = 2i + 2j + 2k$ أوجد $(\vec{A} \times \vec{B})$

الحل /

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 20 & 0 & -40 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (0 + 80)i - (40 + 80)j + (40 - 0)k$$

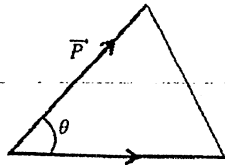
$$= 80i - 120j + 40k$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 20 & 0 & -40 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (0 + 80)i - (40 + 80)j + (40 - 0)k$$

$$= 80i - 120j + 40k$$

مثال 11 / أثبت أن مساحة المثلث

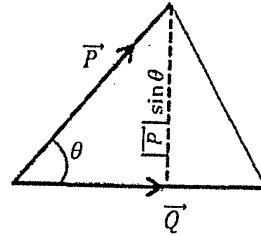


$$A = \frac{1}{2} |\vec{P} \times \vec{Q}|$$

$$\frac{1}{2} |\vec{P}| |\vec{Q}| \sin(\theta)$$

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 8$$

الحل /



$$\therefore A = \frac{1}{2} (\text{القاعدة}) \times (\text{الارتفاع})$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{Q}| |\vec{P}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{P} \times \vec{Q}|$$

مثال 12 / احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه النقط $C(6, 0, 6)$, $B(-4, 5, -4)$, $A(8, 6, 4)$

$B - A$

AB

AC

(الابعاد بالمتر)

الحل / من المثال 9

$$\vec{AB} = -12i - j - 8k, \vec{AC} = -2i - 6j + 2k$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -12 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 50i + 40j + 70k$$

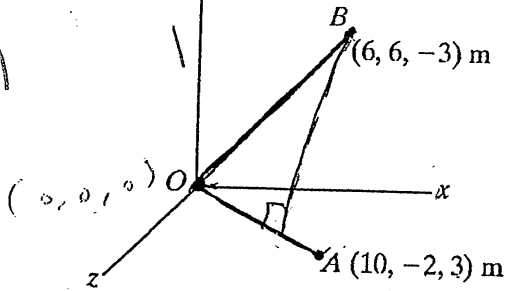
$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(50)^2 + (40)^2 + (70)^2} = \sqrt{9000} = 30\sqrt{10} \text{ m}^2$$

$$\therefore A = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \times 30\sqrt{10} = 15\sqrt{10} \text{ m}^2$$

$|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

مثال 13 / من الشكل اوجد اقصر مسافة من النقطة B إلى الخط

$\frac{1}{2}$



$$|\vec{OA} \times \vec{OB}| = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \theta$$

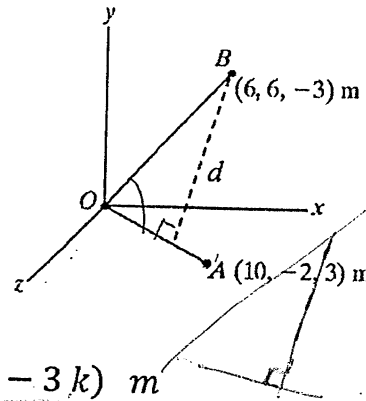
$$\frac{|\vec{OA} \times \vec{OB}|}{|\vec{OA}|} = |\vec{OB}| \sin \theta = d$$

$$\therefore |\vec{OA} \times \vec{OB}| = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \theta$$

$$\Rightarrow |\vec{OA} \times \vec{OB}| = |\vec{OA}| (d)$$

$$\Rightarrow d = \frac{|\vec{OA} \times \vec{OB}|}{|\vec{OA}|}$$

$$\therefore \vec{OA} = (10i - 2j + 3k) \text{ m}, \vec{OB} = (6i + 6j - 3k) \text{ m}$$



الحل /
مساحة
مربعة

$$5.26 \times 10^4$$

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 10 & -2 & 3 \\ 6 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \{-12i + 48j + 72k \text{ m}^2\}$$

$$|\vec{OA} \times \vec{OB}| = \sqrt{(-12)^2 + (48)^2 + (72)^2} = 87.36 \text{ m}^2$$

$$|\vec{OA}| = \sqrt{(10)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = 10.63 \text{ m}$$

$$d = \frac{87.36}{10.63} = 8.2 \text{ m}$$

$$|\vec{OA} \times \vec{OB}| = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \theta$$

$$= |\vec{OA} \times \vec{OB}| = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \theta$$

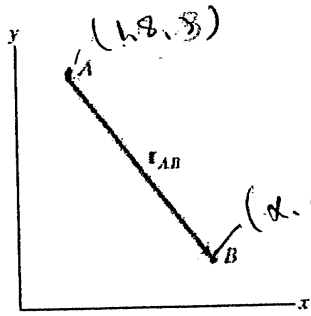
مثال 14 / إذا كان $\vec{W} = 3i + 2k$ ، $\vec{V} = 2i + 7j$ ، $\vec{U} = 6i + 2j - 4k$ أوجد :

$$\vec{W} \cdot (\vec{V} \times \vec{U}) \quad (\text{ب}) \quad \vec{U} \cdot (\vec{V} \times \vec{W}) \quad (\text{ا})$$

الحل /

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} \times \vec{W}) = \begin{vmatrix} U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6(14) - 2(4) + (-4)(-21) = 160$$

$$\vec{W} \cdot (\vec{V} \times \vec{U}) = \begin{vmatrix} W_x & W_y & W_z \\ V_x & V_y & V_z \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 6 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 3(-28) - (0) + 2(4 - 42) = -160$$



مثال 15 / إذا كان إحداثيات النقطة A (1.8, 3) ft وإحداثيات النقطة B

يساوي 0.6 . r_{AB} له نفس اتجاه متجه الوحدة

$$e_{AB} = 0.616i - 0.788j$$

$$r_{AB} = B - A = (x - 1.8)i + (0.6 - 3)j$$

$$= (x - 1.8)i + (-2.4)j = r_x i + r_y j$$

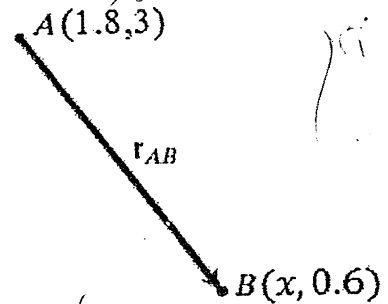
$$e_{r_{AB}} = \frac{r_x}{|r_{AB}|} i + \frac{r_y}{|r_{AB}|} j = 0.616i - 0.788j$$

$$\Rightarrow \frac{r_x}{|r_{AB}|} i + \frac{-2.4}{|r_{AB}|} j = 0.616i - 0.788j$$

$$\Rightarrow \frac{-2.4}{|r_{AB}|} = -0.788 , \frac{r_x}{|r_{AB}|} = 0.616$$

$$\Rightarrow |r_{AB}| = \frac{-2.4}{-0.788} = 3.05 , r_x = 0.616 |r_{AB}| = 0.616 \times 3.05 = 1.88$$

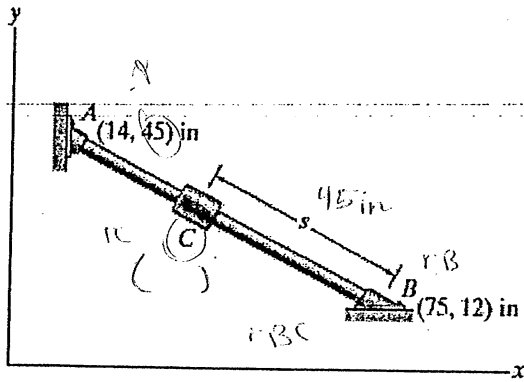
$$\therefore r_{AB} = 1.88i - 2.4j \text{ ft}$$



$$r_{AB} = B - A = r_x i + r_y j$$

$$\frac{r_x}{|r_{AB}|} + \frac{r_y}{|r_{AB}|} = e_{r_{AB}}$$

$$0.616, -0.788$$



مثال 16/ إذا كانت المسافة $s = 45$ in

(أ) احسب متجه الوحدة e_{BA}

(ب) احسب إحداثيات الأسطوانة C.

$$e_{BA} = ?$$

$$\frac{r_{BA}}{|r_{BA}|}$$

الحل /

$$r_{BA} = A - B = (14 - 75)i + (45 - 12)j = -61i + 33j$$

$$|r_{BA}| = \sqrt{(-61)^2 + (33)^2} = 69.35 \text{ in}$$

$$e_{r_{AB}} = \frac{r_{BA}}{|r_{BA}|} = \frac{-61i + 33j}{69.35} = -0.88i + 0.476j$$

$$\because r_C = r_B + r_{BC} = r_B + 45 e_{r_{BC}}$$

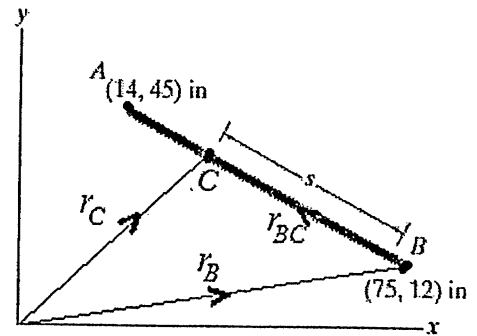
$$= 75i + 12j + 45 e_{r_{BC}}, e_{r_{BC}} = e_{r_{AB}}$$

$$= 75i + 12j + 45(-0.88i + 0.476j)$$

$$= 75i + 12j - 39.6i + 21.42j$$

$$\Rightarrow r_C = 35.4i + 33.42j$$

$\therefore$ إحداثيات النقطة C هي (35.4, 33.42)



مثال 17/ أوجد المتجه $U = U_x i + U_y j + U_z k$ الذي مقداره $|U| = 30$ ، ومركباته $U_y = -2U_x$

$$U_z = 4U_y$$

الحل / $(-2U_x)$

$$\because U = U_x i + U_y j + U_z k, U_y = -2U_x, U_z = -8U_x$$

$$\Rightarrow U = U_x i - 2U_x j - 8U_x k$$

$$\because |U| = \sqrt{(U_x)^2 + (-2U_x)^2 + (-8U_x)^2} = 30$$

$$\Rightarrow U_x^2 + 4U_x^2 + 64U_x^2 = 900$$

$$\Rightarrow 69U_x^2 = 900 \Rightarrow U_x^2 = 13.043$$

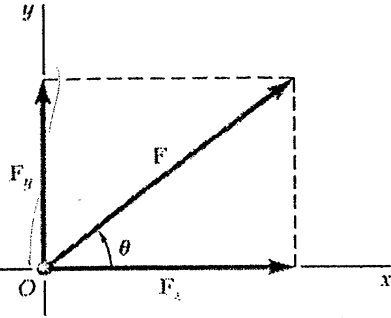
$$\Rightarrow U_x = \pm 3.61 \quad (30^2)$$

$$U_y = -2(\pm 3.61) = \mp 7.22, U_z = -8(\pm 3.61) = \mp 28.88$$

$\therefore$ يوجد متجهان :

$$|U| = 3.61i - 7.22j - 28.88k, U = -3.61i + 7.22j + 28.88k$$

القوى
 $\vec{F} = F_x i + F_y j$



$$\vec{F} = F_x i + F_y j$$

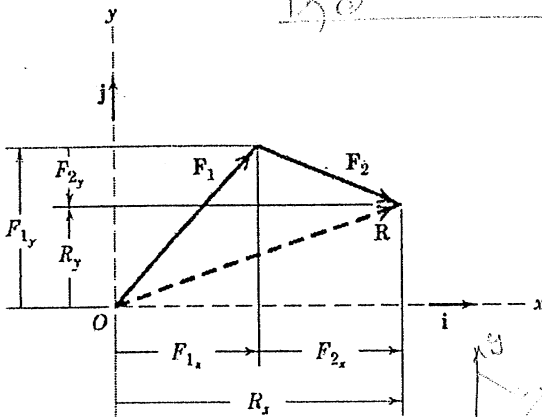
أولاً / نظام القوى في بعدين :
 تكتب القوة F على الصورة

$$F_x = F \cos \theta, F_y = F \sin \theta$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x}$$

محصلة قوتين : يمكن إيجاد محصلة قوتين بطريقتين

(1) التحليل



إذا كانت $\vec{F}_1 = F_{1x} i + F_{1y} j$ و $\vec{F}_2 = F_{2x} i + F_{2y} j$

فإن محصلتهما $\vec{R} = (F_{1x} + F_{2x}) i + (F_{1y} + F_{2y}) j$

$$\vec{R} = R_x i + R_y j$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x}$$

(2) قاعدة متوازي الاضلاع

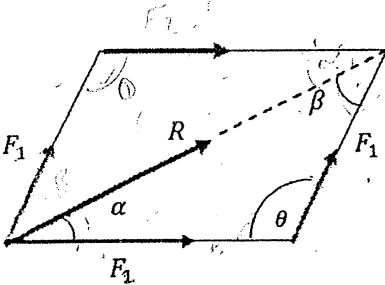
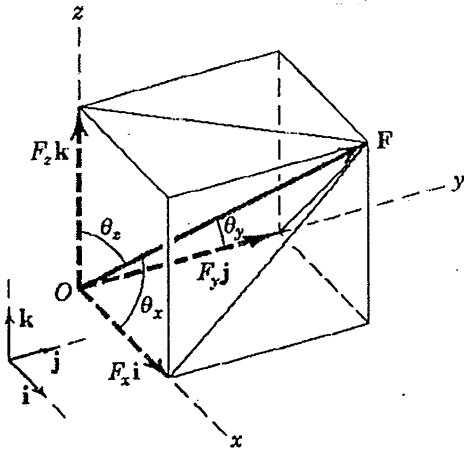
$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos \theta$$

من قاعدة جيب التمام :

و من قاعدة الجيب :

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \theta}$$

ثانياً / نظام القوى في ثلاثة أبعاد :

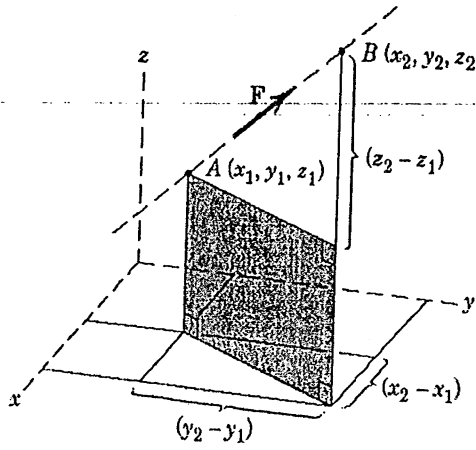


$$\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$F_x = F \cos \theta_x, F_y = F \sin \theta_y, F_z = F \sin \theta_z$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F}, \cos \theta_y = \frac{F_y}{F}, \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$



- كيف تكتب القوة F على صورة $\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$

إذا علمت نقطتين على خط عملها :

نوجد متجه الوحدة للمتجه $\vec{AB}$

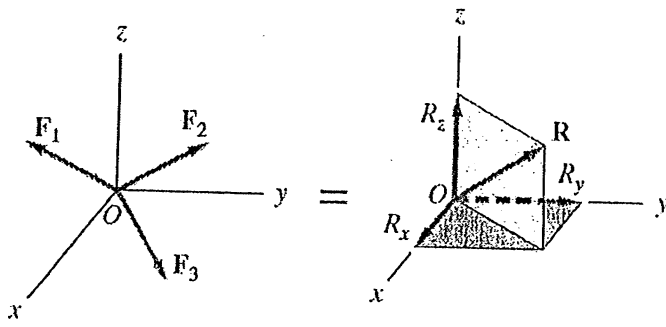
$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{(x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

AB

$$\vec{F} = \lambda_{AB}$$

وتكون

محصلة عدة قوى في المستوى $x-y-z$:



$$\vec{R} = \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$$

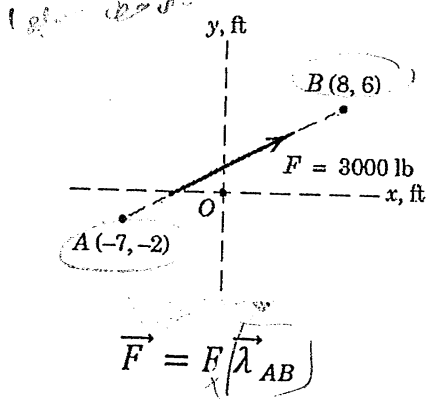
$$\vec{R} = \sum F_x i + \sum F_y j + \sum F_z k$$

$$\vec{R} = R_x i + R_y j + R_z$$

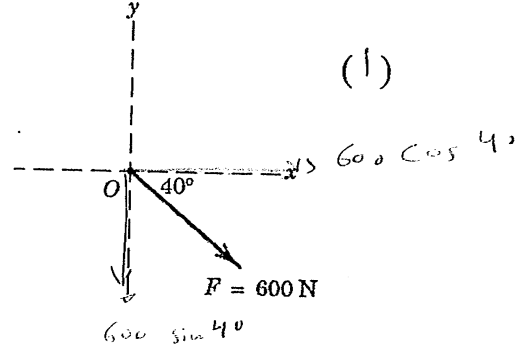
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F}, \cos \theta_y = \frac{F_y}{F}, \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

مثال 1/ في الأشكال الآتية ضع القوة F على الصورة $\vec{F} = F_x i + F_y j$ في هذه الحالة علمت نقطتين



(ب)



(ا)

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = 15i + 8j$$

(ب)

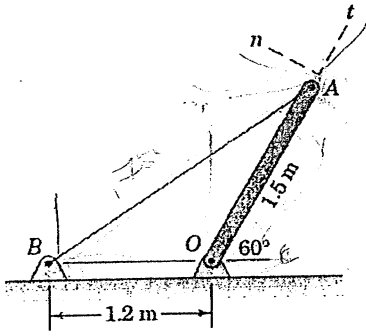
الحل / (ا)

$$\vec{F} = 3000 \left(\frac{15i + 8j}{17} \right)$$

$$\therefore \vec{F} = 2647i + 1411.8j$$

$$\vec{F} = 600 \cos 40 i - 600 \sin 40 j$$

$$\vec{F} = 459.6i - 385.7j$$



مثال 2 / الكابل AB يمنع الذراع OA من الدوران في اتجاه عقارب الساعة حمل المحور O ، فإذا كان الشد في الكابل 750 N .
حلل الشد إلى مركبتين إحداها مماسية T_t والأخرى عمودية T_n عند النقطة A .

الحل /

من المثلث ABC :

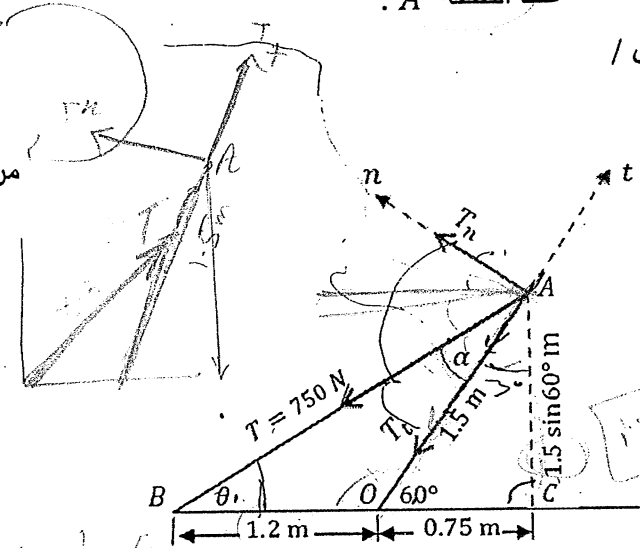
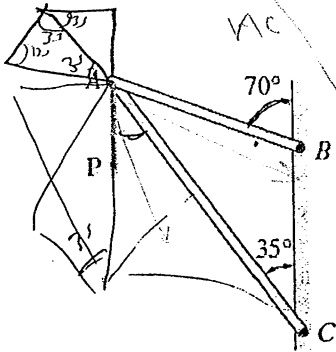
$$\theta = \tan^{-1} \frac{1.5 \sin 60}{1.2 + 0.75} = 33.67^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - (120^\circ + 33.67^\circ) = 26.33^\circ$$

$$\therefore T_t = T \cos \alpha, T_n = T \sin \alpha$$

$$T_t = 750 \cos 26.33 = 672.2 \text{ N}$$

$$T_n = 750 \sin 26.33 = 332.7 \text{ N}$$



مثال 3 / القوة $P = 100 \text{ kN}$ تؤثر في الهيكل المفصلي كما في الشكل .
حلل القوة P إلى مركبتين إحداها موازية للعضو AB والأخرى موازية للعضو AC .

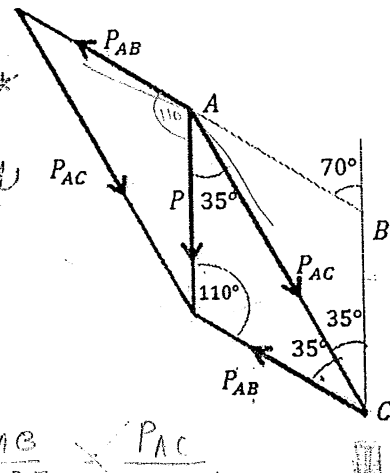
الحل /

$$\frac{P}{\sin 35} = \frac{P_{AC}}{\sin 110} \Rightarrow \frac{P_{AB}}{\sin 35}$$

$$\frac{100}{\sin 35} = \frac{P_{AC}}{\sin 110} \Rightarrow \frac{P_{AB}}{\sin 35}$$

$$P_{AC} = \frac{100 \sin 110}{\sin 35} = 163.8 \text{ kN}$$

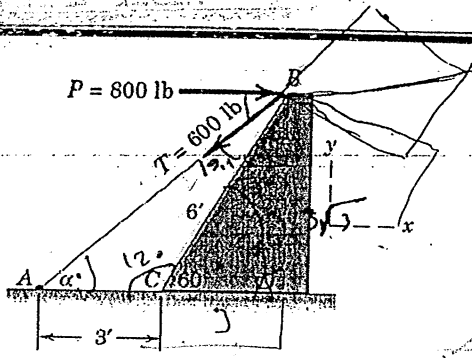
$$P_{AB} = \frac{100 \sin 35}{\sin 35} = 100 \text{ kN}$$



$$\frac{P}{\sin 35} = \frac{P_{AB}}{\sin 35} = \frac{P_{AC}}{\sin 110}$$

$$P^2 = P_{AC}^2 + P_{AB}^2 \Rightarrow P_{AC} = P_{AB} \cos 55$$

Ahmed
Amr
C



مثال 4/ من الشكل أوجد محصلة القوتين

$T = 600 \text{ lb}$ وزاوية ميلها على القوة $P = 800 \text{ lb}$

الحل /

$$CD = 6 \cos 60 = 3, BD = 6 \sin 60 = 3\sqrt{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{3\sqrt{3}}{6} = 40.9^\circ$$

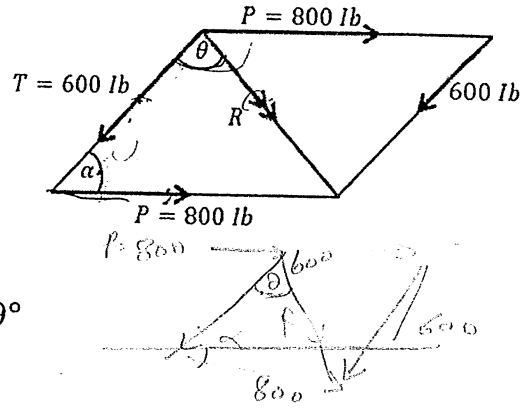
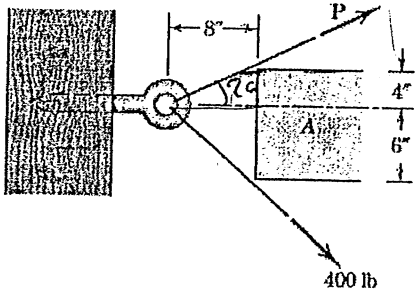
$$\tan^{-1} \frac{BD}{CD} = \tan^{-1} \frac{3\sqrt{3}}{3} = 60^\circ$$

$$R^2 = T^2 + P^2 - 2TP \cos \alpha$$

$$R^2 = 600^2 + 800^2 - 2 \times 600 \times 800 \cos 40.9^\circ$$

$$R = 524 \text{ lb}$$

$$\frac{P}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{800}{\sin \theta} = \frac{524}{\sin 40.9^\circ} \Rightarrow \sin \theta = \frac{800 \sin 40.9^\circ}{524} \Rightarrow \theta = 88.4^\circ$$



مثال 5/ يُراد إزالة المسمار من اللوح الخشبي وذلك باستخدام قوة

محوره الأفقي ولكن العائق A يمنع ذلك ، وإزالة المسمار

بقوتين عن طريق كابلين أحدهما 400 lb والأخرى P

احسب مقدار P اللازمة لضمان أن الشد المتولد موجه على

المسمار ، واحسب مقدار الشد T

الحل /

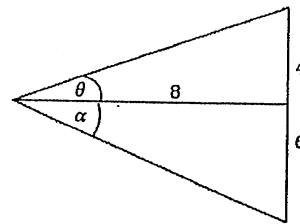
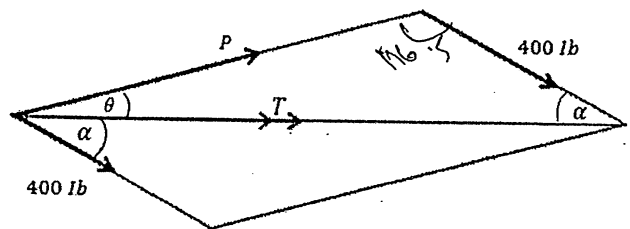
$$\theta = \tan^{-1} \frac{4}{8} = 26.6^\circ, \alpha = \tan^{-1} \frac{6}{8} = 36.9^\circ$$

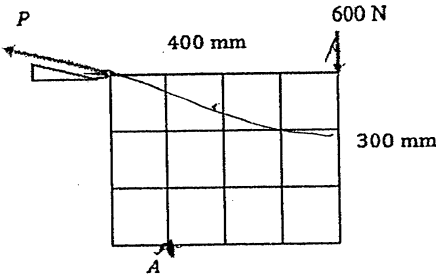
$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{400}{\sin \theta} = \frac{T}{\sin(\theta + \alpha)}$$

$$\frac{P}{\sin 36.9^\circ} = \frac{400}{\sin 26.6^\circ} = \frac{T}{\sin 63.5^\circ}$$

$$P = \frac{400 \sin 36.9^\circ}{\sin 26.6^\circ} = 536.4 \text{ lb}$$

$$T = \frac{400 \sin 63.5^\circ}{\sin 26.6^\circ} = 799.5 \text{ lb}$$





مثال 6/ في الشكل المقابل إذا علمت أن محصلة القوتين P , 600 N تمر بالنقطة A أوجد قيمة أوجد قيمة القوة P والمحصلة.

الحل /

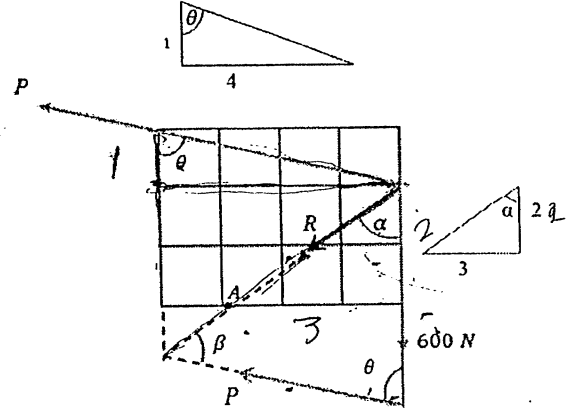
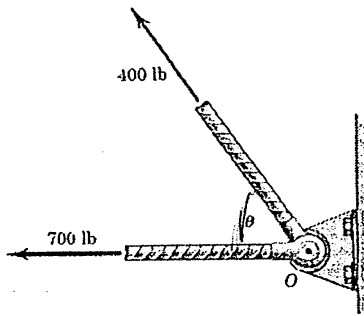
$$\alpha = \tan^{-1} \frac{3}{2} = 56.3^\circ, \theta = \tan^{-1} \frac{4}{1} = 76^\circ$$

$$\beta = 180 - (56.3^\circ + 76^\circ) = 47.7^\circ$$

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \theta} = \frac{600}{\sin \beta}$$

$$\frac{P}{\sin 56.3^\circ} = \frac{R}{\sin 76^\circ} = \frac{600}{\sin 47.7^\circ}$$

$$P = 675\text{ N} , R = 787\text{ N}$$



مثال 7/ بأي زاوية θ تسلط القوة 400 N لكي تساوى محصلة القوتين 1000 N وما هي الزاوية β المحصورة بين R والخط الأفقي في هذه الحالة.

الحل /

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \theta$$

$$1000^2 = 700^2 + 400^2 + 2 (700)(400) \cos \theta$$

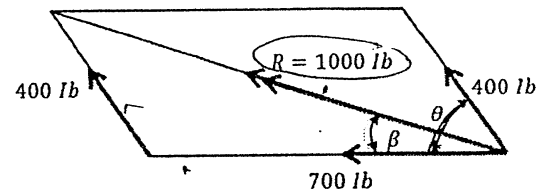
$$10^6 = 49 \times 10^4 + 16 \times 10^4 + 56 \times 10^4 \cos \theta$$

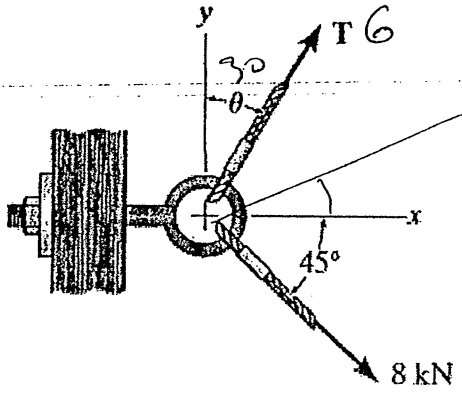
$$100 = 49 + 16 + 56 \cos \theta \Rightarrow 56 \cos \theta = 35$$

$$\Rightarrow \theta = 51.3^\circ$$

$$\therefore \frac{R}{\sin \theta} = \frac{400}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{1000}{\sin 51.3^\circ} = \frac{400}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{400 \sin 51.3^\circ}{1000}$$





مثال 8 / إذا كانت $T = 6 \text{ kN}$ ، $\theta = 30^\circ$ احسب
المحصلة وزاوية ميلها على محور x الموجب

الحل /

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos 75^\circ$$

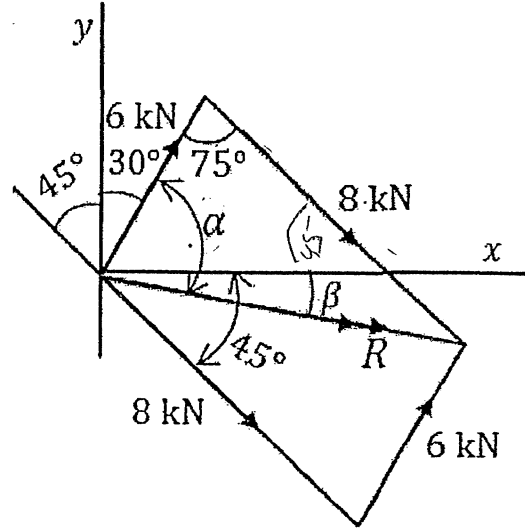
$$R^2 = 6^2 + 8^2 - 2 (6)(8) \cos 75^\circ$$

$$R = 8.669 \text{ kN}$$

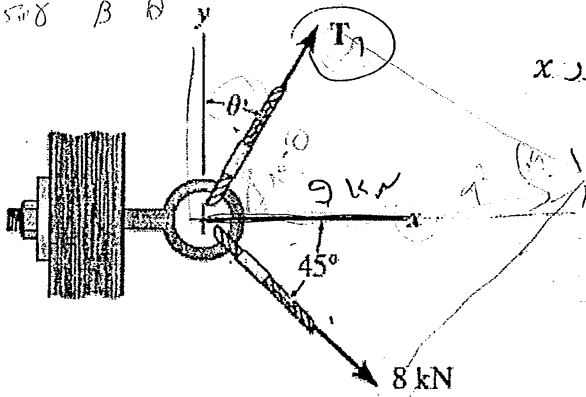
$$\therefore \frac{R}{\sin 75^\circ} = \frac{8}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{8.669}{\sin 75^\circ} = \frac{8}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{8 \sin 75^\circ}{8.669} \Rightarrow \alpha = 63.05^\circ$$

$$\therefore \beta = 63.05^\circ - 60^\circ = 3.05^\circ$$



F_1, F_2, F_3
 $\sin \theta, \beta, \theta$



مثال 9 / إذا كانت محصلة القوى 9 kN وتعمل في اتجاه محور x

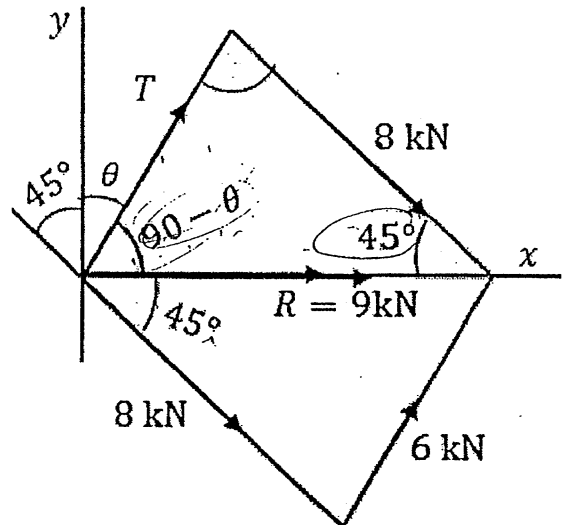
الموجب المحصلة . احسب مقدار القوة T ، θ

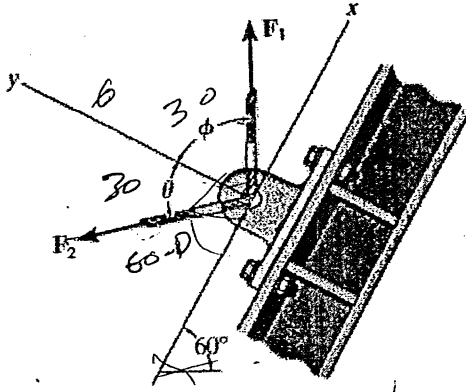
$$T^2 = 9^2 + 8^2 - 2 (9)(8) \cos 45^\circ$$

$$T = 6.571 \text{ kN}$$

$$\therefore \frac{T}{\sin 45^\circ} = \frac{8}{\sin(90 - \theta)} \Rightarrow \frac{6.571}{\sin 45^\circ} = \frac{8}{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{8 \sin 45^\circ}{6.571} \Rightarrow \theta = 30.6^\circ$$





مثال 10/ إذا كانت $\phi = 30^\circ$ ومحصلة القوى 6 kN وتعمل في

اتجاه محور y الموجب . احسب مقدار

القوة F_1 ، F_2 إذا كانت F_2 أصغر ما يمكن

الحل /

$$\frac{F_1}{\sin \theta} = \frac{F_2}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin(\theta + 30^\circ)}$$

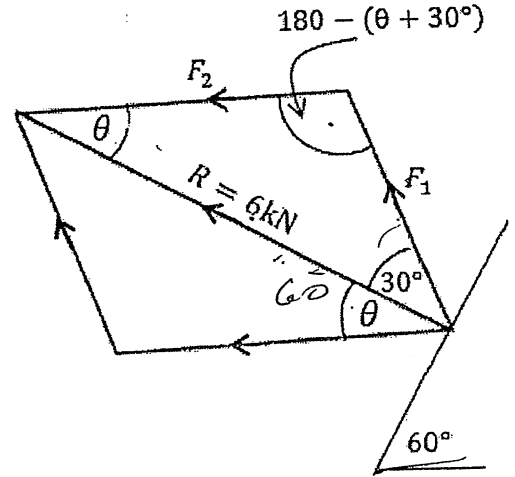
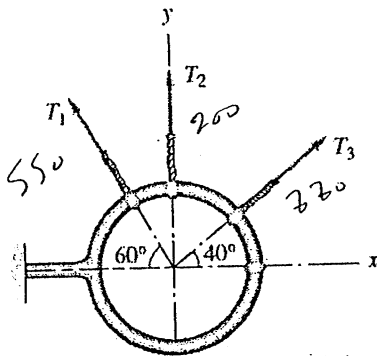
$$\Rightarrow F_2 = \frac{6 \sin 30^\circ}{\sin(\theta + 30^\circ)}$$

F_2 تكون أصغر ما يمكن عندما $\sin(\theta + 30^\circ)$ أكبر ما يمكن

$$\sin(\theta + 30^\circ) = 1 \Rightarrow \theta + 30^\circ = 90^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{6 \sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = 3 \text{ kN}$$

$$\frac{F_1}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\sin 30^\circ} \Rightarrow F_1 = \frac{3 \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = 3\sqrt{3} \text{ kN}$$



مثال 11/ في الشكل المقابل إذا كانت $T_2 = 200 \text{ N}$, $T_1 = 550 \text{ N}$, $T_3 = 750 \text{ N}$ أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى .

الحل /

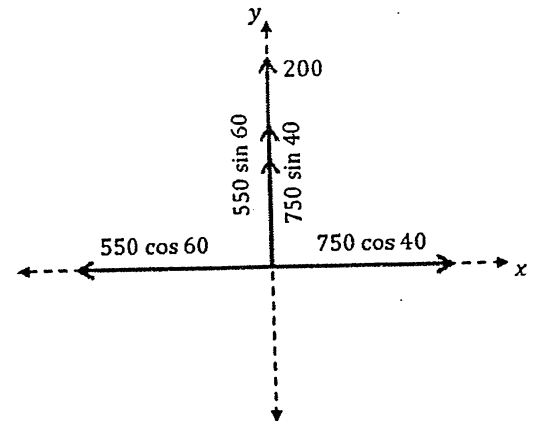
$$\sum F_x = 750 \cos 40 - 550 \cos 60 = 299.5 \text{ N}$$

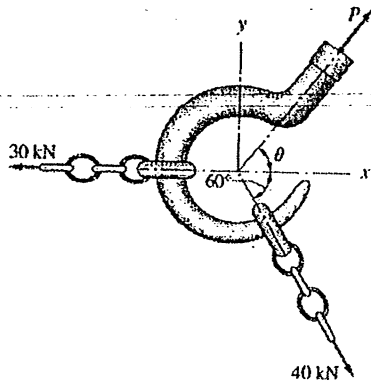
$$\sum F_y = 200 + 750 \sin 40 + 550 \sin 60 = 1158.4 \text{ N}$$

$$\vec{R} = 299.5 i + 1158.4 j$$

$$R = \sqrt{(299.4)^2 + (1158.4)^2} = 1196.5 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1158.4}{299.4} = 75.5^\circ$$





مثال 12 / من الشكل المقابل احسب P و θ إذا كانت محصلة القوى الثلاث

تساوي $\vec{R} = (85i + 20j) \text{ kN}$

الحل /

$$\sum F_x = R_x \Rightarrow P \cos \theta + 40 \cos 60 - 30 = 85$$

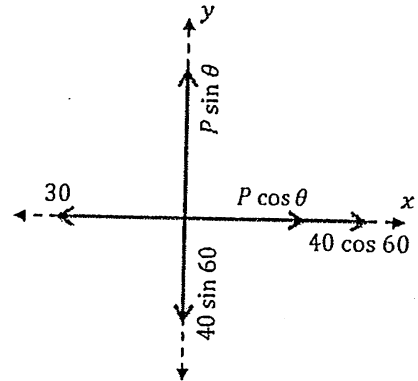
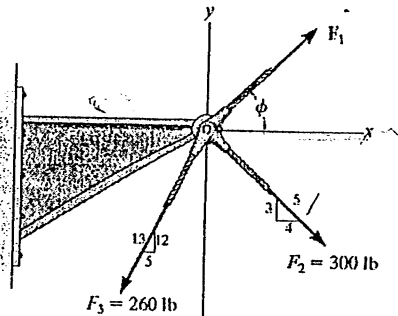
$$\Rightarrow P \cos \theta = 95 \quad \text{1}$$

$$\sum F_y = R_y \Rightarrow P \sin \theta - 40 \sin 60 = 20$$

$$\Rightarrow P \sin \theta = 54.64 \quad \text{2}$$

بقسمة المعادلة 2 على 1 : $\tan \theta = \frac{54.64}{95} \Rightarrow \theta = 29.9^\circ$

$$\Rightarrow P = \frac{95}{\cos 29.9} = 109.6 \text{ kN}$$



مثال 13 / في الشكل المقابل إذا كانت محصلة القوى الثلاث 400 lb

وتعمل في الاتجاه الموجب للمحور x احسب قيمة F_1 و ϕ .

الحل /

$$\sum F_x = R_x \Rightarrow \sum F_x = 400$$

$$\Rightarrow F_1 \cos \phi + 300 \left(\frac{4}{5}\right) - 260 \left(\frac{5}{13}\right) = 400$$

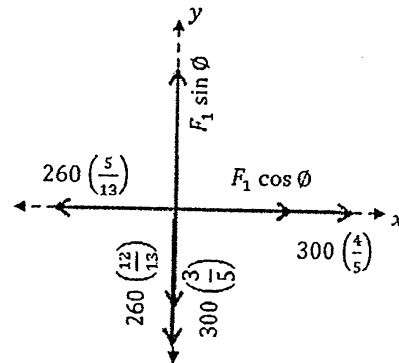
$$\Rightarrow F_1 \cos \phi = 260 \quad \text{①}$$

$$\sum F_y = R_y \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 \sin \phi - 260 \left(\frac{12}{13}\right) - 300 \left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$\Rightarrow F_1 \sin \phi = 420 \quad \text{②}$$

بقسمة المعادلة 2 على 1 : $\tan \phi = \frac{420}{260} \Rightarrow \phi = 58.2^\circ$

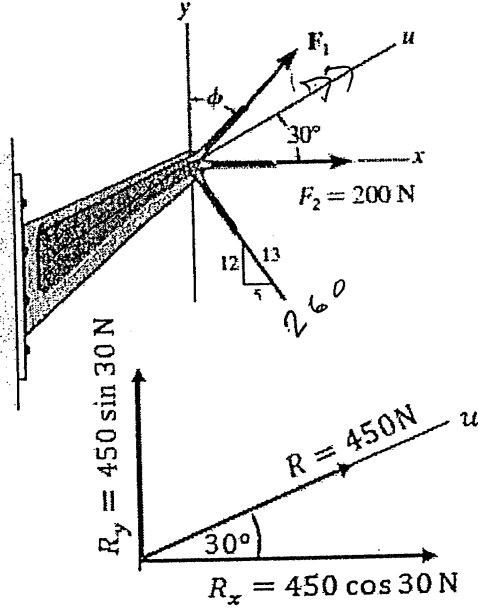
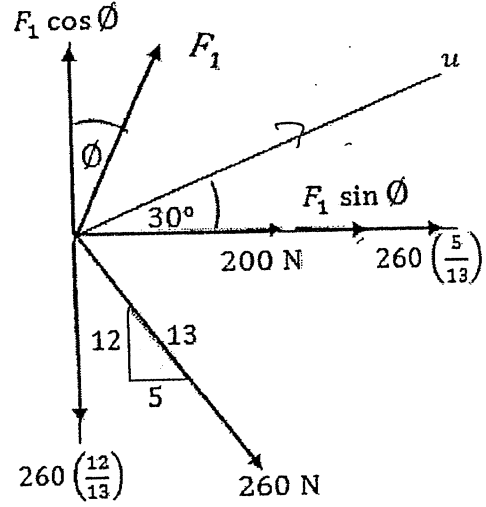
$$\Rightarrow F_1 = \frac{260}{\cos 58.2} = 494 \text{ lb}$$



مثال 14/ إذا كان محصلة القوى 450N تؤثر في الاتجاه الموجب

للمحور u احسب مقدار القوة F_1 ، الزاوية ϕ .

الحل /

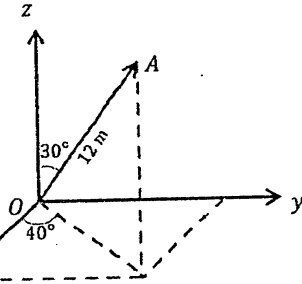


$$R_x = \sum F_x : 450 \cos 30 = 200 + 260\left(\frac{5}{13}\right) + F_1 \sin \phi \Rightarrow F_1 \sin \phi = 89.71 \dots \dots \dots (1)$$

$$R_y = \sum F_y : 450 \sin 30 = F_1 \cos \phi - 260\left(\frac{12}{13}\right) \Rightarrow F_1 \cos \phi = 465 \dots \dots \dots (2)$$

بحل المعادلتين بالقسمة :

$$\tan \phi = \frac{89.71}{465} \Rightarrow \phi = 10.9^\circ \Rightarrow F_1 = 474 \text{ N}$$

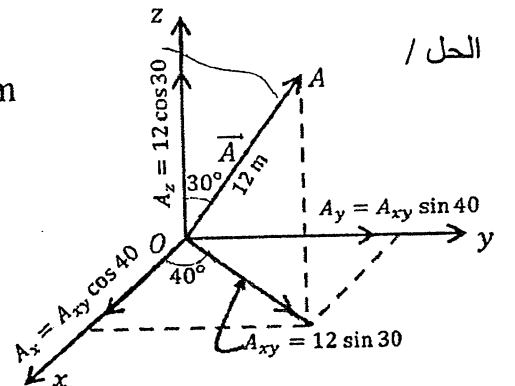


مثال 15/ من الشكل المقابل :

(أ) اكتب المتجه $\vec{A}$ على صورة معادلة اتجاهية .

(ب) الزوايا التي يصنعها المتجه مع المحاور .

الحل /



$$\therefore A_{xy} = 12 \sin 30 = 6 \text{ m} , A_z = 12 \cos 30 = 10.4 \text{ m}$$

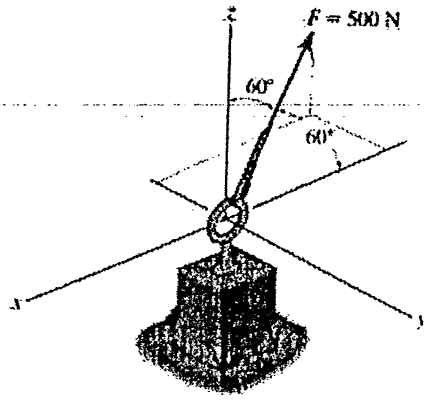
$$A_x = A_{xy} \cos 40 = 6 \cos 40 = 4.6 \text{ m}$$

$$A_y = A_{xy} \sin 40 = 6 \sin 40 = 3.9 \text{ m}$$

$$\vec{A} = 4.6 i + 3.9 j + 10.4 k \quad \text{m}$$

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{A_x}{A} = \cos^{-1} \frac{4.6}{12} = 67.5^\circ$$

$$\theta_y = \cos^{-1} \frac{A_y}{A} = \theta_y = \cos^{-1} \frac{3.9}{12} = 71^\circ , \theta_z = \cos^{-1} \frac{A_z}{A} = \cos^{-1} \frac{10.4}{12} = 30^\circ$$



مثال 16/ من الشكل المقابل اكتب القوة F على الصورة

$$\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$$

الحل /

$$\theta_x = 120^\circ, \theta_y = ?, \theta_z = 60^\circ, \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

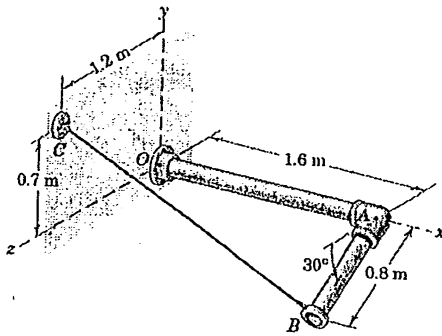
$$\cos^2 120 + \cos^2 \theta_y + \cos^2 60 = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta_y = 0.5$$

$$\Rightarrow \cos \theta_y = \pm \sqrt{0.5} \Rightarrow \theta_y = 45^\circ \text{ or } 135^\circ$$

وبالنظر للشكل θ_y منفرجة لذلك نقبل 135° ونفرض 45°

$$\therefore \vec{F} = F (\cos \theta_x i + \cos \theta_y j + \cos \theta_z k)$$

$$\vec{F} = 500 (\cos 120^\circ i + \cos 135^\circ j + \cos 60^\circ k) \quad N = -250 i - 353.6 j + 250 k$$



مثال 17/ في الشكل المقابل الكابل يتحمل شداً قدره 750 N
اكتب القوة المؤثرة في B كمتجه .

الحل /

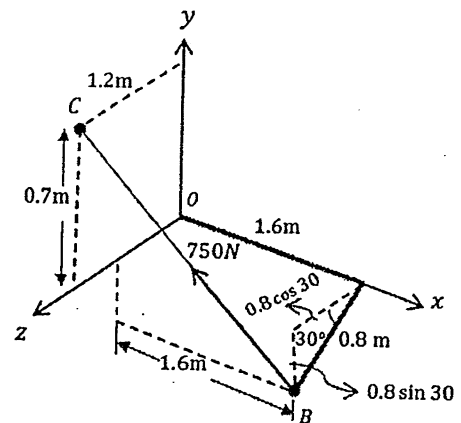
$$C(0, 0.7, 1.2)$$

$$B(1.6, -0.8 \sin 30, 0.8 \cos 30) = (1.6, -0.4, 0.69)$$

$$\vec{BC} = C - B = -1.6 i + 1.1 j + 0.51 k$$

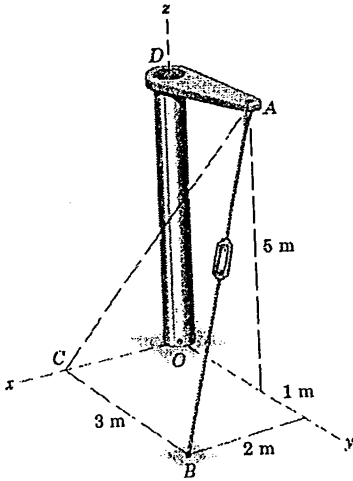
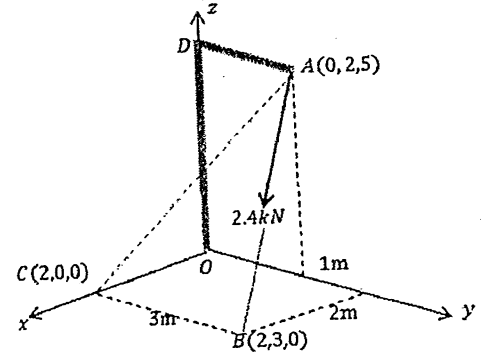
$$\vec{T} = 750 \vec{\lambda}_{BC} = 750 \left(\frac{-1.6 i + 1.1 j + 0.51 k}{2.01} \right)$$

$$\vec{T} = -597 i + 410 j + 190.3 k \quad N$$



مثال 18/ يسلط الكابل على العتلة AD قوة شد مقدارها 2.4 kN في اتجاه AB. أوجد متجه قوة الشد ومسقطها على الخط AC.

الحل/



$$\vec{AB} = B - A = 2i + j - 5k$$

$$\vec{F} = 2.4 \vec{\lambda}_{BC} = 2.4 \left(\frac{2i + j - 5k}{\sqrt{30}} \right)$$

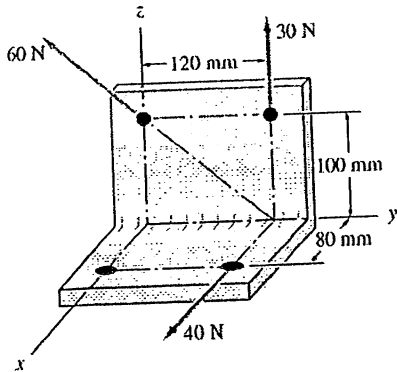
$$= 0.88i + 0.44j - 2.19k$$

$$\vec{AC} = C - A = 2i - 2j - 5k$$

$$\Rightarrow \vec{\lambda}_{AC} = 0.35i - 0.35j - 0.87k$$

$$\therefore (F)_{AC} = \vec{F} \cdot \vec{\lambda}_{AC} = (0.88)(0.35) + (0.44)(-0.35) + (-2.19)(-0.87) = 2.1 \text{ N}$$

مثال 19/ من الشكل المقابل احسب محصلة القوى الثلاث وزوايا ميلها على المحاور.



$$\vec{F}_1 = 30k, \vec{F}_2 = 40i$$

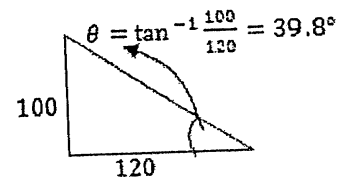
$$\vec{F}_3 = -60 \cos 39.8^\circ j + 60 \sin 39.8^\circ k = -46.1j + 38.4k$$

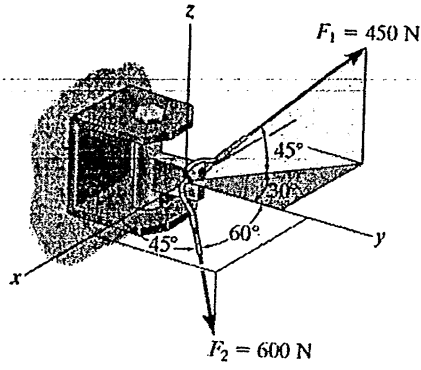
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 40i - 46.1j + 68.4k$$

$$R = \sqrt{40^2 + 46.1^2 + 68.4^2} = 91.7 \text{ N}$$

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{40}{91.7} = 64.1^\circ, \theta_y = \cos^{-1} \frac{46.1}{91.7} = 59.8^\circ, \theta_z = \cos^{-1} \frac{68.4}{91.7} = 41.8^\circ$$

الحل/





مثال 20 / من الشكل المقابل احسب محصلة القوى الثلاث وزوايا ميلها على المحاور .

الحل /

القوة F_1 :

$$F_z = 450 \sin 45 = 318.2 \text{ N}$$

$$F_{xy} = 450 \cos 45 = 318.2 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F_x = -318.2 \sin 30 = -159.1 \text{ N}, \quad F_y = 318.2 \cos 30 = 275.6 \text{ N}$$

$$\therefore F_1 = (-159.1 i + 275.6 j + 318.2 k) \text{ N}$$

القوة F_2 :

$$\therefore \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \Rightarrow \cos \theta_z = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_x - \cos^2 \theta_y}$$

$$\Rightarrow \cos \theta_z = \pm \sqrt{1 - \cos^2 45 - \cos^2 60} = \pm 0.5$$

$$\Rightarrow \theta_z = \cos^{-1} -0.5 = 120^\circ$$

$$\therefore F_2 = 600 (\cos 45 i + \cos 60 j + \cos 120 k) = (424.3 i + 300 j - 300 k) \text{ N}$$

المحصلة :

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (265.2 i + 575.6 j + 18.2 k) \text{ N}$$

$$R = \sqrt{265.2^2 + 575.6^2 + 18.2^2} = 634 \text{ N}$$

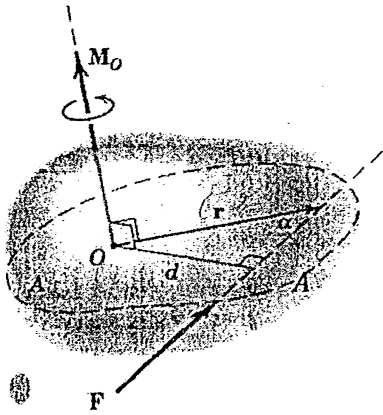
زوايا ميل المحصلة مع المحاور :

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{265.2}{634} = 65.3^\circ, \quad \theta_y = \cos^{-1} \frac{575.6}{634} = 24.8^\circ$$

$$\theta_z = \cos^{-1} \frac{18.2}{634} = 88.4^\circ$$

العزم

أولاً : العزم في بعدين



عزم قوة حول نقطة : عزم قوة $\vec{F}$ حول نقطة O هو مقدرة هذه القوة

على إحداث دوران للجسم حول تلك النقطة

لتكن A أي نقطة على خط عمل القوة $\vec{F}$ ، متجه موضع $\vec{r}$

بالنسبة للنقطة O ، وبما أن المتجهين $\vec{r}$ ، $\vec{F}$ واقعان في مستوى

القوى فإن عزم القوة $\vec{F}$ حول النقطة O يعرف على أنه الكمية المتجه

$\vec{r} \times \vec{F}$ ويكون عمودياً على هذا المستوى

العزم $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

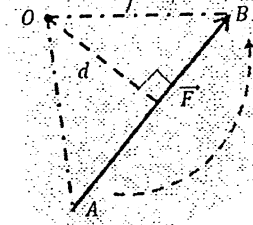
المتجه

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\therefore |\vec{M}_O| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{F}| |\vec{r}| \sin \alpha , d = |\vec{r}| \sin \alpha , |\vec{F}| = F$$

$$\Rightarrow M_O = F \times d$$

$$|\vec{F} \times \vec{r}| = F \times r \times \sin \alpha$$



وحدة العزم = وحدة القوة $\times$ وحدة المسافة = $N \cdot m$ ، $kN \cdot m$ في نظام SI

وحيث أن العزم كمية متجهة فإننا سنعتبر العزم موجباً إذا كان الدوران في اتجاه

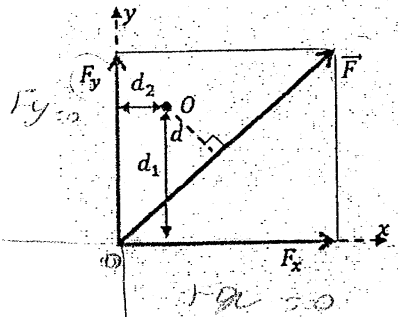
ضد عقارب الساعة وسالباً إذا كان الدوران في اتجاه مع عقارب الساعة .

ملاحظة : العزم يساوي عددياً ضعف مساحة المثلث الذي قاعدته القوة F وارتفاعه d

$$2 \times \frac{1}{2} \times F \times d = F \times d$$

نظرية : عزم قوة حول نقطة يساوي المجموع الجبري لعزمي مركبتها

حول نفس النقطة .

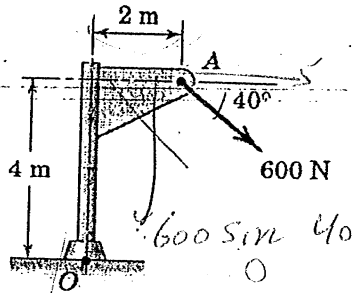


$$F \times d = F_x \times d_1 + F_y \times d_2$$

$$F \times d = F_x \times d_1 + F_y \times d_2$$

نتيجة : عزم قوة حول نقطة على خط عملها يساوي صفر

لأن ذراع العزم $d = 0$



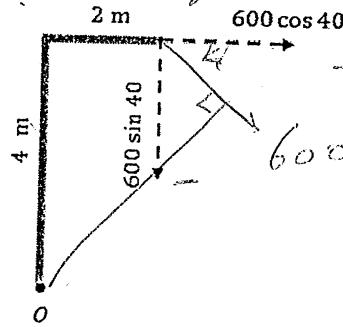
مثال 1/ احسب مقدار عزم القوة 600 N حول النقطة O .

بطريقتين مختلفتين .

$$600 \cos 40 (4) + 600 \sin 40 (2)$$

الحل /

الطريقة الأولى :



$$M_o = F_x \times d_1 + F_y \times d_2$$

$$M_o = -600 \cos 40 (4) - 600 \sin 40 (2)$$

$$= -2610 \text{ Nm}$$

$$M_o = 2610 \text{ Nm} \quad \text{بإشارة}$$

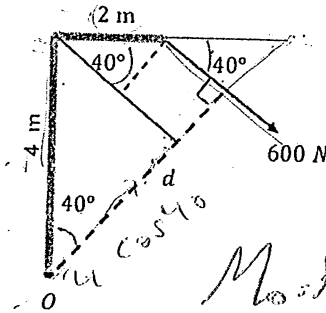
$$d = 4 \cos 40 + 2 \sin 40 = 4.35 \text{ m}$$

$$M_o = F \times d = -600 \times 4.35$$

$$= -2610 \text{ Nm}$$

$$M_o = 2610 \text{ Nm} \quad \text{بإشارة}$$

الطريقة الثانية :

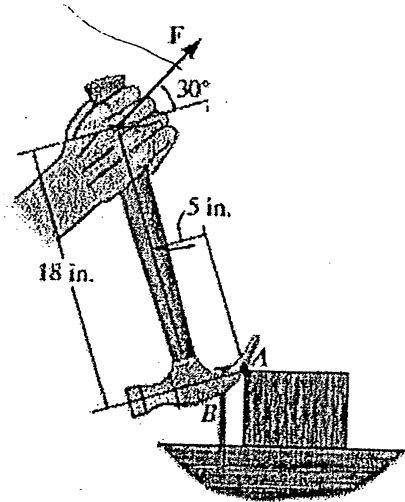
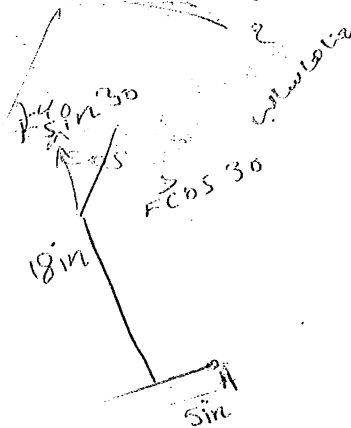


$$M_o = F \cdot d$$

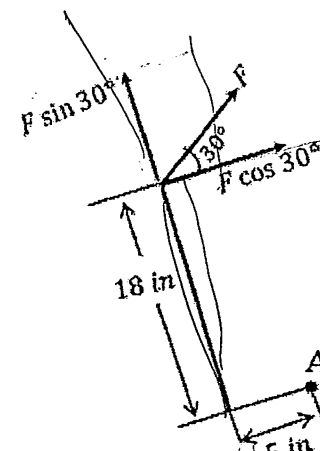
مثال 2/ من أجل سحب المسمار يجب أن تنتج القوة F عزماً قدره

500 lb.in تقريباً في اتجاه عقارب الساعة حول النقطة A .

احسب قيمة F .



الحل /



$$\sum M_A = -500 : -F \cos 30^\circ (18) - F \sin 30^\circ (5) = -500$$

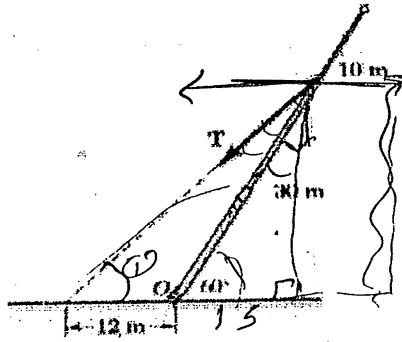
$$F(\cos 30^\circ (18) + \sin 30^\circ (5)) = 500$$

$$F = 27.6 \text{ lb}$$

$$-500 = -F \cos 30 (18) - F \sin 30 (5)$$

مثال 3/ لرفع سارية علم من الوضع الموضح يجب أن يقدم الشد

في الكبل عزماً حول النقطة O قدره 72 kN.m .



$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{30 \sin 60}{27} \right) = 43.9^\circ$$

$$\alpha = 90 - (30 + 43.9) = 16.1^\circ$$

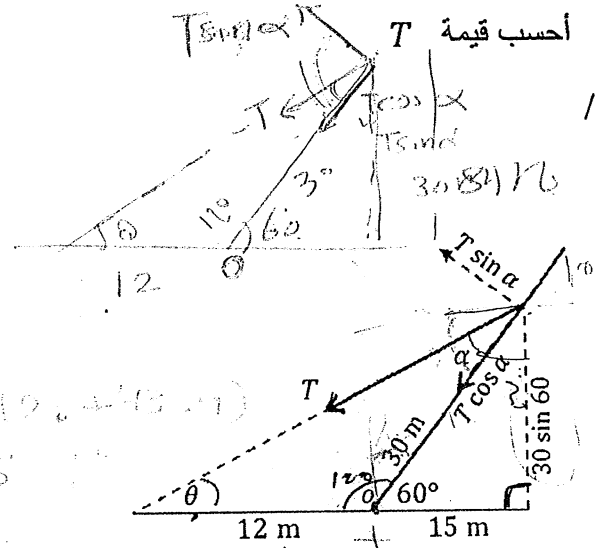
$$M_o = 72 \text{ kN}$$

$$72 = T \sin 16.1 (30)$$

$$T = \frac{72}{8.32} = 8.65 \text{ kN}$$

أحسب قيمة T

الحل /



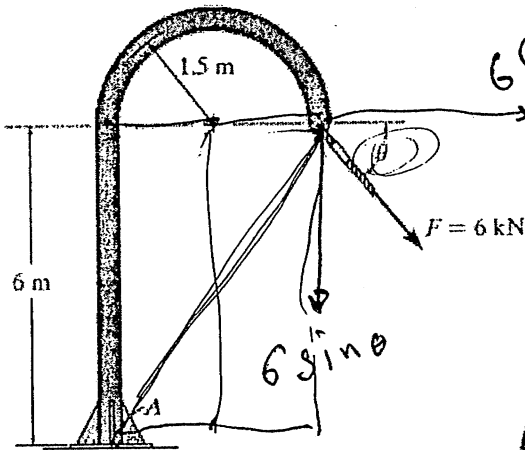
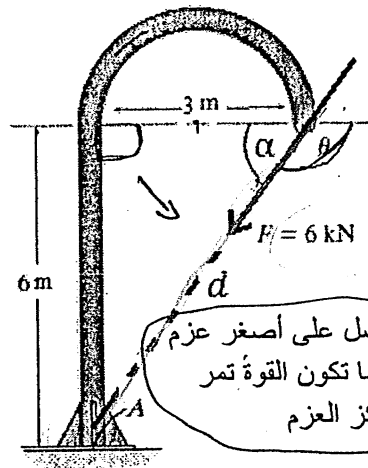
مثال 4/ احسب الزاوية θ حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ التي

تجعل للقوة F

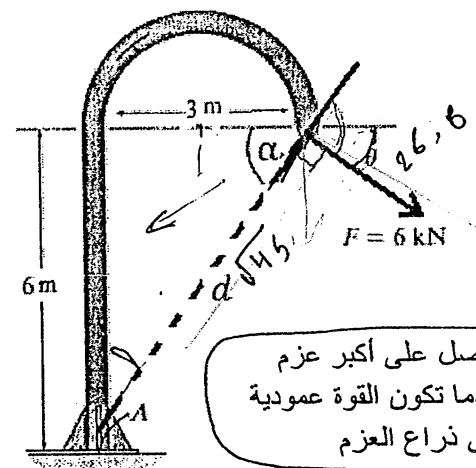
(a) أكبر عزم حول النقطة A (b) أصغر عزم حول النقطة A

وما مقدار العزم في كل حالة.

الحل /



نحصل على أصغر عزم عندما تكون القوة تمر بمركز العزم

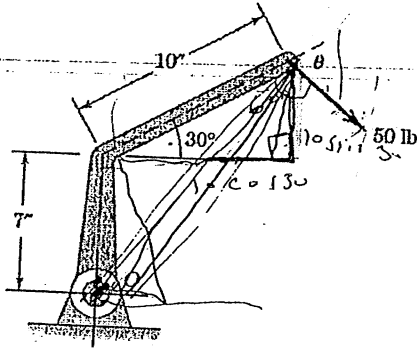


نحصل على أكبر عزم عندما تكون القوة عمودية على ذراع العزم

$$AC = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} \text{ m}, \alpha = \tan^{-1} \frac{6}{3} = 63.43^\circ$$

$$a) \theta = 90 - 63.43^\circ = 26.6^\circ \Rightarrow M_{\max} = 6(\sqrt{45}) = 18\sqrt{5} \text{ N.m}$$

$$b) \theta = 180 - 63.43^\circ = 116.6^\circ \Rightarrow M_{\min} = 0$$



مثال 5/ احسب الزاوية θ التي تجعل للقوة 50 lb

(أ) أكبر عزم حول النقطة O . (ب) أصغر عزم حول النقطة O .
وما مقدار العزم في كل حالة

$$OA = \sqrt{12^2 + 8.66^2} = 14.8$$

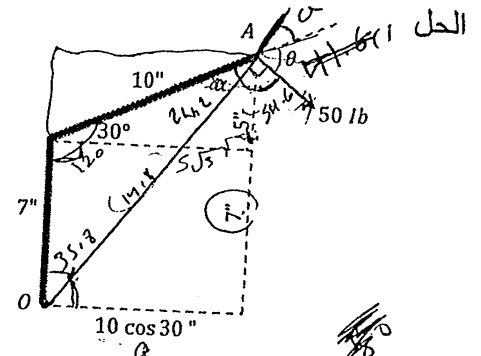
$$\therefore \frac{7}{\sin \alpha} = \frac{14.8}{\sin 120} \Rightarrow \alpha = 24.2^\circ$$

$$\theta = 90^\circ - 24.2^\circ = 65.8^\circ$$

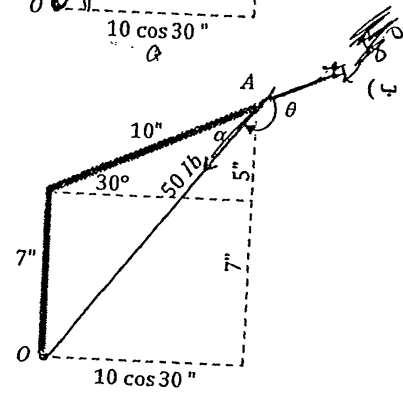
$$M_O(\max) = 50 \times 14.8 = 740 \text{ lb.in } \cup$$

$$\theta = 180^\circ - 24.2^\circ = 155.8^\circ$$

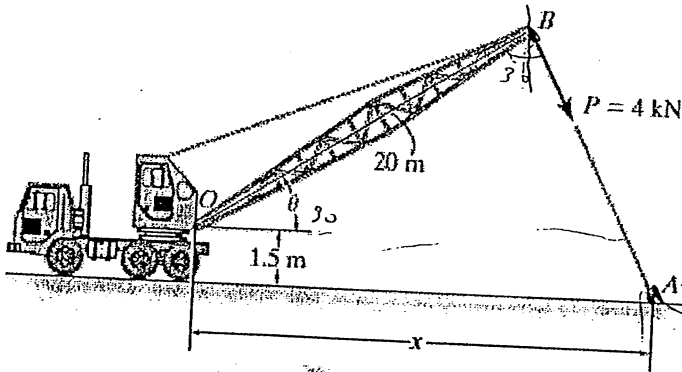
$$M_O(\min) = 0$$



(أ)



(ب)



مثال 6/ من الشكل إذا كان $\theta = 30^\circ$ أوجد قيمة x

التي تجعل للقوة P أكبر عزم عند النقطة O

وما قيمة العزم .

الحل /

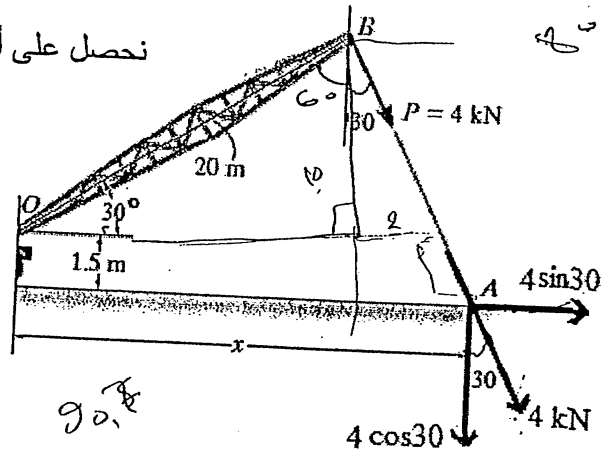
نحصل على أكبر عزم عند O عندما تكون عمودية على OB

$$M_O(\max) = P \times d = 4 \times 20 = 80 \text{ kN.m}$$

$$\therefore M_O = 4 \sin 30 (1.5) - 4 \cos 30 (x)$$

$$\Rightarrow 80 = 4 \sin 30 (1.5) - 4 \cos 30 (x)$$

$$\Rightarrow x = 24 \text{ m}$$



النظرية العامة للعزوم :

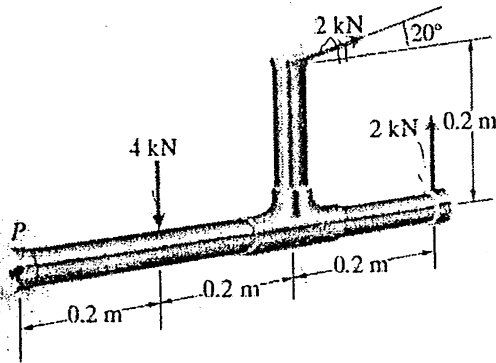
((المجموع الجبري لعزوم عدة قوى حول نقطة ثابتة

يساوي عزم محصلتهم حول نفس النقطة))

$$F \times d = F_1 \times d_1 + F_2 \times d_2 + \dots + F_n \times d_n$$

نتيجة : إذا كان المجموع الجبري لعزوم عدة قوى مستوية حول نقطة في مسووم يساوي صفر

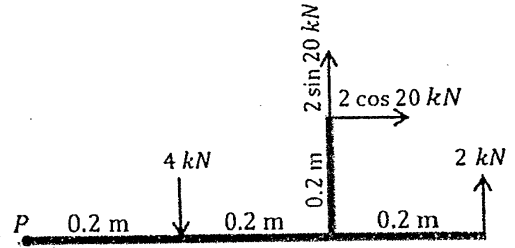
فإنه إما أن تكون مجموعة القوى متزنة ($R = 0$) أو أن خط عمل المحصلة يمر بنفس النقطة .



مثال 7 / احسب مجموع عزوم القوى الثلاث حول النقطة p

الحل /

$$\begin{aligned} \sum M_P &= -4(0.2) + 2(0.6) - 2 \cos 20^\circ (0.2) \\ &\quad + 2 \sin 20^\circ (0.4) \\ &= 0.298 \text{ kN.m} \end{aligned}$$



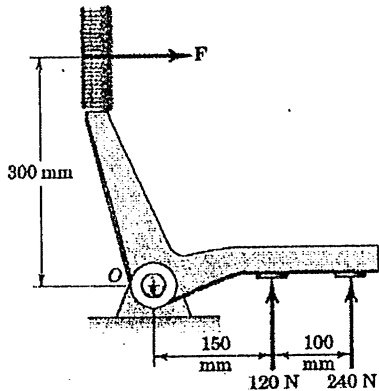
مثال 8 / أوجد قيمة F المؤثرة على المقبض والتي تجعل محصلة

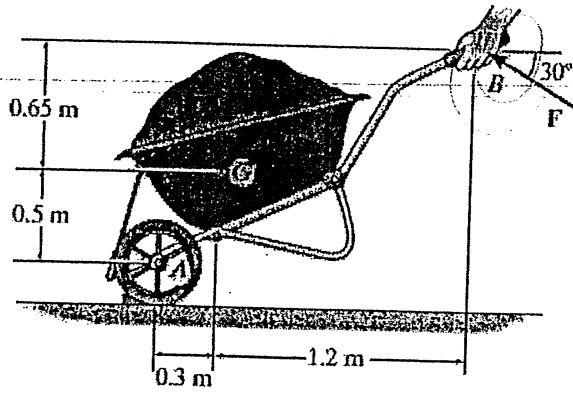
القوى الثلاثة تمر من النقطة O .

الحل / بما أن المحصلة تمر بالنقطة O $\Leftrightarrow \sum M_O = 0$

$$-F(0.3) + 120(0.15) + 240(0.25) = 0$$

$$F = 260 \text{ N}$$



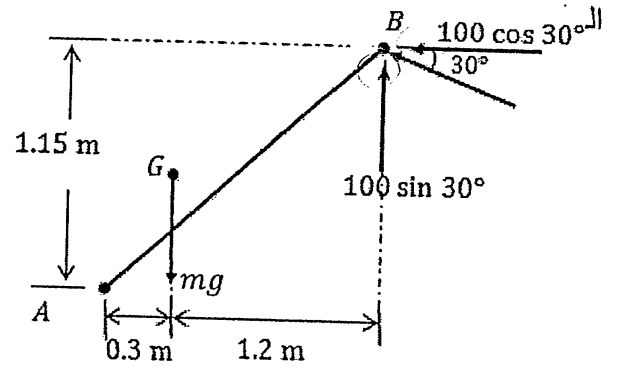


مثال 9/ العربة ومحتوياتها لها مركز كتلة عند G

إذا كانت $F = 100 \text{ N}$ والعزم المحصل الناتج من الوزن

والقوة F عند محور العجلة A يساوي صفر .

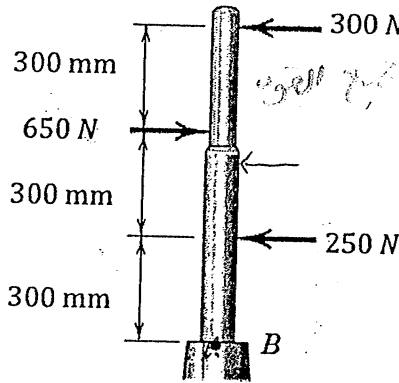
احسب كتلة العربة ومحتوياتها



$$\sum M_A = 0$$

$$100 \cos 30^\circ (1.15) + 100 \sin 30^\circ (1.5) - m \times 9.81(0.3) = 0$$

$$\Rightarrow m = 59.3 \text{ kg}$$



مثال 10/ أوجد الارتفاع h من القاعدة B الى نقطة عمل المحصلة .

الحل /

$$R = 650 - 250 - 300 = 100 \text{ N}$$

نفرض أن النقطة B تبعد عن المحصلة مسافة h

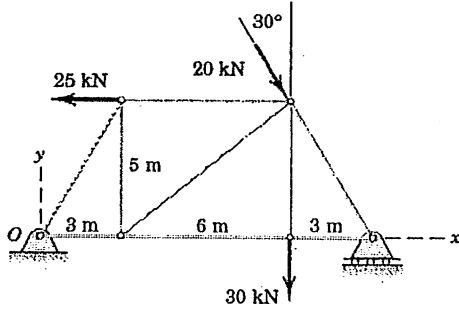
$$\sum M_B = 250 (0.3) - 650 (0.6) + 300 (0.9)$$

مجموع عزوم القوى حول B = عزم المحصلة حول B

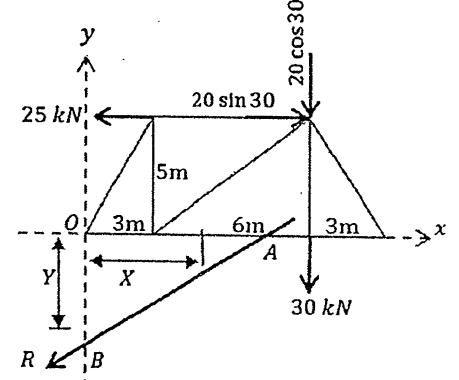
$$R \cdot d = \sum M_B$$

$$100 h = -45 \Rightarrow h = 0.45 \text{ m}$$

مثال 11 / أوجد محصلة القوى الثلاث المؤثرة على الجمالون وحدد موقع تأثيرها على كل من المحور x, y .



الحل /



$$R_x = 20 \sin 30 - 25 = -15 \text{ kN}$$

$$R_y = -20 \cos 30 - 30 = -47.3 \text{ kN}$$

$$\vec{R} = -15 \mathbf{i} - 47.3 \mathbf{j} \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{(-15)^2 + (-47.3)^2} = 49.6 \text{ kN}, \theta = \tan^{-1} \frac{-47.3}{-15} = 252.4^\circ$$

$$\begin{aligned} \sum M_O &= 25(5) - 20 \sin 30 (5) - 30(9) - 20 \cos 30 (9) \\ &= -350.9 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

$$R_y \cdot d = \sum M_O \Rightarrow -47.3 (X) = -350.9 \Rightarrow A = (7.42, 0)$$

$$R_x \cdot d = \sum M_O \Rightarrow -15 (Y) = -350.9 \Rightarrow B = (0, -23.4)$$

$$\vec{R} = -15 \mathbf{i} - 47.3 \mathbf{j} \text{ kN}$$

$$\vec{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$$

$$\vec{r} \times \vec{R} = M_O$$

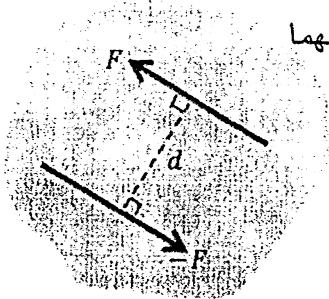
$$(x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) \times (-15 \mathbf{i} - 47.3 \mathbf{j}) = -350.9$$

$$-47.3x + 15y = -350.9 \text{ : معادلة خط المحصلة}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 7.42 \Rightarrow A(7.42, 0)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -23.4 \Rightarrow B(0, -23.4)$$

حل آخر:



الازدواج : هو عبارة عن قوتين متساويتين مقداراً ومتضادين اتجاهاً وخطى عملهما

ليس على استقامة واحدة

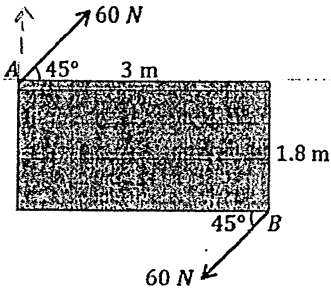
عزم الازدواج = إحدى قوتيها $\times$ المسافة العمودية بينهما

$$M = F \times d$$

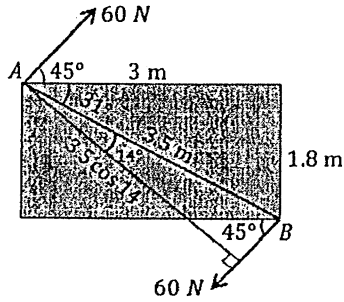
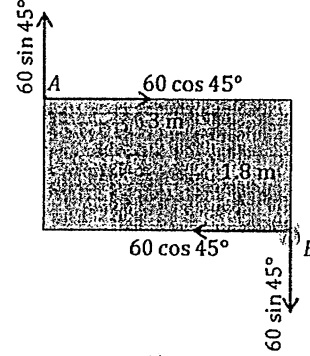
ملاحظة : محصلة قوتي الازدواج = صفر

ملاحظة : المجموع الجبري لعزمي قوتي الازدواج حول أي نقطة يساوي مقدار ثابت .

مثال 12/ احسب المجموع الجبري لعزمي القوتين بطريقتين مختلفتين .



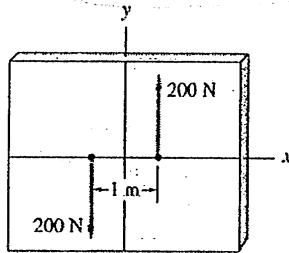
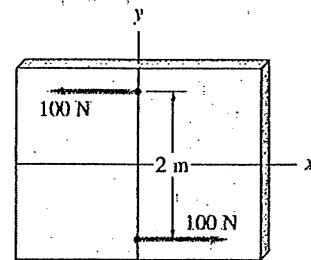
الحل /



$$M = F \times d \quad \therefore \text{القوتان يكونان ازدواجاً} \quad \sum M_B = -60 \cos 45 (1.8) - 60 \sin 45 (3) \\ \therefore M = -60 \times 3.498 \cos 14 = -203.64 \text{ N.m} \quad \cup \quad = -203.6 \text{ N.m} = 203.65 \text{ N.m} \quad \cup$$

الازدواجان المتكافئان: هما ازدواجان متساويان في العزم مقداراً ولهما نفس الاتجاه .

فمثلاً :



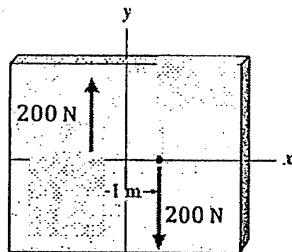
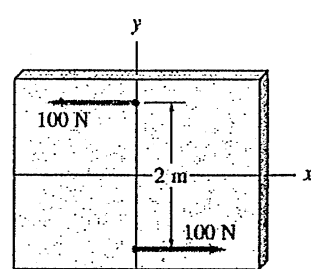
$$M_2 = 200 \times 1 = 200 \text{ N.m} \quad \curvearrowright$$

$$M_1 = 100 \times 2 = 200 \text{ N.m} \quad \curvearrowright$$

ازدواجان متكافئان لأنهما متساويان في العزم مقداراً ولهما نفس الاتجاه

الازدواجان المتوازنان: هما ازدواجان متساويان في العزم مقداراً ومتضادان في الاتجاه .

فمثلاً :



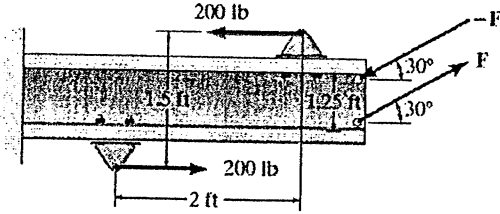
$$M_2 = -200 \times 1 = -200 \text{ N.m} \quad \curvearrowleft$$

$$M_1 = 100 \times 2 = 200 \text{ N.m} \quad \curvearrowright$$

ازدواجان متوازنان لأنهما متساويان في العزم مقداراً ومتضادان في الاتجاه (مجموعهم يساوي صفر)

الازدواج المحصل M_R : هو ازدواج عزمه يساوي مجموع عزوم الازدواجات .
ملاحظة : عزم الازدواج المحصل يساوي مجموع عزوم القوى حول أي نقطة .

مثال 13/ من الشكل المقابل



أ) إذا كانت $F = 139 \text{ lb}$ احسب عزم الازدواج المحصل .
ب) احسب قيمة F إذا كان عزم الازدواج المحصل 500 lb.ft

$$M_R = M_1 + M_2$$

الحل /

$$\therefore M_R = F \times 1.25 \cos 30 + 200 \times 1.5$$

$$M_R = 139 \times 1.25 \cos 30 + 200 \times 1.5 = 450.5 \text{ lb.ft} \quad (أ)$$

$$500 = F \times 1.25 \cos 30 + 200 \times 1.5$$

(ب)

$$\Rightarrow F = 184.8 \text{ lb}$$

طريقة أخرى

$$M_R = M_1 + M_2$$

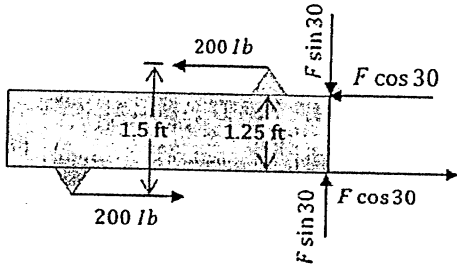
$$\therefore M_R = F \cos 30 \times 1.25 + 200 \times 1.5$$

$$M_R = 139 \cos 30 \times 1.25 + 200 \times 1.5 = 450.5 \text{ lb.ft} \quad (أ)$$

$$500 = F \cos 30 \times 1.25 + 200 \times 1.5$$

(ب)

$$\Rightarrow F = 184.8 \text{ lb}$$



مثال 14/ من الشكل المقابل احسب قيمة d إذا كان عزم الازدواج

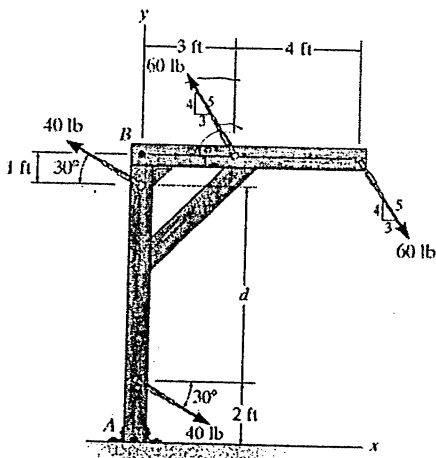
المحصل 55 lb.ft مع عقارب الساعة .

الحل /

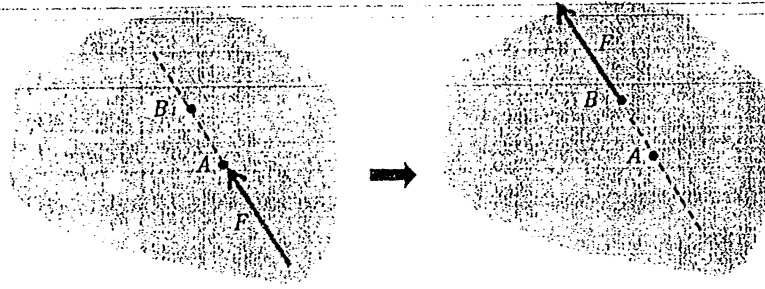
$$M_R = M_1 + M_2$$

$$-55 = -60 \left(\frac{4}{5} \right) \times 4 + 40 \cos 30 \times d$$

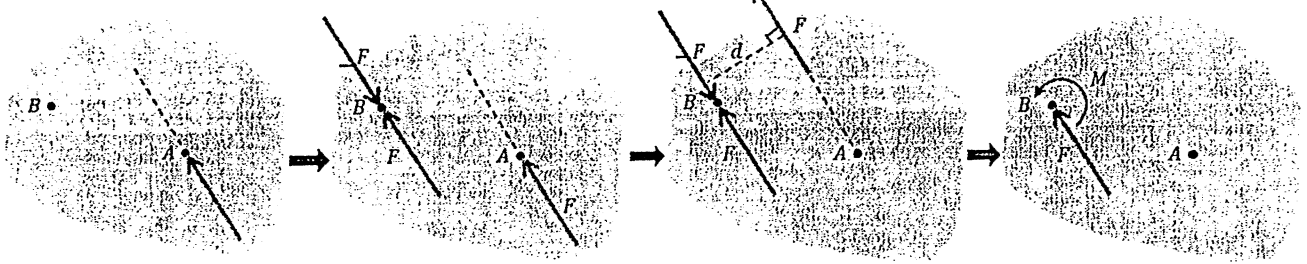
$$\Rightarrow d = 4 \text{ ft}$$



القوة المكافئة لقوة واحدة : إذا ما انتقلت قوة على خط عملها فإنها تنقل بقيمتها واتجاهها فقط.

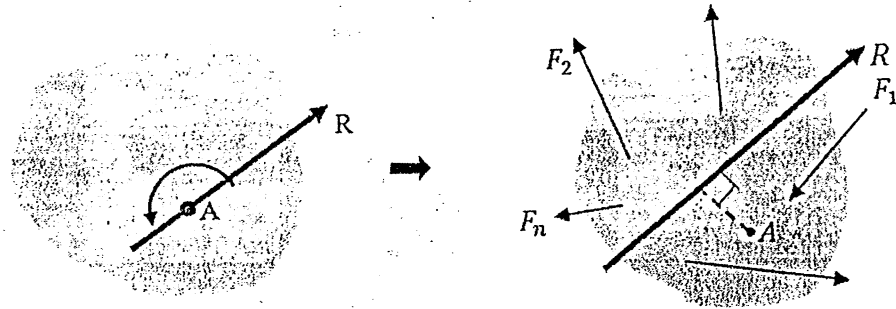


أما إذا نقلت قوة إلى موقع آخر لا ينطبق على خط عملها فإنها تنقل بقوى مكافئة وهي عبارة عن قوة وعزم .



القوى المكافئة لمجموعة من القوى:

إذا كان لدينا مجموعة من القوى $F_1, F_2, \dots, F_n$ تؤثر في جسم صلب يمكننا استبدالهم بقوى مكافئة ما ولتكن A (قوة وحيدة تساوي محصلة هذه القوى وعزم يساوي مجموع عزوم هذه القوى عند النقطة A).



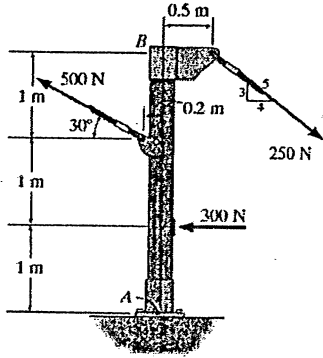
$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad \text{واتجاهها} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

$$[M = M_1 + M_2 + \dots + M_n] \quad \text{مقدار العزم} = \text{مجموع عزوم القوى عند A}$$

مثال 15 / استبدل نظام القوى الثلاث الموضحة بالشكل بقوة واحدة

وعزم ازدواج عند النقطة A .

الحل /



$$\sum F_x = 250 \left(\frac{4}{5} \right) - 500 \cos 30 - 300 = -533.01 N$$

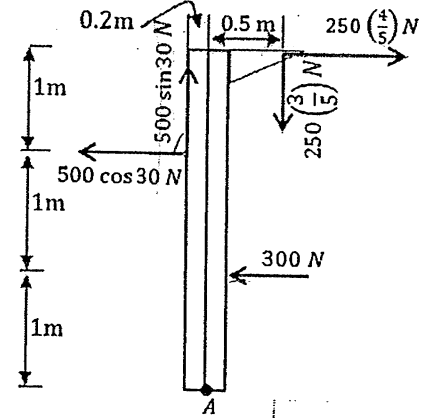
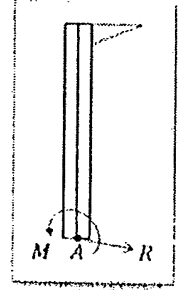
$$\sum F_y = -250 \left(\frac{3}{5} \right) + 500 \cos 30 = 100 N$$

$$R = \sqrt{(533.01)^2 + (100)^2} = 542 N$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = \tan^{-1} \frac{100}{-533.01} = -10.6^\circ$$

$$M = \sum M_A = 500 \cos 30 (2) - 500 \sin 30 (0.2)$$

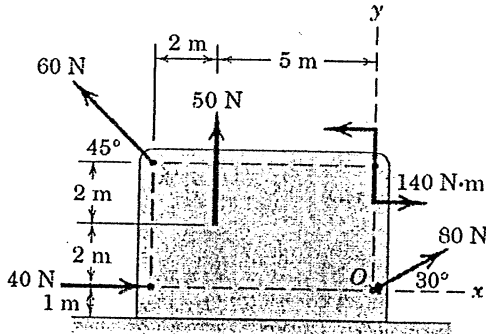
$$- 250 \left(\frac{3}{5} \right) (0.5) - 250 \left(\frac{4}{5} \right) (3) + 300 (1) = 441 N \cdot m$$



مثال 16 / استبدل نظام القوى الموضحة بالشكل بقوة واحدة

وعزم ازدواج عند النقطة O .

الحل /



$$\sum F_x = 40 + 80 \cos 30 - 60 \cos 45 = 66.9 N$$

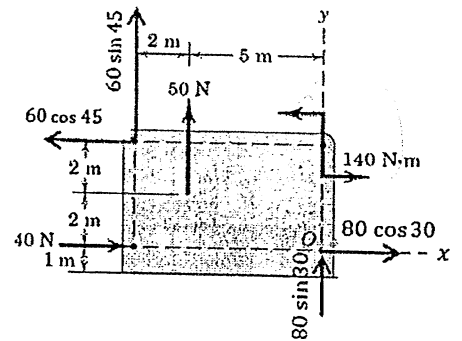
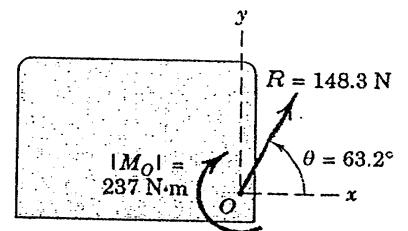
$$\sum F_y = 50 + 80 \sin 30 + 60 \cos 45 = 132.4 N$$

$$R = \sqrt{(66.9)^2 + (132.4)^2} = 148.3 N$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = \tan^{-1} \frac{132.4}{66.9} = 63.2^\circ$$

$$M = \sum M_O = 140 - 50(5) + 60 \cos 45 (4) - 60 \sin 45 (7)$$

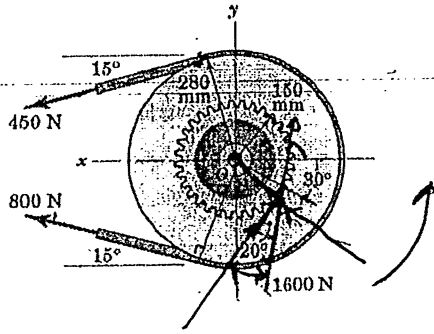
$$= -237 N \cdot m = 237 N \cdot m$$



مثال 17 / استبدل نظام القوى الثلاث الموضحة بالشكل بقوة واحدة

وعزم ازدواج عند النقطة O .

الحل /



$$\sum F_x = 450 \cos 15 + 800 \cos 15 - 1600 \sin 10$$

$$= 929.2 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 800 \sin 15 - 450 \sin 15 + 1600 \cos 10$$

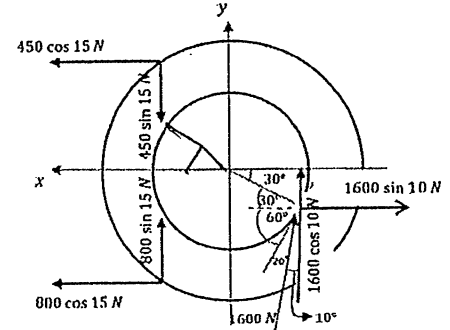
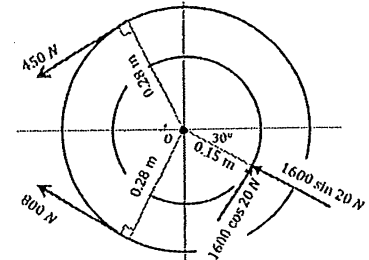
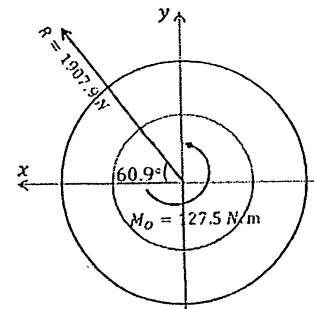
$$= 1666.3 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{(929.2)^2 + (1666.3)^2} = 1907.9 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = \tan^{-1} \frac{1666.3}{929.2} = 60.9^\circ$$

$$M = \sum M_O = 1600 \cos 20 (0.15) + 450(0.28)$$

$$- 800(0.28) = 127.5 \text{ N.m}$$



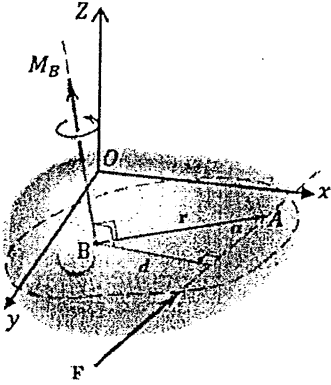
ثانياً / العزوم في ثلاثة أبعاد :

عزم قوة حول نقطة :

لتكن A أي نقطة على خط عمل القوة $\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$

و $\vec{r} = r_x i + r_y j + r_z k$ متجه موضع A بالنسبة للنقطة B

فإن عزم القوة $\vec{F}$ حول النقطة B يعرف كالتالي

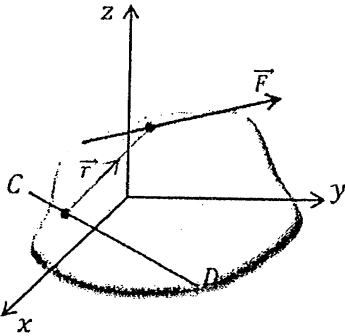


$$\vec{M}_B = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_x i + M_y j + M_z k$$

$$|\vec{M}_B| = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2 + (M_z)^2} \quad , \quad \vec{r} = A - B \quad \text{حيث :}$$

عزم قوة حول محور : لتكن A أي نقطة على خط عمل القوة $\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$

و CD محور . فإن عزم القوة $\vec{F}$ حول المحور CD



$$M_{CD} = \vec{\lambda}_{CD} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

حيث : $\vec{r}$ متجه موضع أي نقطة على خط عمل القوة بالنسبة لأي نقطة على

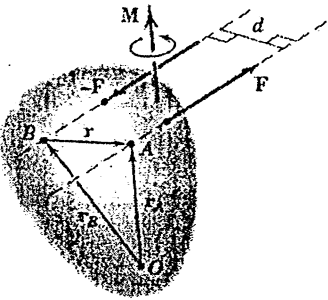
المحور ، $\vec{\lambda}_{CD}$ متجه الوحدة للمحور .

عزم الازدواج : لتكن A ، B نقطتان تقعان على القوتين $\vec{F}$ ، $-\vec{F}$

على الترتيب كما بالشكل . يحسب عزم الازدواج حول النقطة O كالتالي :

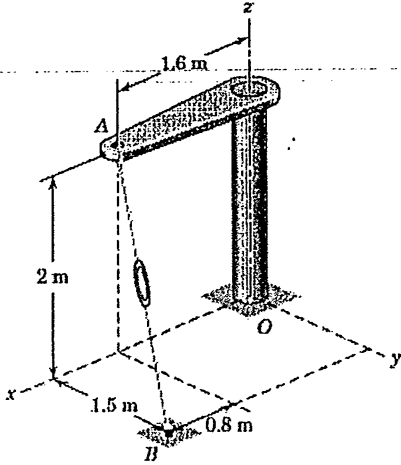
$$M_O = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

$$M_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad , \quad \vec{r} = B - A$$



مثال 18 / يسلط الكابل قوة شد مقدارها 1.2 kN على العتلة في اتجاه

AB احسب قيمة عزم هذه القوة حول النقطة O



الحل / $A(1.6, 0, 2), B(2.4, 1.5, 0)$

$$\overrightarrow{AB} = 0.8i + 1.5j - 2k \text{ m}$$

$$\overrightarrow{T} = 1.2 \left(\frac{0.8i + 1.5j - 2k}{2.62} \right) = \frac{1.2}{2.62} (0.8i + 1.5j - 2k) \text{ N}$$

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OA} = 1.6i + 0j + 2k \text{ m}$$

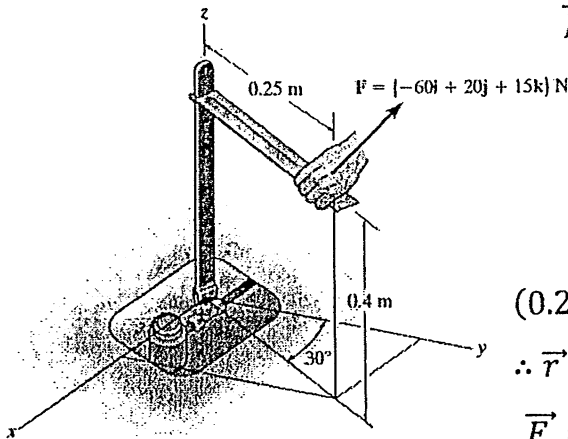
$$\overrightarrow{M}_O = \frac{1.2}{2.62} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1.6 & 0 & 2 \\ 0.8 & 1.5 & -2 \end{vmatrix} = 0.458 (-3i + 4.8j + 2.4k)$$

$$= -1.37i + 2.2j + 1.1k \text{ kN.m}$$

$$M_O = \sqrt{1.37^2 + 2.2^2 + 1.1^2} = 2.82 \text{ kN.m}$$

مثال 19 / احسب عزم القوة $\overrightarrow{F} = -60i + 20j + 15k$

حول المحور Z .



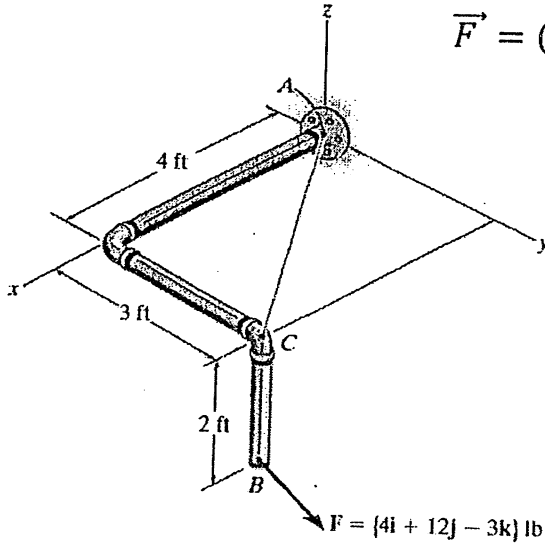
الحل / نفرض أن القوة $\overrightarrow{F}$ تؤثر في النقطة A

$$(0.25 \sin 30, 0.25 \cos 30, 0.4) = (0.125, 0.217, 0.4)$$

$$\therefore \overrightarrow{r} = 0.125i + 0.217j + 0.4k$$

$$\overrightarrow{F} = -60i + 20j + 15k$$

$$M_z = k \cdot (\overrightarrow{r}_{OA} \times \overrightarrow{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.125 & 0.217 & 0.4 \\ -60 & 20 & 15 \end{vmatrix} = 15.5 \text{ N.m}$$



مثال 20 / في الشكل المقابل تؤثر القوة $\vec{F} = (4i + 12j - 3k) \text{ lb}$

على الأنبوب عند النقطة B. احسب

(أ) مقدار عزم القوة $\vec{F}$ حول المحاور x, y, z

(ب) عزم القوة $\vec{F}$ حول النقطة O

(ج) مقدار عزم القوة $\vec{F}$ حول المحور AC

(د) عزم القوة $\vec{F}$ حول المحور AC

الحل /

$$A(0, 0, 0), B(4, 3, -2)$$

$$\vec{r}_{AB} = B - A = 4i + 3j - 2k \text{ ft}$$

$$M_x = \vec{\lambda}_x \cdot (\vec{r}_{AB} \times \vec{F}) = i \cdot (\vec{r}_{AB} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 4 & 12 & -3 \end{vmatrix} = 1(-9 + 24) - 0 + 0 = 15 \text{ lb.ft}$$

$$M_y = \vec{\lambda}_y \cdot (\vec{r}_{AB} \times \vec{F}) = j \cdot (\vec{r}_{AB} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 4 & 12 & -3 \end{vmatrix} = 0 - 1(-12 + 8) = 4 \text{ lb.ft}$$

$$M_z = \vec{\lambda}_z \cdot (\vec{r}_{AB} \times \vec{F}) = k \cdot (\vec{r}_{AB} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 4 & 12 & -3 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 1(48 - 12) = 36 \text{ lb.ft}$$

$$\vec{M}_O = M_x i + M_y j + M_z k = 15i + 4j + 36k$$

(ب)

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -2 \\ 4 & 12 & -3 \end{vmatrix} = 15i + 4j + 36k$$

طريقة أخرى

$$\therefore C(4, 3, 0), A(0, 0, 0)$$

(ج)

$$\vec{r}_{AC} = C - A = 4i + 3j \text{ ft} \Rightarrow |\vec{r}_{AC}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ ft}$$

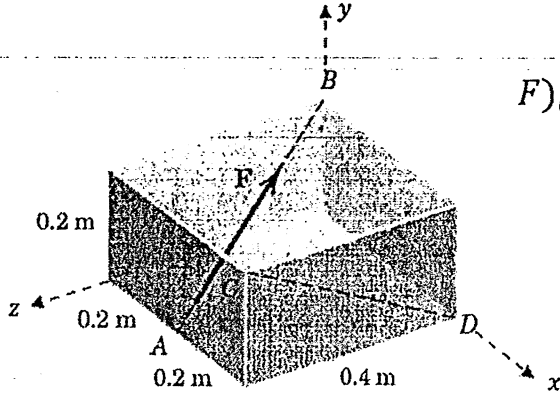
$$\vec{\lambda}_{AC} = 0.8i + 0.6j + 0k$$

$$M_{AC} = \vec{\lambda}_{AC} \cdot (\vec{r}_{AB} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 4 & 12 & -3 \end{vmatrix} = 0.8(-9 + 24) - 0.6(-12 + 8) + 0 = 14.4 \text{ lb.ft}$$

$$\vec{M}_{AC} = M_{AC} \vec{\lambda}_{AC} = 14.4 (0.8i + 0.6j + 0k) = 11.52i + 8.64j \text{ lb.ft}$$

(د)

مثال 21/ في الشكل المقابل:



أ) إذا كانت القوة F تساوي 2 kN احسب المركبة $(F)_{CD}$

على طول المحور CD

ب) إذا كانت قيمة عزم القوة F حول الخط CD تساوي

50 N.m احسب قيمة F .

الحل/

$$B(0, 0.2, 0), A(0.2, 0, 0.4)$$

$$\vec{AB} = -0.2\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} - 0.4\mathbf{k} \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{0.24}$$

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{-0.2\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} - 0.4\mathbf{k}}{\sqrt{0.24}} = \frac{-1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

$$\vec{F} = F \vec{\lambda}_{AB} = 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{k} \right) = -\frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{4}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

$$C(0.4, 0.2, 0.4), D(0.4, 0, 0)$$

$$\vec{CD} = -0.2\mathbf{j} - 0.4\mathbf{k}, |\vec{CD}| = \sqrt{0.2}; \vec{\lambda}_{CD} = \frac{-0.2\mathbf{j} - 0.4\mathbf{k}}{\sqrt{0.2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

$$(F)_{CD} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{4}{\sqrt{6}}\mathbf{k} \right) \cdot \left(0\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k} \right) = \frac{-2}{\sqrt{30}} + \frac{8}{\sqrt{30}} = \frac{6}{\sqrt{30}}$$

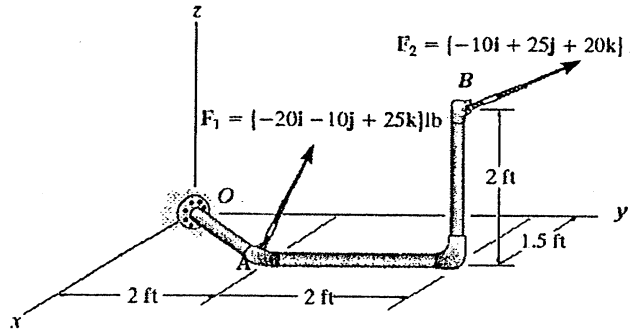
$$A(0.2, 0, 0.4), D(0.4, 0, 0)$$

$$\vec{r}_{DA} = A - D = -0.2\mathbf{j} + 0.4\mathbf{k}$$

$$\vec{F} = F \vec{\lambda}_{AB} = F \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{k} \right) = -\frac{F}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{F}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{F}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

$$M_{CD} = \vec{\lambda}_{CD} \cdot (\vec{r}_{AD} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -0.2 & 0 & 0.4 \\ -\frac{F}{\sqrt{6}} & \frac{F}{\sqrt{6}} & -\frac{F}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \frac{F}{\sqrt{30}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -0.2 & 0 & 0.4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$50 = \frac{F}{\sqrt{30}} (0.2(2+2) - 1(-0.4)) \Rightarrow 1.2F = 50\sqrt{30} \Rightarrow F = 228 \text{ N}$$



مثال 22/ استبدل نظام القوي المبين بالشكل بقوة واحدة

وعزم عند النقطة O .

الحل /

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-20i - 10j + 25k) + (-10i + 25j + 20k) : \text{القوة المحصلة}$$

$$= -30i + 15j + 45k \quad lb$$

عزم القوة $\vec{F}_1 = 20i - 10j + 25k$ حول O

$$O(0,0,0), A(1.5, 2, 0) \Rightarrow \vec{r}_{OA} = 1.5i + 2j \quad ft$$

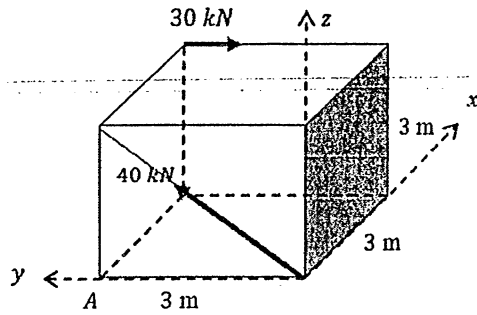
$$\vec{M}_{O1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1.5 & 2 & 0 \\ 20 & -10 & 25 \end{vmatrix} = 50i - 37.5j + 25k \quad lb.ft$$

عزم القوة $\vec{F}_2 = 20i - 10j + 25k$ حول O

$$O(0,0,0), B(1.5, 4, 2) \Rightarrow \vec{r}_{OB} = 1.5i + 4j + 2k \quad ft$$

$$\vec{M}_{O2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1.5 & 4 & 2 \\ -10 & 25 & 20 \end{vmatrix} = 30i - 50j + 77.5k \quad lb.ft$$

$$\therefore \vec{M}_{OR} = \vec{M}_{O1} + \vec{M}_{O2} = 80i - 87.5j + 102.5k \quad lb.ft$$



مثال 23/ استبدل القوتين المطبقتين على مكعب طول ضلعه 3 m بقوة واحدة مكافئة F تمر بالنقطة A مع عزم ازدواج M .

الحل /

$$\vec{F}_1 = 0i + 28.3j + 28.3k \text{ kN}, \vec{F}_2 = -30j \text{ kN}$$

$$\therefore \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 1.7j + 28.3k \text{ kN}$$

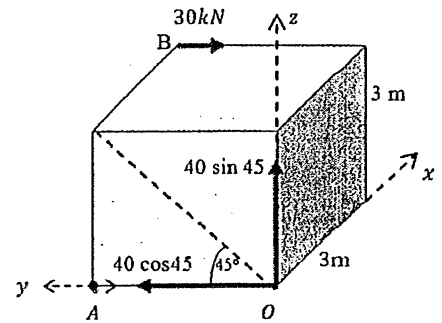
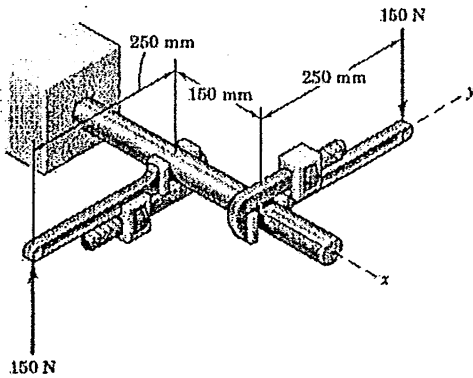
$$\vec{r}_1 = \vec{AO} = O - A = (0, -3, 0) = -3j \text{ m}$$

$$\vec{M}_{A1} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 28.3 & 28.3 \end{vmatrix} = -84.9i \text{ kN.m}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{AB} = B - A = (3, 3, 3) - (0, 3, 0) = 3i + 3k \text{ m}$$

$$\vec{M}_{A2} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -30 & 0 \end{vmatrix} = 90i + 0j - 90k \text{ kN.m}$$

$$\therefore \vec{M}_{AR} = \vec{M}_{A1} + \vec{M}_{A2} = (5.1i - 90k) \text{ kN.m}$$



مثال 24/ تكون القوتان اللتان تؤثران على مفاتيح ربط الماسورة ازدواج M . عبر عن عزم الازدواج كمتجه.

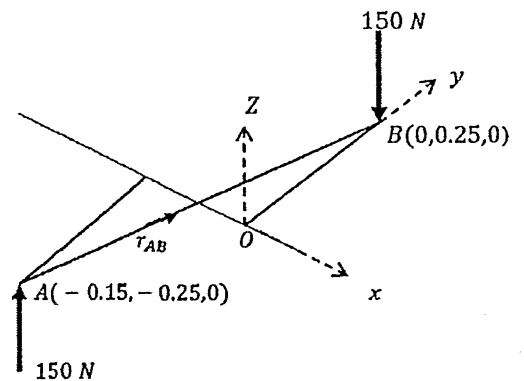
الحل /

لاحظ أن القوتان يكونان ازدواج

$$\vec{r}_{AB} = B - A = (0, 0.25, 0) - (-0.15, -0.25, 0) = 0.15i + 0.5j$$

$$\vec{F} = -150N$$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.15 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -150 \end{vmatrix} = -75i + 22.5j$$



الاتزان القوى في مستوى واحد

تعريف : إذا انعدم مجموع القوى $\vec{R} = 0$ وانعدم عزم المجموعة عند أية نقطة $\sum M = 0$ قيل أن مجموعة القوى متوازنة .

الشروط اللازمة والكافية لاتزان مجموعة من القوى :

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M = 0$$

$$\sum F_x = 0, \sum M_A = 0, \sum M_B = 0$$

$$\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum M_C = 0$$

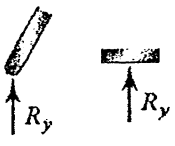
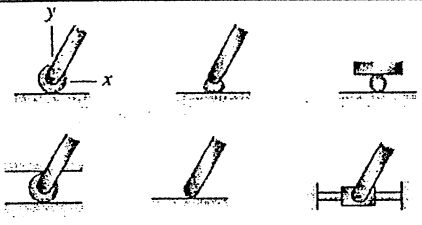
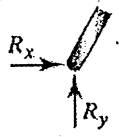
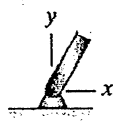
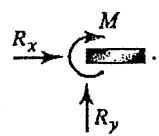
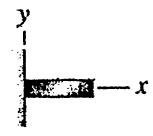
حيث C, B, A ليست على استقامة واحدة

هناك طرق أخرى للتعبير عن شروط الاتزان :

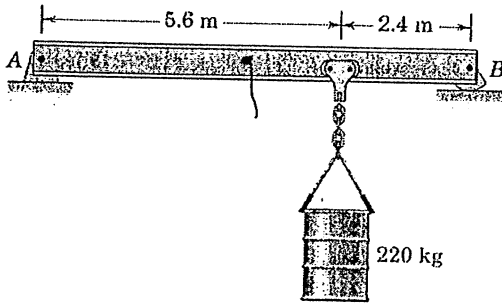
لإيجاد معادلات الاتزان لجسم ما لابد من عزل الجسم من المحيط الذي فيه واستبدال الدعامات بردود الأفعال ، ويمكن استبدال الجسم والدعامات والقوى الخارجية برسم بياني يسمى الرسم البياني للجسم الحر الذي يوضح فيه الجسم الأصلي مع القوى الخارجية والعزوم وردود الأفعال والأبعاد .

أنواع الدعامات (الركائز)

من الضروري معرفة أنواع الركائز للتعرف على أنواع ردود الأفعال

		الدعامة المتحركة والمنزلة
		الدعامة الثابتة
		وصلة أو كابل
		الدعامة الثابتة

		الدعامة المتحركة
		السطح الخشن



مثال 1/ إذا كانت كتلة العارضة المنتظمة 450 kg أحسب ردود الافعال عند A , B .

الحل /

$$\sum F_x = 0 : A_x = 0$$

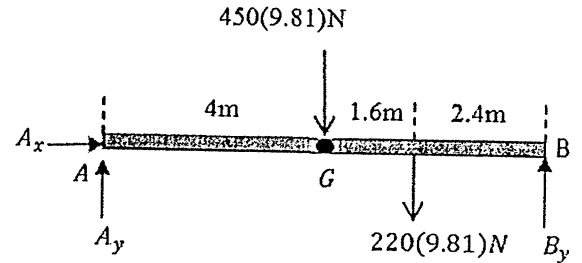
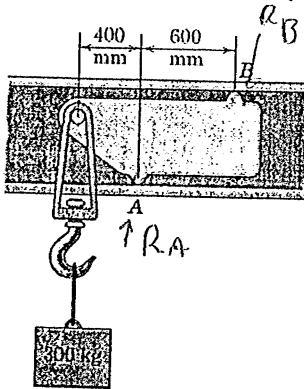
$$\sum M_A = 0 :$$

$$- 450 (9.81) 4 - 220 (9.81) (5.6) + 8 B_y = 0$$

$$B_y = 3718 N$$

$$\sum F_y = 0 :$$

$$A_y - 450(9.81) - 220(9.81) + 3718 = 0 \Rightarrow A_y = 2854.7 N$$



مثال 2 / أوجد القوى المؤثرة في كل من A , B

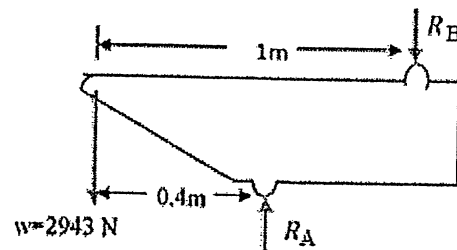
الحل /

$$\sum M_A = 0 : 2943 (0.4) - R_B (0.6) = 0$$

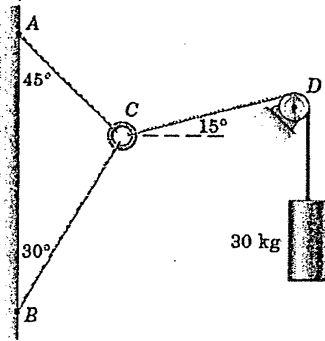
$$R_B = 1962 N = 1.962 kN$$

$$\sum M_B = 0 : 2943 (1) - R_A (0.6) = 0$$

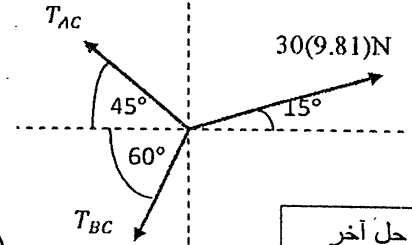
$$R_B = 4905 N = 4.91 kN$$



مثال 3 / أحسب قيمة الشد في الكوابل AC, BC.



الحل /



حل آخر

$$\frac{T_{AC}}{\sin 135} = \frac{T_{BC}}{\sin 120}$$

$$= \frac{30(9.81)}{\sin 105}$$

$$\sum F_x = 0 : -T_{AC} \cos 45 - T_{BC} \cos 60 + 30(9.81) \cos 15 = 0$$

$$0.707 T_{AC} + 0.5 T_{BC} = 30(9.81) \cos 15 \rightarrow (1)$$

$$\sum F_y = 0 : T_{AC} \sin 45 - T_{BC} \sin 60 + 30(9.81) \sin 15 = 0$$

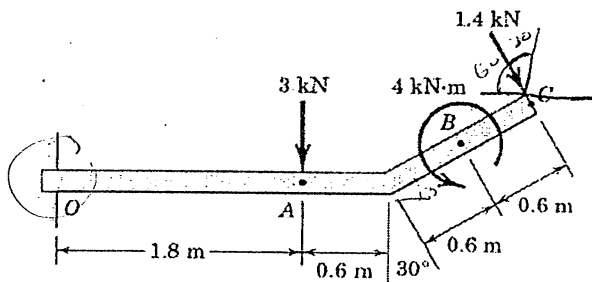
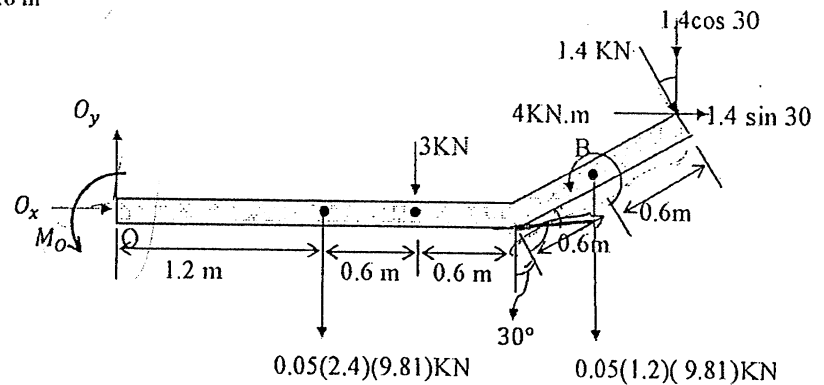
$$0.707 T_{AC} - 0.863 T_{BC} = -30(9.81) \sin 15 \rightarrow (2)$$

بحل والمعادلتين (1) و (2) $T_{AC} = 215 \text{ N}$, $T_{BC} = 264 \text{ N}$

مثال 4 / إذا كانت كتلة العارضة 50 kg لكل متر

أحسب القوى المؤثرة عند النقطة O.

الحل /



$$\sum F_x = 0 : O_x + 1.4 \sin 30 = 0 \Rightarrow O_x = -0.7 \text{ kN} \Rightarrow O_x = 0.7 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 : O_y - 0.050 (2.4)(9.81) - 3 - 0.050 (1.2)(9.81) - 1.4 \cos 30 = 0$$

$$\Rightarrow O_y = 5.98 \text{ kN}$$

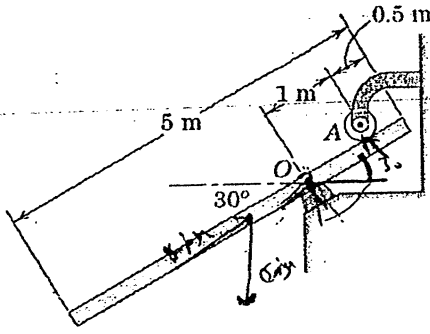
$$\sum M_O = 0 :$$

$$M - 0.05(2.4)(9.81)(1.2) - 3(1.8) - 0.05(1.2)(9.81)(2.4 + 0.6 \cos 30)$$

$$+ 4 - 1.4 \sin 30 (1.2 \sin 30) - 1.4 \cos 30 (2.4 + 1.2 \cos 30) = 0$$

$$\Rightarrow M = 9.12 \text{ kN.m}$$

مثال 5 / احسب القوة عند اسطوانة التدرج A والقوة الكلية في المسمار O، علماً بأن كتلة القضيب 100 kg.



الحل /

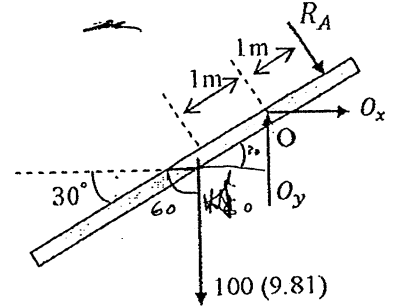
$$\sum M_O = 0 : R_A(1) - (981 \cos 30)(1) = 0 \Rightarrow R_A = 850 N$$

$$\sum F_x = 0 : O_x - 850 \sin 30 = 0 \Rightarrow O_x = 425 N$$

$$\sum F_y = 0 : O_y - 850 \cos 30 = 0 \Rightarrow O_y = 1717 N$$

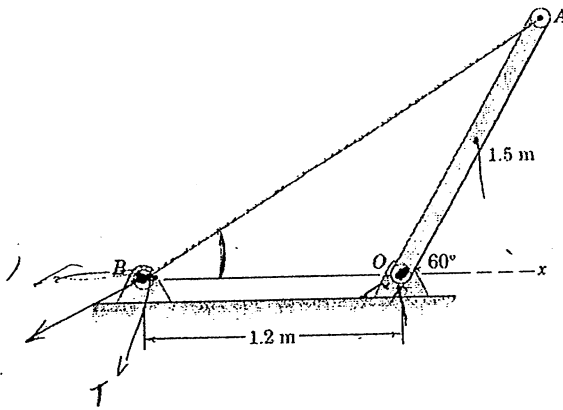
$$R_O = \sqrt{425^2 + 1717^2} = 1769$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1717}{425} = 76.1^\circ$$



مثال 6 / إذا كان وزن القضيب المنتظم 18 kg احسب القوة المؤثرة عند O والشد في الكابل AB.

الحل /



$$\sum M_O = 0 :$$

$$T \sin 33.7 (1.2) - 18(9.81)(0.75) \cos 60 = 0$$

$$\Rightarrow T = 99.5 N$$

$$\sum F_x = 0 : -99.5 \cos 33.7 + O_x = 0$$

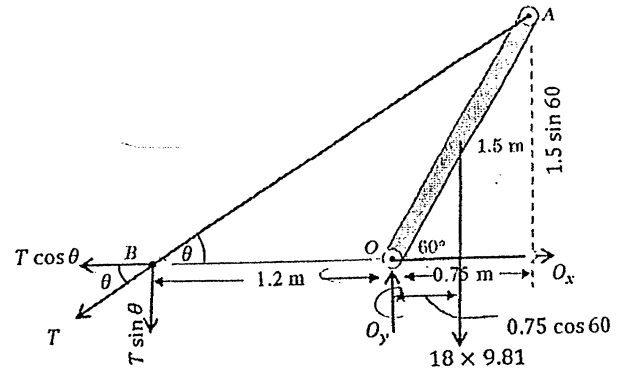
$$\Rightarrow O_x = 82.8 N$$

$$\sum F_y = 0 : -99.5 \sin 33.7 - 18(9.81) + O_y = 0$$

$$\Rightarrow O_y = 232 N$$

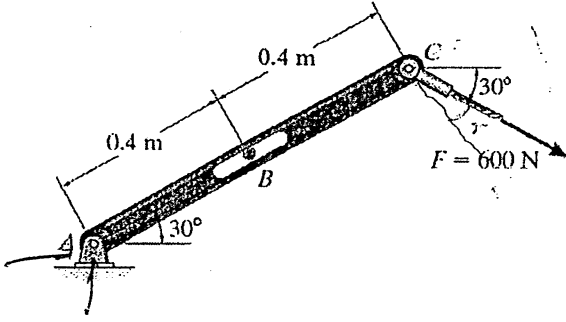
$$\therefore R_O = \sqrt{82.8^2 + 232^2} = 246 N$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{232}{82.8} = 70.3$$



$$\theta = \tan^{-1} \frac{1.5 \sin 60}{1.2 + 0.75} = 33.67^\circ$$

مثال 7 / احسب القوة الأفقية والعمودية المؤثرة في A .



الحل /

$$\sum M_A = 0 : N_B (0.4) - 600 \cos 30 (0.8) = 0$$

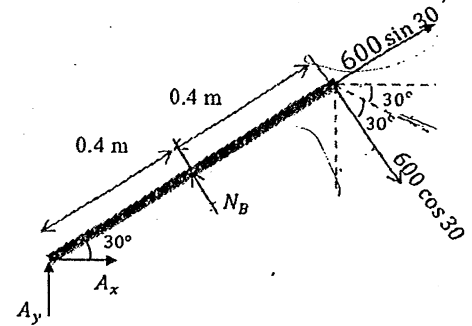
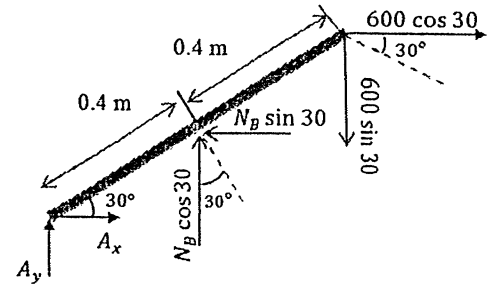
$$\Rightarrow N_B = 1039.23 \text{ N} = 1.04 \text{ kN} \nearrow$$

$$\sum F_x = 0 : 600 \cos 30 - 1039.23 \sin 30 + A_x = 0$$

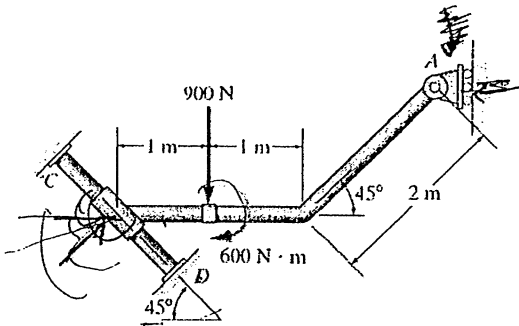
$$\Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 : A_y + 1039.23 \cos 30 - 600 \sin 30 = 0$$

$$\Rightarrow A_y = -600 \text{ N} = 600 \text{ N} \downarrow$$



مثال 8 / احسب القوى المؤثرة عند كل من A , B .



الحل /

$$\sum F_y = 0 : N_B \sin 45 - 900 = 0$$

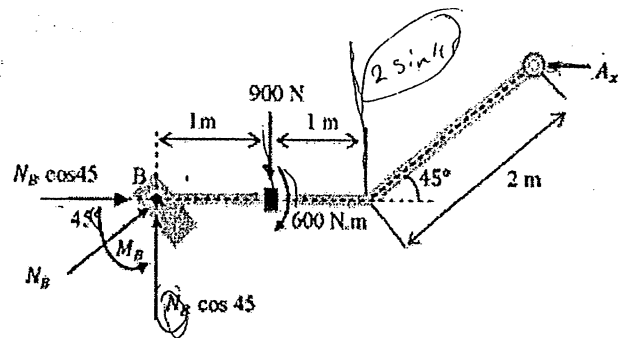
$$\Rightarrow N_B = 1272.79 \text{ N} \nearrow$$

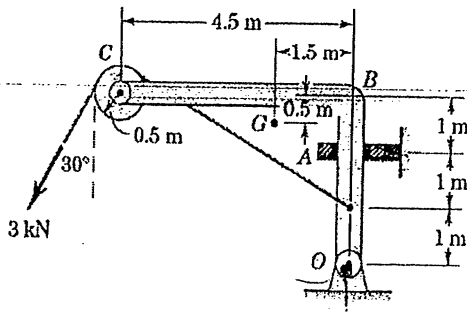
$$\sum F_x = 0 : 1272.79 \cos 45 - A_x = 0$$

$$\Rightarrow A_x = 900 \text{ N} \leftarrow$$

$$\sum M_B = 0 : 900(2) \sin 45 - 900(1) - 600 + M = 0$$

$$\Rightarrow M = 227 \text{ N.m} \curvearrowright$$





مثال 9 / أحسب القوة عند A والقوة الكلية في المسمار O .

علما بأن كتلة الجهاز 500 kg .

الحل /

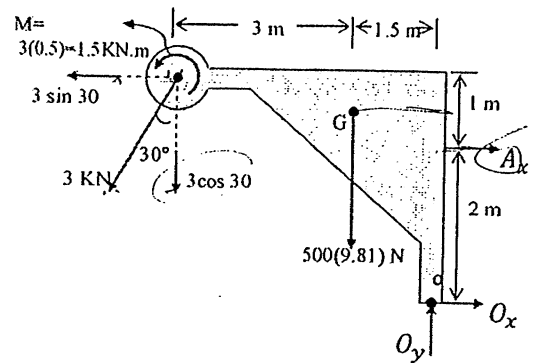
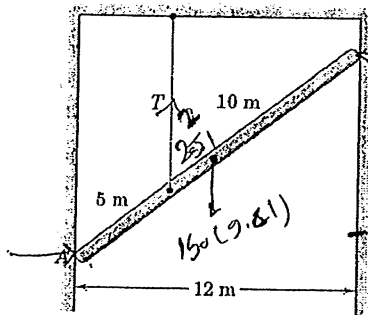
نستبدل القوة $3kN$ بقوة وعزم عند مركز البكرة C

$$M = 3 \times 0.5 = 1.5kN.m = 1500N.m \quad : \text{حيث}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_o &= 0 : 500(9.81)(1.5) + 3000 \cos 30(4.5) \\ &\quad + 1500 + 3000 \sin 30(3) - A_x(2) = 0 \\ \Rightarrow A_x &= 12520 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 : -3000 \sin 30 + 12520 + O_x &= 0 \\ O_x &= -11020 \text{ N} \Rightarrow O_x = 11020 \text{ N} \leftarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 : O_y - 3000\cos 30 - 500(9.81) = 0 \\ \Rightarrow O_y &= 7500 \text{ N } \uparrow\end{aligned}$$



مثال 10 / إذا كانت كتلة القضيب المنتظم 150 Kg ومثبت عند نهايته

الملاء على الجدارين العموديين وبواسطة الشد T في الكابل

العمودي احسب ردود الفعل عند A, B .

الحل /

$$\Sigma F_y = 0 : T - 150(9.81) = 0 \Rightarrow T = 1472 \text{ N}$$

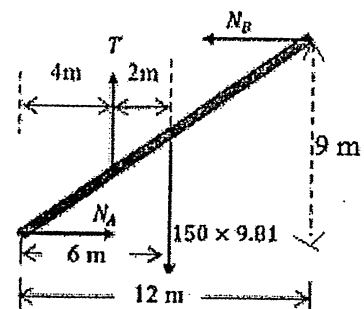
$\Rightarrow T, W$ (یکونان ازدواج)

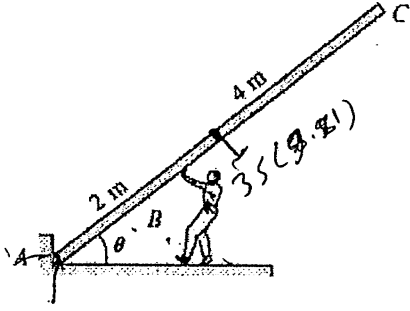
$$\sum F_x = 0 : R_B = R_A \Rightarrow R_A, R_B \text{ (یکونان ازدواج)}$$

$$\because M_R = 0 \Rightarrow M_1 + M_2 = 0$$

$$R_A(9) - 1472(2) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 327 \text{ N} , R_B = 327 \text{ N}$$





مثال 11/ يقوم الرجل بدفع سلم كتلته 35kg بشكل عمودي عليه فإذا

كانت أكبر قوة يبذلها الرجل 400N احسب أصغر زاوية θ

يمكنه من خلالها دعم السلم ، واحسب رد الفعل عند A .

$$\sum M_A = 0 : 400(2) - 35 \times 9.81(3 \cos \theta) = 0$$

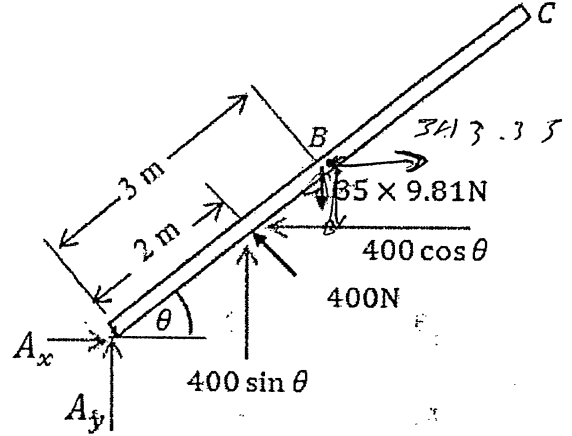
$$1030.05 \cos \theta = 800 \Rightarrow \theta = 39^\circ$$

$$\sum F_x = 0 : A_x = 400 \cos 39^\circ = 310.9 \text{ N} \rightarrow$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = 35 \times 9.81 - 400 \sin 39^\circ = 91.6 \text{ N} \uparrow$$

$$R_A = \sqrt{310.9^2 + 91.6^2} = 324.11 \text{ N}$$

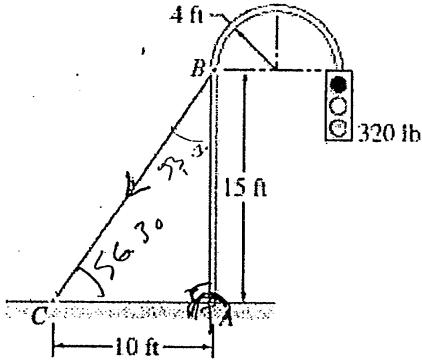
$$\alpha = \tan^{-1} \frac{91.6}{310.9} = 16.4^\circ$$



مثال 12/ احسب ردود الفعال عند القاعدة A عندما يكون الشد

في الكابل BC (أ) $T = 544 \text{ lb}$ (ب) $T = 0$

علما بان وزن صندوق الإضاءة 320 lb ووزن العمود مهمل .



الحل /

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{10}{15} \right) = 33.69^\circ$$

(أ)

$$\sum M_A = 0 : M + 544 \sin 33.69^\circ (15) - 320(8) = 0$$

$$M = -1966.3 \text{ lb.ft} = 1966.3 \text{ lb.ft} \curvearrowright$$

$$\sum F_x = 0 : A_x = 544 \sin 33.69^\circ = 325 \text{ lb} \rightarrow$$

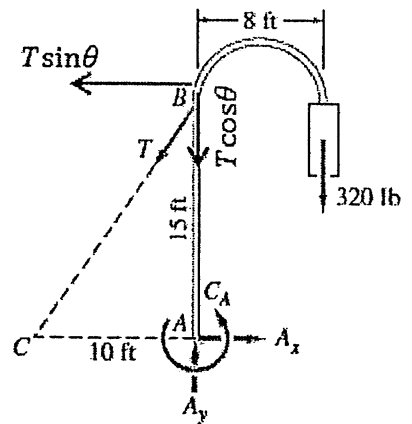
$$\sum F_y = 0 : A_y - 320 - 544 \sin 33.69^\circ = 0$$

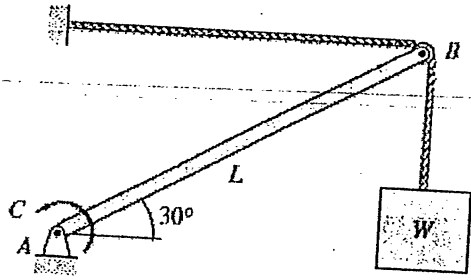
$$\sum M_B = 0 : M - 320(8) = 0$$

(ب)

$$M = -2560 \text{ lb.ft} = 2560 \text{ lb.ft} \curvearrowright$$

$$\sum F_x = 0 : A_x = 0 , \quad \sum F_y = 0 : A_y = 320 \text{ lb}$$





مثال 13/ في الوضع المبين في الصورة احسب العزم C وردود
الأفعال عند A الذي يجعل العارضة المعلقة AB في حالة الاتزان

اهمل وزن العارضة وقطر البكرة B

الحل /

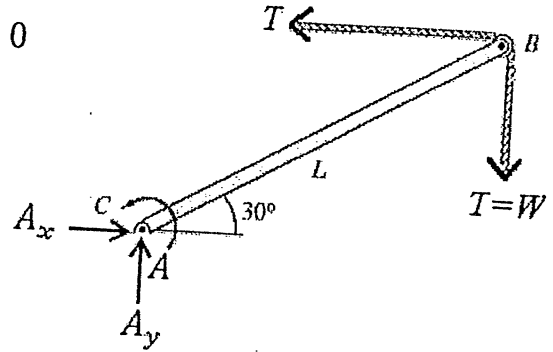
$$\sum M_A = 0 : M_C + WL \sin 30^\circ - WL \cos 30^\circ = 0$$

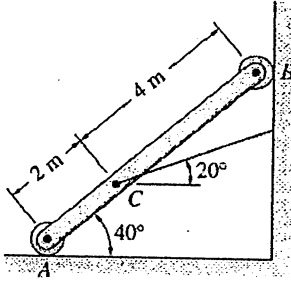
$$M_C = WL \cos 30^\circ - WL \sin 30^\circ$$

$$= WL(\cos 30^\circ - \sin 30^\circ) = 0.366 WL$$

$$\sum F_x = 0 : A_x = W$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = W$$





مثال 14 / AB قضيب منتظم طوله 6 m وكتلته 50 kg مثبت بطرفيه اسطوانتي تدحرج ، ويرتكز طرفه العلوي على حائط رأسي وطرفه السفلي على أرض أفقية . حفظ توازنه بواسطة كابل متصل بالنقطة C كما بالشكل أوجد مقدار الشد في الكابل وردود الفعل عند كل من B, A .

/ الحل

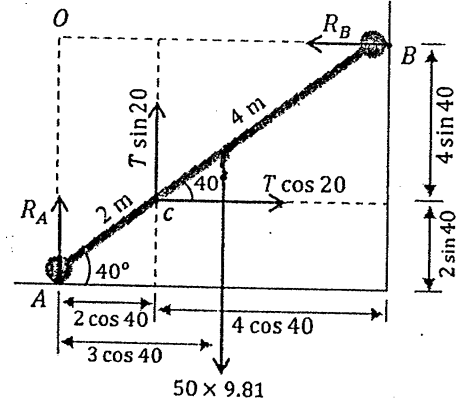
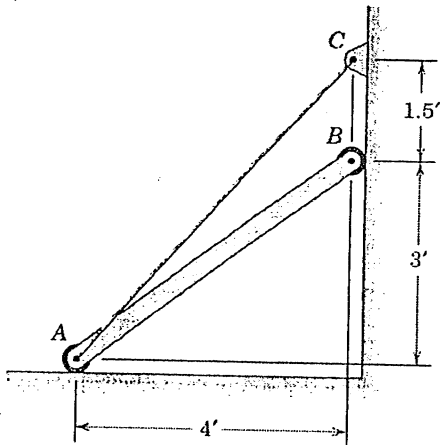
$$\sum M_O = 0 : T \cos 20 (4 \sin 40) + T \sin 20 (2 \cos 40) - 50 \times 9.81 (3 \cos 40) = 0$$

$$\Rightarrow T = 383.4 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 : R_B = 383.4 \cos 20 = 360.3 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 : R_A + 383.4 \sin 20 = 50 \times 9.81$$

$$\Rightarrow R_A = 359.4 \text{ N}$$



مثال 15 / AB قضيب منتظم طوله 5' وزنه 60 lb مثبت بطرفيه اسطوانتي تدحرج ، ويرتكز طرفه العلوي على حائط رأسي وطرفه السفلي على أرض أفقية . حفظ توازنه بواسطة كابل متصل بالنقطة A كما بالشكل احسب الشد في الكابل باستخدام معادلة واحدة للاتزان ثم اوجد ردود الافعال عند كل من B, A .

/ الحل

$$\sum M_O = 0 : T \cos 48.4^\circ (3) - 60 (2) = 0$$

$$T = 60.25 \text{ lb}$$

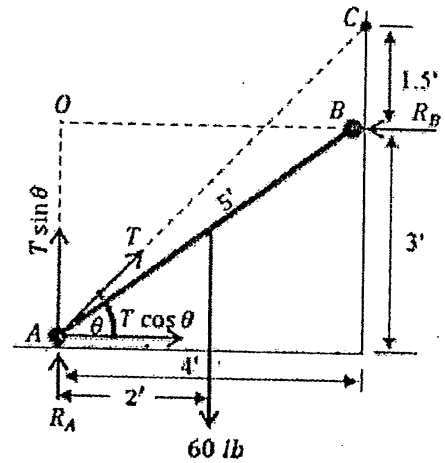
$$\sum F_x = 0 : R_B = T \cos 48.4^\circ$$

$$\Rightarrow R_B = 60.25 \cos 48.4^\circ = 40 \text{ lb}$$

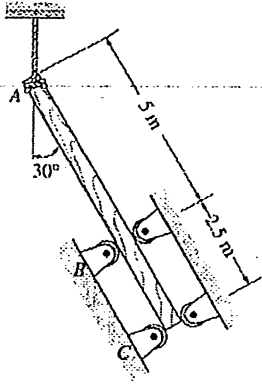
$$\sum F_y = 0 : R_A + T \sin 48.4^\circ - 60 = 0$$

$$R_A + 60.25 \sin 48.4^\circ - 60 = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 14.95 \text{ lb}$$



$$\theta = \tan^{-1} \frac{4.5}{4} = 48.4^\circ$$



مثال 16 / لوح خشبي منتظم طوله 7.5 m وكتلته 210 kg معلق بواسطة حبل عند A ويمر خلال بكرات حرة عند B, C كما بالشكل . احسب قيمة الشد في الحبل وردود الافعال عند البكرات .

الحل /

$$\sum F_x = 0 : T \cos 30 = 2060.1 \cos 30 \Rightarrow T = 2060.1 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 : R_B(5) + R_C(7.25) - 2060.1 \sin 30 (3.75) = 0$$

$$\Rightarrow R_B(5) + R_C(7.5) = 3862.7$$

$$\Rightarrow R_B + 1.5 R_C = 772.5 \text{ ————— (1)}$$

$$\sum F_y = 0 : R_B + R_C + T \sin 30 - 2060.1 \sin 30 = 0$$

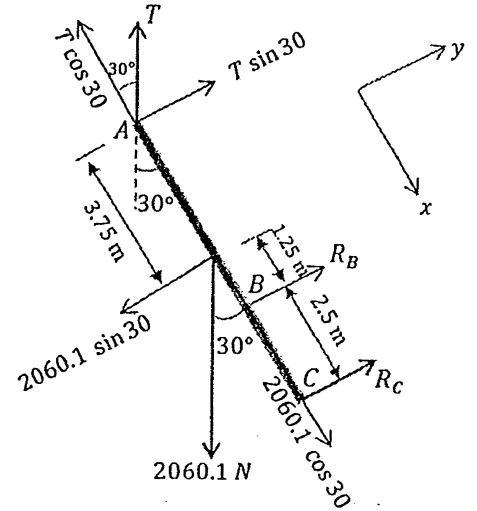
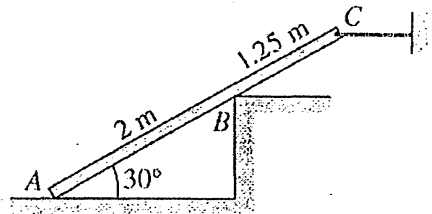
$$\Rightarrow R_B + R_C = 0 \text{ ————— (2)}$$

$$0.5 R_C = 772.5$$

بحل المعادلتين بالطرح :

$$\Rightarrow R_C = 1545 \text{ N} \nearrow$$

$$, R_B = -1545 \text{ N} = 1545 \text{ N} \checkmark$$



مثال 17 / قضيب منتظم طوله 3.25 m وكتلته 40 kg ربط طرفه C بحبل أفقي كما بالشكل . احسب القوى المؤثرة على القضيب . (اهمال الاحتكاك)

الحل /

$$\sum F_y = 0 : R_A + R_B \cos 30 = 392.4$$

$$R_A + 0.866 R_B = 392.4 \text{ ————— (1)}$$

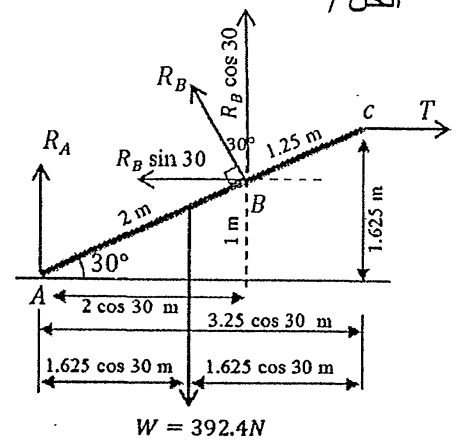
$$\sum M_C = 0 : -R_B(1.25)$$

$$-R_A(3.25 \cos 30) + 392.4 (1.625 \cos 30) = 0$$

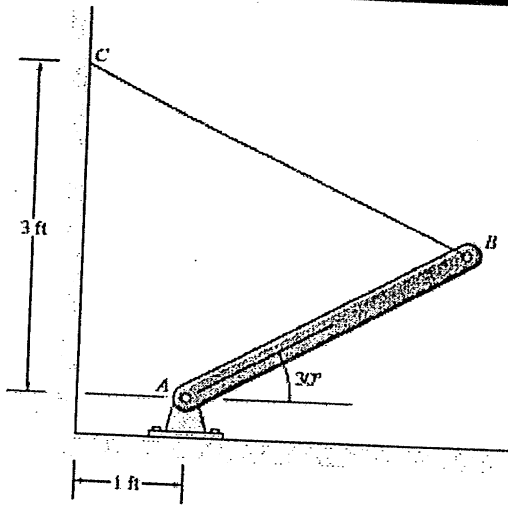
$$2.815 R_A + 1.25 R_B = 552.22 \text{ ————— (2)}$$

$$R_A = -10.34 \text{ N} = 10.34 \text{ N} \downarrow, R_B = 465 \text{ N} \text{ : بحل المعادلتين}$$

$$\sum F_x = 0 : T = R_B \sin 30 = 465 \sin 30 = 232.5 \text{ N}$$



مثال 18 / إذا كان وزن العارضة المنتظمة 10 lb وطولها 3 ft احسب الشد في الكابل BC والقوى المؤثرة عند A .



الحل /

$$\theta = \tan^{-1} \frac{3 - 3 \sin 30^\circ}{1 + 3 \cos 30^\circ} = 22.6^\circ$$

$$\sum M_A = 0 :$$

$$T \cos 22.6^\circ (3 \sin 30^\circ) + T \sin 22.6^\circ (3 \cos 30^\circ) - 10(1.5 \sin 30^\circ) = 0$$

$$\Rightarrow T = 5.45 \text{ lb}$$

$$\sum F_x = 0: A_x - T \cos 22.6^\circ = 0$$

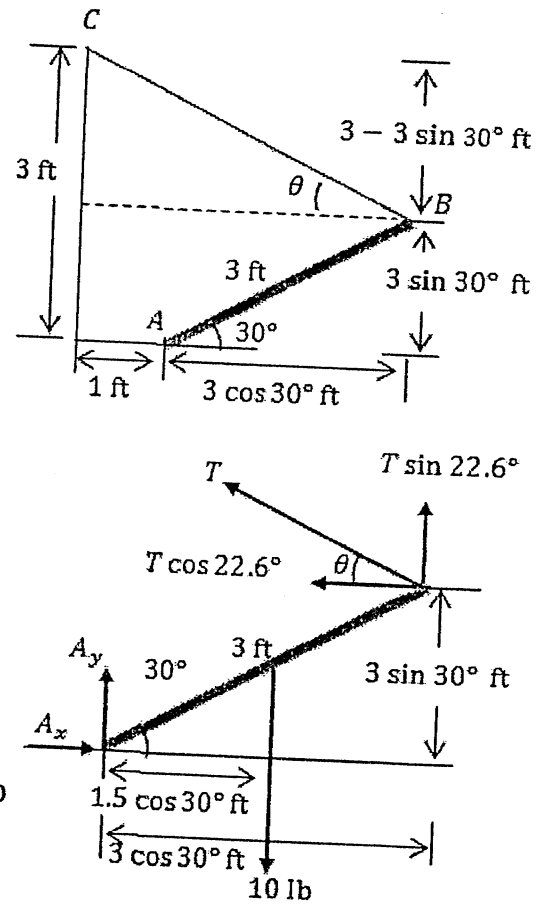
$$\Rightarrow A_x - 5.45 \cos 22.6^\circ = 5.03 \text{ lb} \rightarrow$$

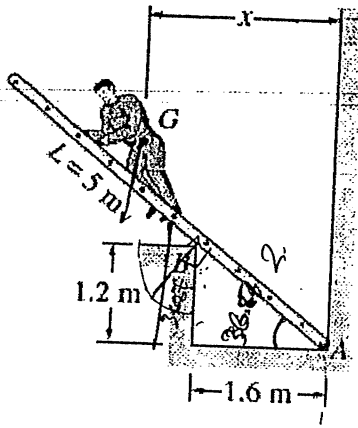
$$\sum F_y = 0: A_y + T \sin 22.6^\circ - 10 = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 10 - 5.45 \sin 22.6^\circ = 7.9 \text{ lb} \uparrow$$

$$\therefore F_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(5.03)^2 + (7.9)^2} = 9.37 \text{ lb}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x} = \tan^{-1} \frac{7.9}{5.03} = 57.5^\circ$$





مثال 19 / يصعد رجل كتلته 90 kg ومركز ثقله G سلم طوله 5 m

وكتلته 20 kg

(أ) احسب ردود الأفعال عند كل من A , B عندما $x = 1.5 m$

(ب) أوجد المسافة x التي سيكون عندها السلم على وشك الانقلاب .

ملاحظة (الاحتكاك مهمل)

/ الحل

$$\sum M_A = 0 :$$

(أ)

$$90 \times 9.81(1.5) + 20 \times 9.81(2.5 \cos \theta) - R_B(2) = 0$$

$$90 \times 9.81(1.5) + 20 \times 9.81 \times 2.5 \times \frac{4}{5} - R_B(2) = 0$$

$$R_B = 858.4 N$$

$$\sum F_x = 0: A_x = R_B \sin \theta = 858.4 \times \frac{3}{5} = 515 N$$

$$\sum F_y = 0: A_y = 90 \times 9.81 + 20 \times 9.81 - R_B \cos \theta$$

$$A_y = 110 \times 9.81 - 858.4 \times \frac{4}{5} = 392.38 N$$

$$R_A = \sqrt{515^2 + 392.38^2} = 647.4 N$$

(ب) عندما يكون السلم على وشك الانقلاب يتلاشى رد الفعل عند A

أي أن $R_A = 0$

$$\sum F_y = 0: R_B \cos \theta = 90 \times 9.81 + 20 \times 9.81$$

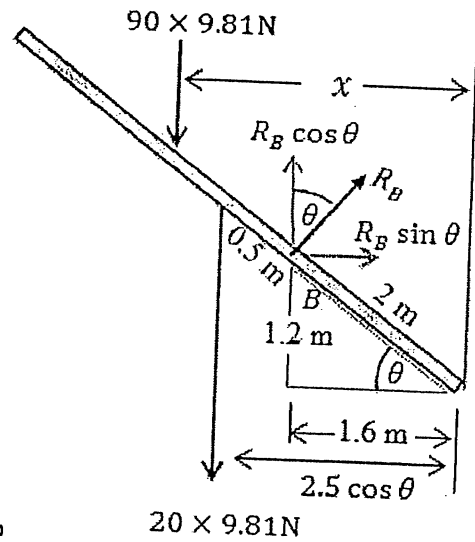
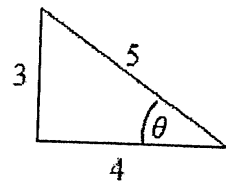
$$R_B \times \frac{4}{5} = 110 \times 9.81 \Rightarrow R_B = 1348.9 N$$

$$\sum M_B = 0 :$$

$$90 \times 9.81(x) + 20 \times 9.81(2.5 \cos \theta) - 1348.9(2) = 0$$

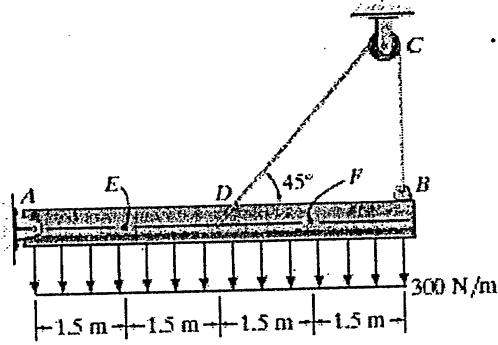
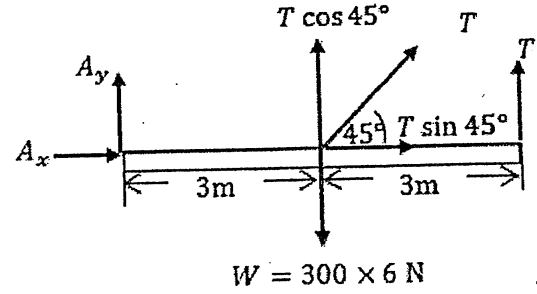
$$90 \times 9.81x + 20 \times 9.81 \times 2.5 \times \frac{4}{5} + 1348.9 \times 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2.61 m$$



مثال 20 / من الشكل أوجد الشد في الكابل والقوى المؤثرة في A .

الحل /



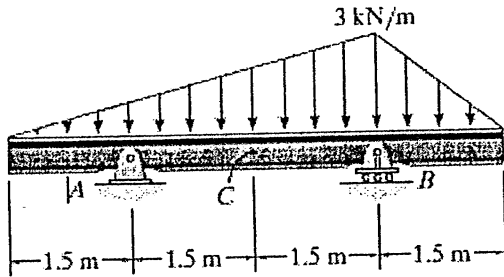
$$\sum M_A = 0 : T(6) + T \cos 45^\circ (3) - 300 \times 6 (3) = 0$$

$$\Rightarrow T = 644.92 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 : A_x = T \sin 45^\circ = 644.92 \sin 45^\circ = 470.2 \text{ N}$$

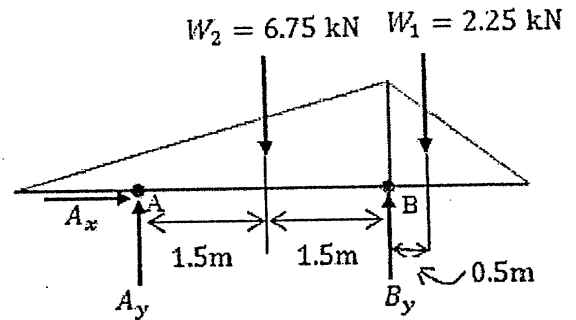
$$\sum F_y = 0 : A_y + T \cos 45^\circ + T - 300 \times 6 = 0$$

$$A_y + 644.92 \cos 45^\circ + 644.92 - 300 \times 6 = 0 \Rightarrow A_y = 664.92 \text{ N}$$



مثال 21 / من الشكل أوجد الشد في الكابل والقوى المؤثرة في A .

الحل /



$$W_1 = \frac{1}{2} \times 3 \times 1.5 = 2.25 \text{ kN}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4.5 = 6.75 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : B_y(3) - 6.75(1.5) - 2.25(3.5) = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 6 \text{ kN}$$

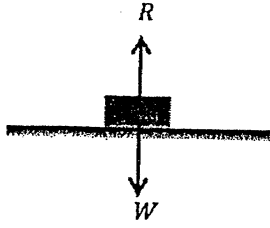
$$\sum F_x = 0 : A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 : A_y + B_y - 6.75 - 2.25 = 0$$

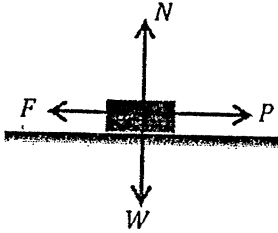
$$\Rightarrow A_y + 6 - 6.75 - 2.25 = 0 \Rightarrow A_y = 3 \text{ kN}$$

الاحتكاك الجاف

قوة الاحتكاك :



إذا وضعنا جسماً وزنه W على مستوى أفقي خشن فإننا نلاحظ أن الجسم يكون متزاناً تحت تأثير رد فعل المستوى R ووزن الجسم W ، وإذا أثر عليه بقوة أفقية P مماسة للمستوى ولم يتحرك الجسم فهذا يعني أن هناك قوة خفية تقاوم حركة الجسم تسمى بقوة الاحتكاك ويرمز لها بالرمز F .

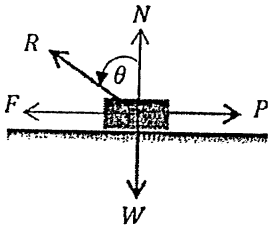


تعريف قوة الاحتكاك :

هي قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن وتكون في اتجاه معاكس للقوة المؤثرة على الجسم .

قوة الاحتكاك النهائية $F(max)$:

مقدار قوة الاحتكاك F يزداد تدريجياً كلما ازدادت قيمة القوة P المؤثرة على الجسم ويكون مساوياً لها طالما الجسم متزاناً إلى أن يصل مقدار قوة الاحتكاك أكبر ما يمكن وعندئذ يصبح الجسم على وشك الحركة .



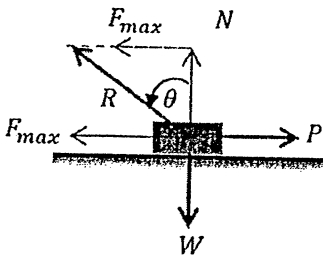
تعريف قوة الاحتكاك النهائية :

هي القيمة النهائية لمقدار قوة الاحتكاك والتي يكون عندها الجسم على وشك الحركة

معامل الاحتكاك الساكن :

تسمى النسبة بين مقداري قوة الاحتكاك النهائية F_{max} ورد الفعل العمودي N

بمعامل الاحتكاك الساكن بين السطحين ويرمز له بالرمز μ_s



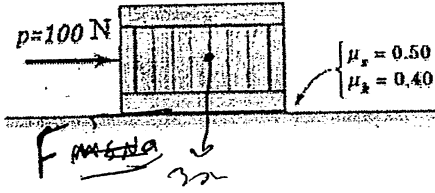
$$\mu_s = \frac{F(max)}{N} \Rightarrow F(max) = \mu_s N$$

زاوية الاحتكاك :

كلما ازداد مقدار قوة الاحتكاك فإن قياس الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودي يزداد تبعاً لذلك .

وعندما تصل قوة الاحتكاك إلى نهايتها تسمى θ بزاوية الاحتكاك النهائية .

$$\tan \theta = \frac{F(max)}{N} \Rightarrow \mu = \tan \theta$$



مثال 1/ تؤثر القوة الأفقية 100 N على صندوق ساكن كتلته 30 kg احسب مقدار قوة الاحتكاك بين السطح الافقي والصندوق .

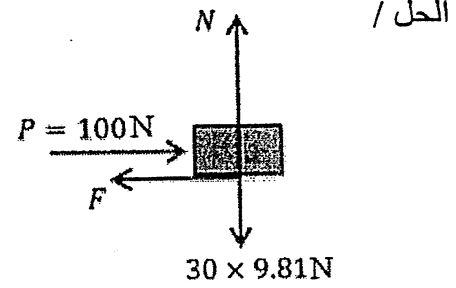
$$\sum F_x = 0 : F - 100 = 0 \Rightarrow F = 100 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 : N = 30 \times 9.81 = 294.3 \text{ N}$$

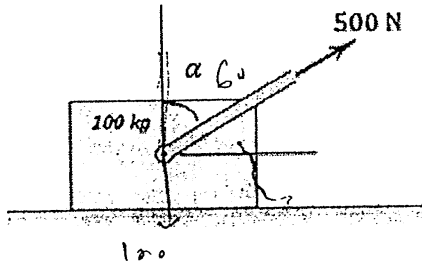
$$F(\max) = \mu_s N = 0.5 \times 294.3 = 147.15 \text{ N}$$

$\because F < F(\max) \Leftarrow$ القوة P لا تستطيع تحريك الصندوق

$$\therefore F = 100 \text{ N}$$



الحل /



مثال 2/ وضعت الكتلة 100 kg في حالة سكون على المستوى الأفقي

وأثرت عليها قوة $P = 500 \text{ N}$ بحيث يمكن تغيير اتجاه هذه

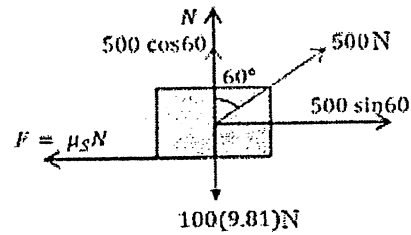
القوة . فإذا أصبحت الكتلة على وشك الحركة عندما $\alpha = 60^\circ$

فاحسب معامل الاحتكاك الساكن بين الكتلة والمستوى .

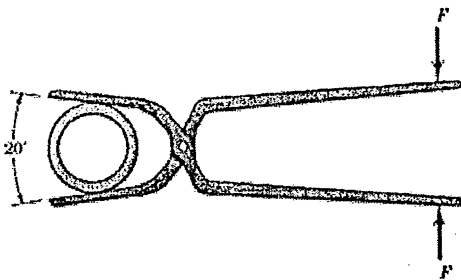
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = 100(9.81) - 500 \cos 60 = 731$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \mu_s N = 500 \sin 60$$

$$731 \mu_s = 433 \Rightarrow \mu_s = 0.59$$



الحل /



مثال 3/ يستخدم ملقط للامساك بأنابيب من الصلب حارة يتم تسخينها .

فإذا كانت زاوية الفك تساوي 20° فما هي أصغر قيمة لمعامل

الاحتكاك بين فكي الملقط والأنبوب تسمح بامساك الأنبوب دوم انزلاق .

$$\sum F_x = 0 : F \cos 10 - N \sin 10 = 0$$

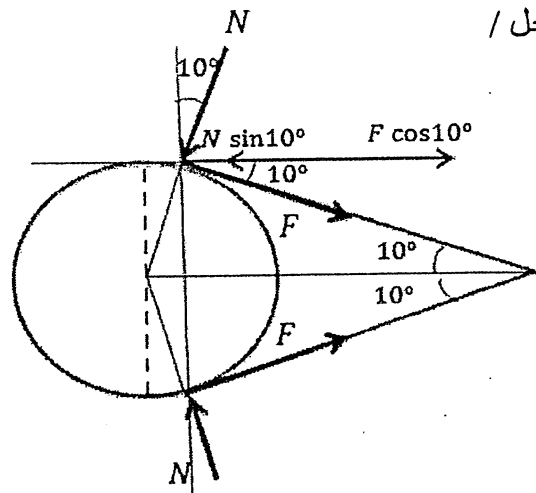
$$, F = \mu N$$

$$\Rightarrow \mu N \cos 10 - N \sin 10 = 0$$

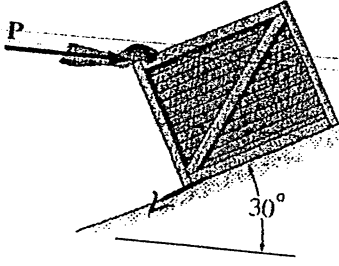
$$\Rightarrow \mu \cos 10 - \sin 10 = 0$$

$$\Rightarrow \mu \cos 10 = \sin 10$$

$$\Rightarrow \mu = \tan 10 = 0.176$$



الحل /



مثال 4 / في الشكل المقابل صندوق كتلته 50 Kg موضوع على مستوى مائل خشن وتؤثر عليه قوة أفقية P . فإذا كان معامل الاحتكاك بين الصندوق والمستوى $\mu_s = 0.25$ احسب :

- (a) أقل قوة أفقية تعمل على منع انزلاق الصندوق إلى الأسفل .
(b) أقل قوة أفقية تعمل على رفع الصندوق إلى الأعلى .

$$\begin{aligned} a) \sum F_y = 0 &\Rightarrow N - P \sin 30 - 50(9.81) \cos 30 = 0 \\ &\Rightarrow N = 0.5 P + 424.8 \end{aligned} \quad \rightarrow (1)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 0.25 N + P \cos 30 - 50(9.81) \sin 30 = 0 \rightarrow (2)$$

من المعادلتين (1) و (2)

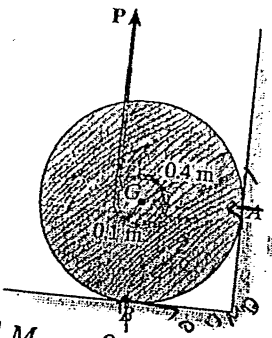
$$\begin{aligned} 0.25 (0.5 P + 424.8) + P \cos 30 - 50(9.81) \sin 30 &= 0 \\ \Rightarrow P = 140.3 \text{ N} , N = 495 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \sum F_y = 0 &\Rightarrow N - P \sin 30 - 50(9.81) \cos 30 = 0 \\ &\Rightarrow N = 0.5 P + 424.8 \end{aligned} \quad \rightarrow (1)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P \cos 30 - 0.25 N - 50(9.81) \sin 30 = 0 \rightarrow (2)$$

من المعادلتين (1) و (2)

$$\begin{aligned} P \cos 30 - 0.25 (0.5 P + 424.8) - 50(9.81) \sin 30 &= 0 \\ \Rightarrow P = 474.9 \text{ N} , N = 662 \text{ N} \end{aligned}$$



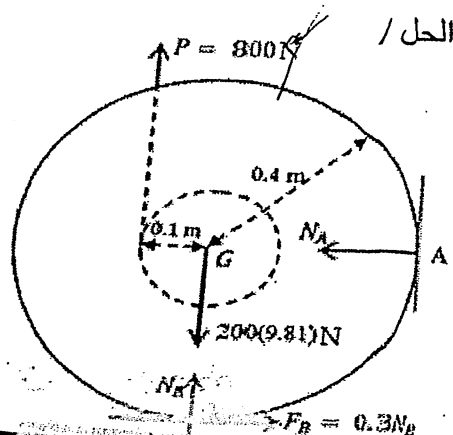
مثال 5 / بكرة كتلتها 200 kg تستقر على جدار ناعم وأرضية خشنة ، فإذا كان معامل الاحتكاك عند B $(\mu_s = 0.3, \mu_k = 0.2)$. أوجد قوة الاحتكاك عند B إذا كانت القوة الرأسية $P = 800 \text{ N}$.

$$\begin{aligned} \sum M_G = 0 &\Rightarrow F_B (0.4) - 800(0.1) = 0 \Rightarrow F_B = 200 \text{ N} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow F_B - N_A = 0 \Rightarrow F_B = N_A \end{aligned} \quad \rightarrow (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_B + 800 - 200(9.8) = 0 \Rightarrow N_B = 1160 \text{ N}$$

$$(F_B)_{\max} = \mu_s \cdot N_B = 0.3(1160) = 348 \text{ N}$$

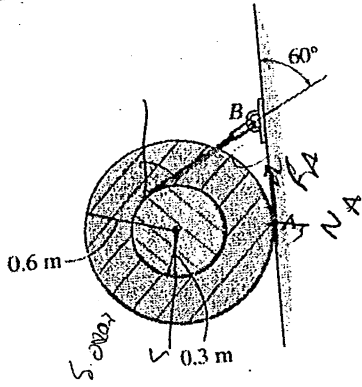
$$\because (F_B)_{\max} > F_B \Rightarrow F_B = 200 \text{ N} \quad (\text{البكرة ليست على وشك الحركة})$$



الحل /

ميكانيكا هندسية 1

مثال 6 / أوجد أصغر معامل احتكاك بين البكرة المنتظمة 50kg والحائط لمنع انزلاق البكرة .



$$\sum M_A = 0 : - 50(9.81)(0.6) - T \sin 60 (0.3 \sin 60) - T \cos 60 (0.3 \cos 60 + 0.6) = 0$$

$$\Rightarrow T = 490 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 : T \sin 60 - N_A = 0 \Rightarrow N_A = T \sin 60$$

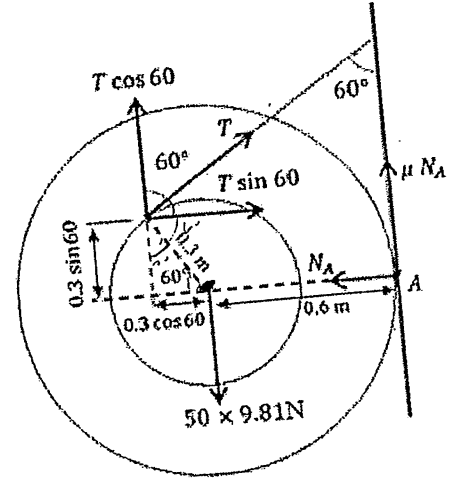
$$\Rightarrow N_A = 424.4 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 : T \cos 60 + \mu N_A - 50(9.81) = 0$$

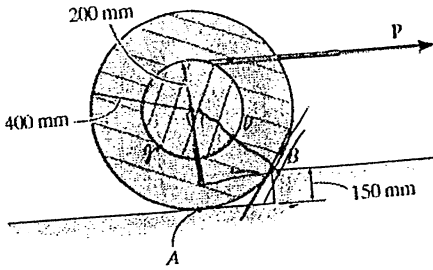
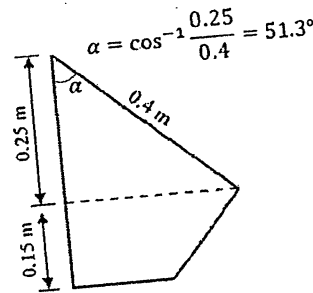
$$\Rightarrow 490 \cos 60 + \mu(424.4) - 50(9.81) = 0$$

$$\Rightarrow \mu = 0.6$$

الحل /



مثال 7 / إذا كان معامل الاحتكاك الاستاتيكي عند النقاط B, A هي $\mu_s = 0.3$ ، $\mu_s = 0.2$ على الترتيب . أوجد أصغر قوة أفقية التي تجعل البكرة 150 Kg على وشك الحركة فوق العقبة B .



$$\alpha = \cos^{-1} \frac{0.25}{0.4} = 51.3^\circ$$

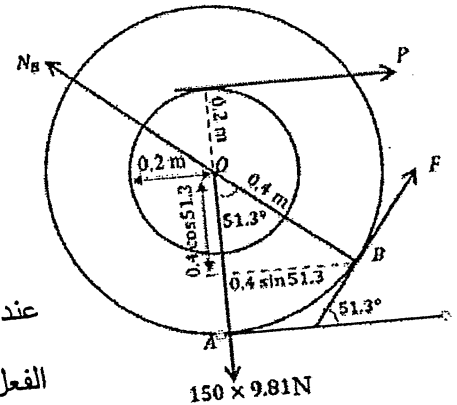
عندما تكون البكرة على وشك الحركة فوق العقبة B يتلاشى كل من رد الفعل العمودي وقوة الاحتكاك عند A أي أن $(F_A = 0$ و $N_A = 0)$

$$\therefore \sum M_B = 0 :$$

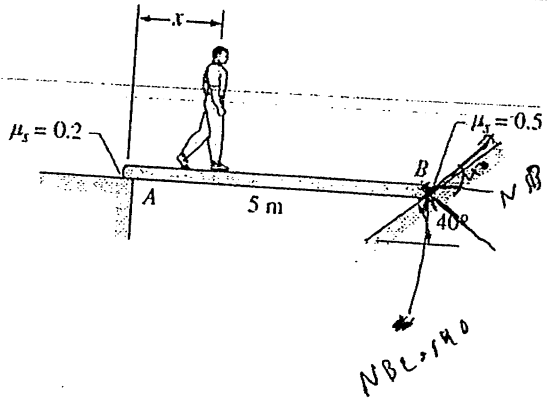
$$150(9.81)(0.4 \sin 51.32) - P(0.2 + 0.4 \cos 51.32) = 0$$

$$\Rightarrow P = 1021.1 \text{ N}$$

الحل /

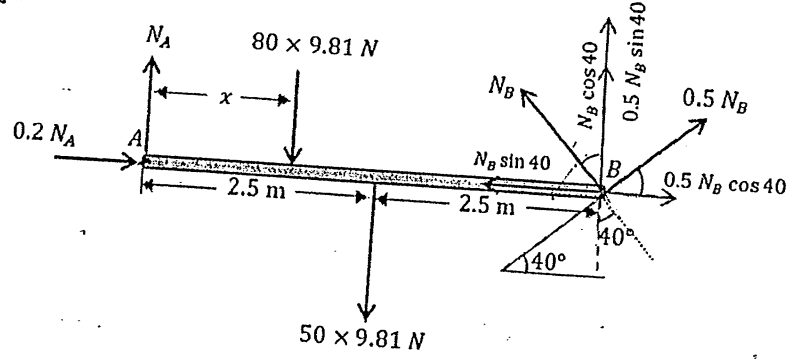


حل



مثال 8 / في الشكل المقابل : يمشي رجل كتلته 80 kg على لوح خشبي كتلته 50 kg من النقطة A ومتجها نحو B . احسب أقصى مسافة x يمكن أن يتحركها الرجل دون أن ينزلق اللوح .

الحل /



$$\sum F_x = 0 : 0.2 N_A - N_B \sin 40 + 0.5 N_B \cos 40 = 0$$

$$0.2 N_A - 0.2598 N_B = 0 \Rightarrow N_B = 0.7698 N_A \quad \text{--- (1)}$$

$$\sum F_y = 0 : N_A - 80 \times 9.81 - 50 \times 9.81 + N_B \cos 40 + 0.5 N_B \sin 40 = 0$$

$$N_A + 1.0874 N_B = 1275.3 \quad \text{--- (2)}$$

بحل المعادلتين 1 و 2 :

$$N_A + 1.0874 (0.7698 N_A) = 1275.3 \Rightarrow 1.8371 N_A = 1275.3$$

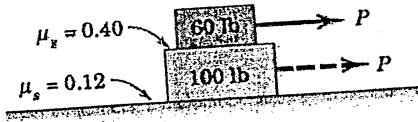
$$\Rightarrow N_A = 694.2 \text{ N}, N_B = 534.4 \text{ N}$$

$$\because \sum M_A = 0 : N_B \cos 40 (5) + 0.5 N_B \sin 40 (5) - 50 \times 9.81 (2.5) - 80 \times 9.81 (x) = 0$$

$$5.4372 N_B - 784.8 x = 1226.25$$

$$5.4372 (534.4) - 784.8 x = 1226.25 \Rightarrow x = 2.14 \text{ m}$$

مثال 9 / من الشكل المقابل أوجد القوة الأفقية P اللازمة لبدء الحركة إذا كانت تؤثر في الكتلة التي وزنها



60 lb (b) 100 lb (a)

الحل /

(a) $\sum F_y = 0 : N = 160 \text{ lb}$

$\sum F_x = 0 : P = 0.12 N \Rightarrow P = 0.12(160) = 19.2 \text{ lb}$

(b)

بفرض أن 60 lb تتحرك بمفردها:

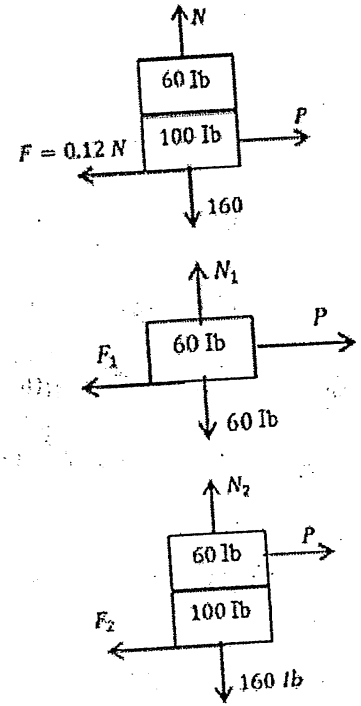
$\sum F_y = 0 : N_1 = 60 \text{ lb} \Rightarrow F_1 = 0.4 N_1 = 24 \text{ lb}$

بفرض أن 60 lb و 100 lb تتحركان معاً:

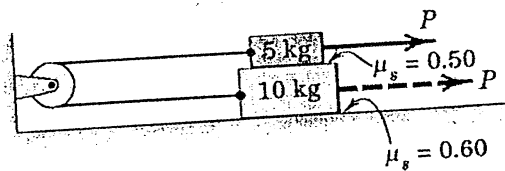
$\sum F_y = 0 : N_2 = 160 \text{ lb} \Rightarrow F_2 = 0.12 N_2 = 19.2 \text{ lb}$

$F_1 > F_2 \therefore$ الكتلتان تتحركان معاً

$\sum F_x = 0 : P = F_2 = 19.2 \text{ lb}$



مثال 10 / من الشكل المقابل أوجد القوة الأفقية P اللازمة لبدء الحركة إذا كانت تؤثر في



5 Kg (a) الكتلة 10 Kg (b) الكتلة

الحل /

(a) $\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 = 5(9.81)$: الكتلة 5 Kg

$\Rightarrow F_1 = 0.5 \times 5(9.81) = 24.5 \text{ N}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow P = T + F_1$

: الكتلة 10 Kg

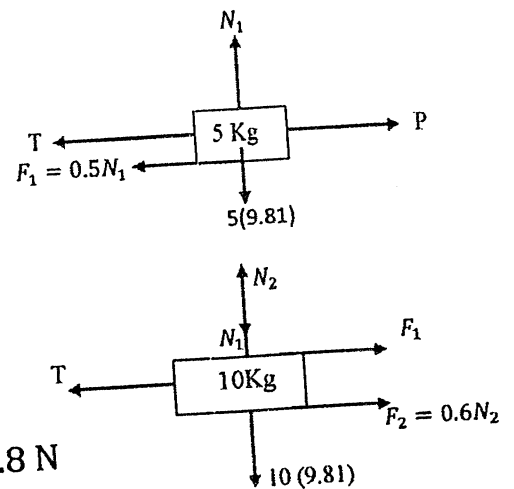
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_2 = N_1 + 98.1$

$= 5(9.81) + 98.1 = 147.2 \text{ N}$

$\Rightarrow F_2 = 0.6(147.2) = 88.3 \text{ N}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow T = F_1 + F_2 = 24.5 + 88.3 = 112.8 \text{ N}$

$\Rightarrow P = 112.8 + 24.5 = 137.3 \text{ N}$



$$(b) \sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 = 5(9.81) = 49.1 \text{ N} \quad : \text{ الكتلة } 5 \text{ Kg}$$

$$\Rightarrow F_1 = 0.5(49) = 24.5 \text{ N}$$

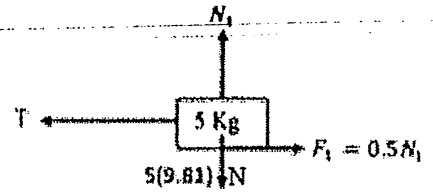
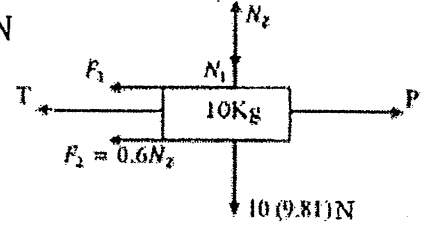
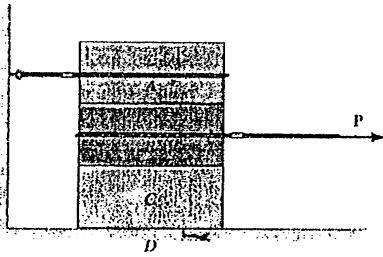
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T = F_1 = 24.5 \text{ N}$$

: الكتلة 10 Kg

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_2 = N_1 + 98.1 = 49.1 + 98.1 = 147.2 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F_2 = 0.6(147.2) = 88.3 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P = F_1 + F_2 + T = 24.5 + 88.3 + 24.5 = 137.3 \text{ N}$$



مثال 11 / الكتلة A ، B ، C تزن 15 lb ، 25 lb ، 50 lb على الترتيب ، أوجد

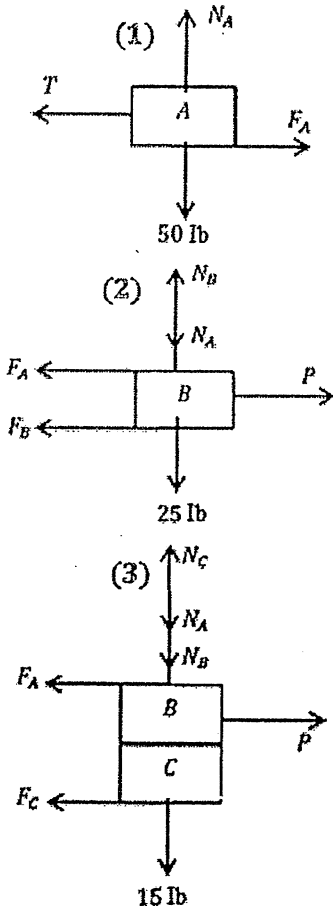
أصغر قوة أفقية P تسبب في بدء الحركة ، علماً بأن معامل الاحتكاك بين

A ، B هو $\mu_s = 0.3$ وبين B ، C هو $\mu_s = 0.4$ وبين C ، D هو $\mu_s = 0.35$.

هو $\mu_s = 0.35$.

/ الحل

الكتلة A : من الشكل (1)



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_A = 50 \text{ lb}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_A = T, F_A = \mu N_A = 0.3(50) = 15 \text{ lb}$$

بفرض أن الكتلة B تكون على وشك الحركة بمفردها: من الشكل (2)

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = N_A + 25 = 50 + 25 = 75 \text{ lb}$$

$$\Rightarrow F_B = \mu N_B = 0.4(75) = 30 \text{ lb}$$

بفرض أن الكتلة B و C تكونان على وشك الحركة معاً : من الشكل (3)

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_C = N_A + N_B + 15 = 50 + 25 + 15 = 90 \text{ lb}$$

$$\Rightarrow F_C = \mu N_C = 0.35(90) = 31.5 \text{ lb}$$

الكتلة B تكون على وشك الحركة بمفردها $\because F_C > F_B$

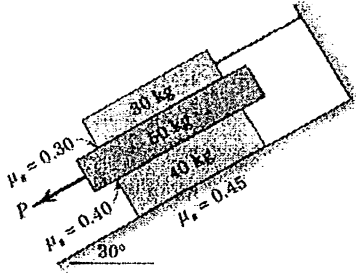
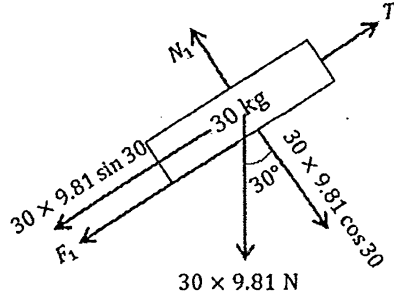
من الشكل (2) :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P = F_A + F_B = 15 + 30 = 45 \text{ lb}$$

مثال 12/ من الشكل المقابل احسب أقصى قيمة يمكن أن تأخذها القوة P قبل حدوث الانزلاق .

الحل /

الكتلة 20 Kg :



$$\sum F_y = 0 : N_1 = 30 \times 9.81 \cos 30 = 255 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F_1 = 0.3(255) = 76.5 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 : T = F_1 + 30 \times 9.81 \sin 30 = 223.65 \text{ N}$$

بفرض أن الكتلة 50 Kg تكون على وشك الحركة بمفردها :

$$\sum F_y = 0 : N_2 = N_1 + 50 \times 9.81 \cos 30$$

$$= 255 + 50 \times 9.81 \cos 30 = 680 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F_2 = 0.4(680) = 272 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 : F_1 + F_2 = P + 50 \times 9.81 \sin 30$$

بفرض أن الكتلة 50 Kg والكتلة 40 Kg تكونان على وشك الحركة معاً :

$$\sum F_y = 0 : N_3 = N_2 + 40 \times 9.81 \cos 30$$

$$= 680 + 40 \times 9.81 \cos 30 = 1020 \text{ N}$$

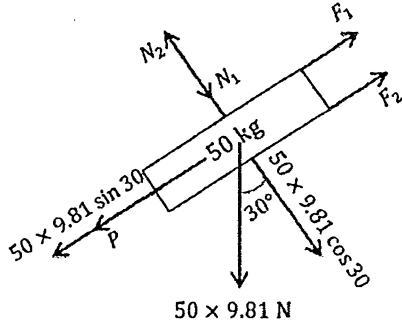
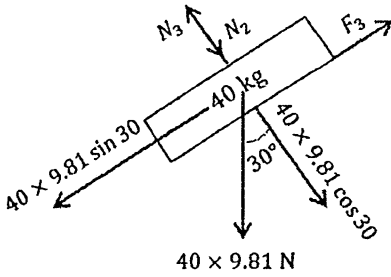
$$\Rightarrow F_3 = 0.45(1020) = 458.9 \text{ N}$$

$\because F_3 > F_2 \Leftarrow$ الفرض الأخير غير صحيح والفرض الأول صحيح

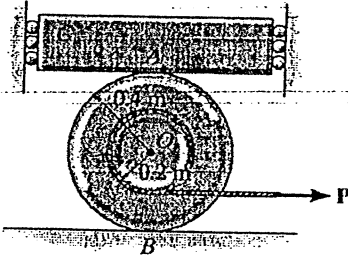
أي أن استبقية الانزلاق للكتلة 50 Kg

$$\therefore 76.5 + 272 = P + 50 \times 9.81 \sin 30$$

$$\Rightarrow P = 103.25 \text{ N}$$



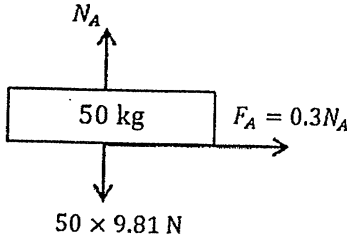
ميكانيكا هندسية 1



مثال 13/ في الشكل الحجر C كتلته 50 kg محصورة بين جدارين بواسطة منحرجات بحيث تسمح له بالحركة لأعلى ولأسفل ، فإذا كان الحجر مستقر فوق بكرة كتلته 40 kg كما بالشكل احسب أكبر قوة أفقية P يمكن أن تؤثر بها على البكرة وتحافظ على الاتزان علماً بأن معامل الاحتكاك عند A, B هو $\mu_s = 0.3$ $\mu_s = 0.6$ على الترتيب .

الحل /

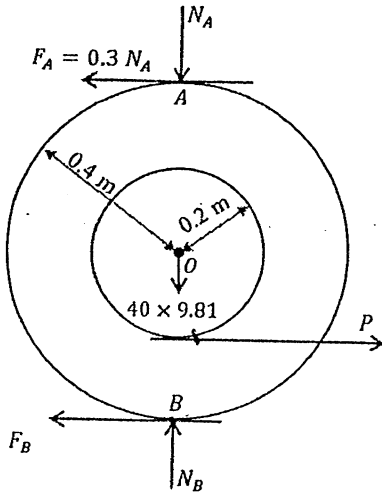
الكتلة C :



$$\sum F_y = 0 : N_A = 50(9.81) \text{ N}$$

$$\Rightarrow F_A = 0.3 (50)(9.81) = 147.2 \text{ N}$$

البكرة :



$$\sum F_y = 0 : N_B - N_A - 40(9.81) = 0$$

$$\Rightarrow N_B = 50(9.81) + 40(9.81) = 882.9 \text{ N}$$

$$\sum M_B = 0 : 147.2 (0.8) - P (0.2) = 0 \Rightarrow P = 588.8 \text{ N}$$

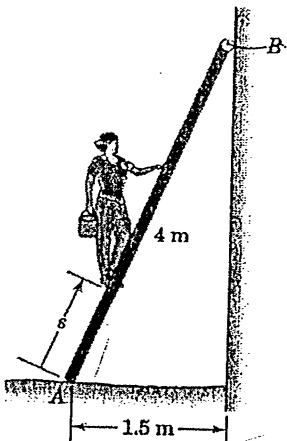
$$\sum F_x = 0 : P - F_B - 147.2 = 0$$

$$\Rightarrow F_B = 588.8 - 147.2 = 441.6 \text{ N}$$

لاحظ أن

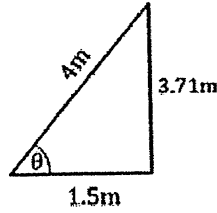
$$(F_B)_{max} = 0.6 N_B = 0.6 (882.9) = 529.7 \text{ N} > 441.6 \text{ N}$$

إذن البكرة محافظة على اتزانها

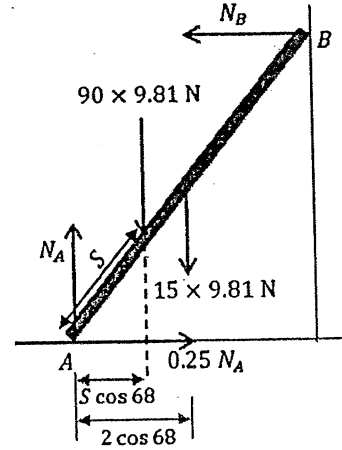


مثال 14/ يصعد رجل كتلته 90 kg سلم منتظم كتلته 15 kg طوله 4 m مثبت بطرفه العلوي بكرة صغيرة ومعامل الاحتكاك بين طرفه السفلي والارض هو $\mu_s = 0.25$. احسب أطول مسافة s يصعدها الرجل دون أن يحدث انزلاق للسلم علماً أن مركز ثقل الرجل فوق قدميه مباشرة .

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1.5}{4}\right) = 68^\circ$$



الحل /



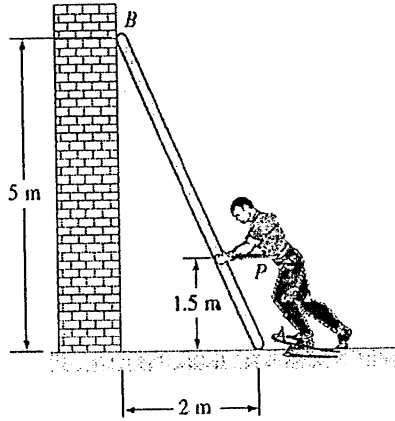
$$\sum F_y = 0 : N_A = 90(9.81) + 15(9.81) = 1030 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 : N_B = 0.25 N_A = 257.5 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 :$$

$$257.5 (3.71) - 15 \times 9.81 (2 \cos 68) - 90 \times 9.81 (S \cos 68) = 0$$

$$S = 2.55 \text{ m}$$



مثال 15 / يحاول رجل دفع سلم منتظم كتلته 20 kg بواسطة قوة أفقية P كما بالشكل . احسب أصغر قيمة لـ P تدفع السلم نحو الحائط علماً بأن معامل الاحتكاك الساكن بين السلم ونقاط التلامس هو 0.3 .

الحل /

$$\sum F_x = 0 : N_B + 0.3 N_A - P = 0$$

$$\Rightarrow P = N_B + 0.3 N_A \quad \text{--- 1}$$

$$\sum F_y = 0 : N_A + 0.3 N_B = 196.2 \quad \text{--- 2}$$

$$\sum M_A = 0 :$$

$$-N_B(5) + 0.3 N_B (2) + P(1.5) + 196.2(1) = 0 \quad \text{--- 3}$$

من المعادلتين 1 و 3 :

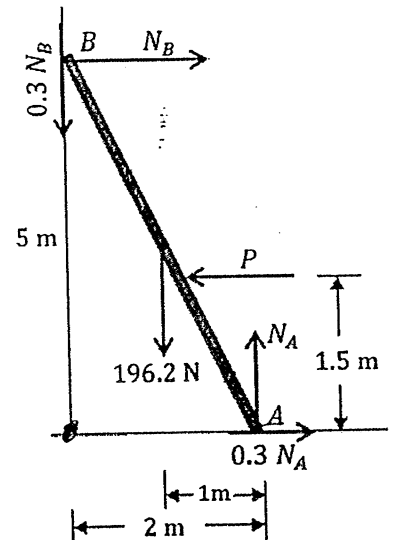
$$-5N_B + 0.6 N_B + 1.5N_B + 0.45 N_A + 196.2 = 0$$

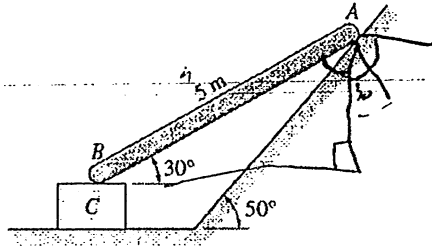
$$0.45 N_A - 2.9 N_B = -196.2 \quad \text{--- 4}$$

$$N_A = 168.1 \text{ N} , N_B = 93.7 \text{ N} \quad \text{بحل المعادلتين 2 و 4 :}$$

بالتعويض في المعادلة 1 :

$$P = N_B + 0.3 N_A = 93.7 + 0.3(168.1) = 43.27 \text{ N}$$





مثال 16/ في الشكل المقابل القضيب المنتظم AB كتلته 500 kg وكتلة الكتلة C 300 kg ومعامل الاحتكاك الساكن عند A ضئيل جداً ومعامل الاحتكاك الساكن عند الاسطح المتلامسة الاخرى 0.4 . هل ينزلق القضيب أم يظل في وضع الاتزان ؟

الحل / أولاً ندرس اتزان القضيب عند النقطة B

$$\sum M_A = 0 : N_A \cos 40 (5 \sin 30) + N_A \sin 40 (5 \cos 30)$$

$\Rightarrow$

$$-4905(2.5 \cos 30) = 0 \Rightarrow N_A = 2260.24 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 : F_B - N_A \cos 40 = 0$$

$$\Rightarrow F_B = 2260.24 \cos 40 = 1731.44 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 : N_B + N_A \sin 40 = 4905$$

$$\Rightarrow N_B = 4905 - 2260.24 \sin 40 = 3452.15 \text{ N}$$

$$\therefore F_B(\max) = \mu N_B = 0.4 (3452.15) = 1380.8 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F_B > F_B(\max) \Rightarrow \text{يحدث انزلاق عند } B$$

ثانياً / ندرس اتزان الحجر على سطح الأرض

$$\sum F_x = 0 : F_C = F_B = 1731.44 \text{ N}$$

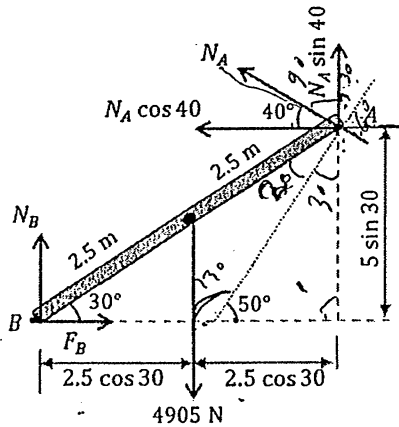
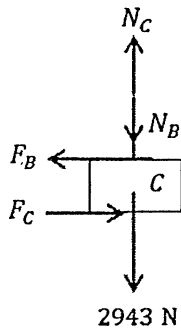
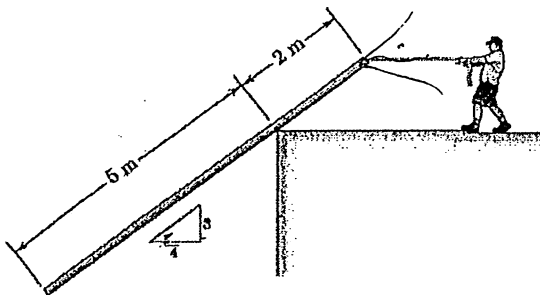
$$\sum F_y = 0 : N_C = N_B + 2943 = 3452.15 + 2943 = 6395.15$$

$$\therefore F_C(\max) = \mu N_C = 0.4 (6395.15) = 2558.06 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F_C < F_C(\max)$$

لا يحدث انزلاق لأن قوة الاحتكاك تحت الكتلة C لم تتجاوز القيمة القصوى

إذن القضيب سوف ينزلق عند طرفه B



مثال 17/ هل يستطيع عامل على افتراض أن لديه القوة أن يحافظ بواسطة شد حبل في الاتجاه الأفقي على اتزان لوح طوله 7 m وكتلته 60 kg كما بالشكل ؟ علماً بأن معامل الاحتكاك الساكن بين اللوح و سطح البناية هو 0.3

الحل /

$$\sum M_A = 0 : P \left(\frac{3}{5} \right) (2) - 588.6 \left(\frac{4}{5} \right) (1.5) = 0$$

$$\Rightarrow P = 588.6 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 : P \left(\frac{4}{5} \right) - F_A - 588.6 \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$

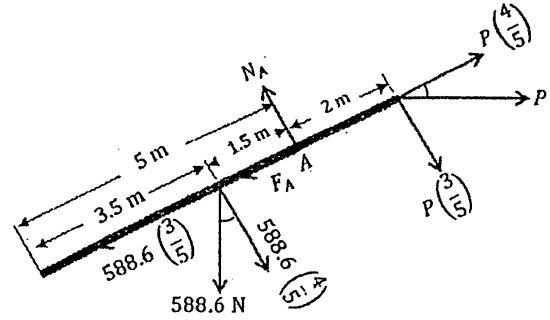
$$\Rightarrow F_A = 588.6 \left(\frac{4}{5} \right) - 588.6 \left(\frac{3}{5} \right) = 117.72 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 : N_A - P \left(\frac{3}{5} \right) - 588.6 \left(\frac{4}{5} \right) = 0$$

$$\Rightarrow N_A = 588.6 \left(\frac{3}{5} \right) + 588.6 \left(\frac{4}{5} \right) = 824.04 \text{ N}$$

$$\therefore F_A(\max) = \mu N_A = 0.3(824.04) = 247.2 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F_A < F_A(\max)$$



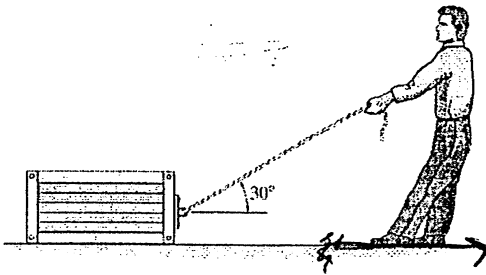
∴ لا يحدث انزلاق ⇐ الرجل يستطيع أن يحافظ على اتزان اللوح .

مثال 18/ في الشكل المقابل صندوقا كتلته 150 Kg ومعامل الاحتكاك

بينه وبين الأرض $\mu_s = 0.3$. بين ما إذا كان الرجل

يستطيع تحريك الصندوق أم لا . علما أن كتلة الرجل 80 Kg

ومعامل الاحتكاك بينه وبين الأرض $\mu_s = 0.4$



الحل /

بالنسبة للصندوق : نفرض أن الصندوق على وشك الحركة

$$\sum F_y = 0 : N_C + P \sin 30 - 1471.5 = 0$$

$$\Rightarrow N_C = 1471.5 - P \sin 30 \quad \text{----- 1}$$

$$\sum F_x = 0 : P \cos 30 - 0.3 N_C = 0 \quad \text{----- 2}$$

$$P \cos 30 - 0.3 [1471.5 - P \sin 30] = 0 \quad \text{من (1) و (2) :}$$

$$\Rightarrow P = 434.49 \text{ N} , \quad N_C = 1254.26 \text{ N}$$

بالنسبة للرجل :

$$\sum F_y = 0 : N_m - 434.49 \sin 30 - 784.8 = 0$$

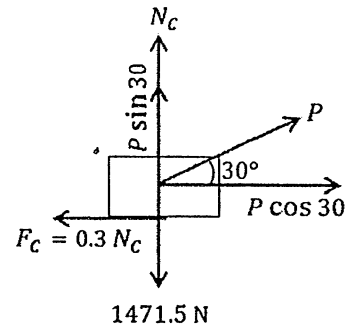
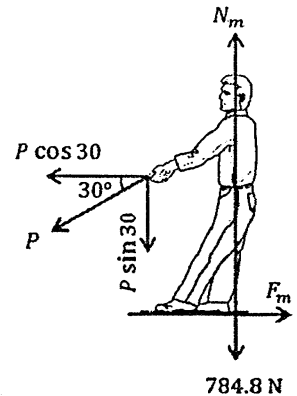
$$\Rightarrow N_m = 1002.4 \text{ N}$$

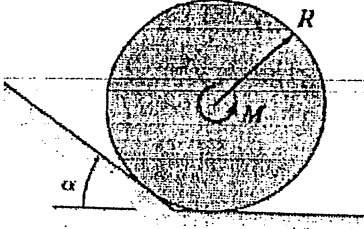
$$\sum F_x = 0 : F_m - 434.49 \cos 30 = 0 \Rightarrow F_m = 376.28 \text{ N}$$

$$\therefore F_m(\max) = \mu_s N_m = 0.4 (1002.4) = 400.82 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F_m < F_m(\max)$$

∴ الرجل يستطيع تحريك الصندوق





مثال 19 / الأسطوانة المتجانسة لها وزن W ، ومعامل الاحتكاك بين السطحين μ_s احسب اقل قيمة لـ μ_s بسببها العزم المسلط على الأسطوانة يجعلها تتدحرج على السطح المائل دون أن تنزلق . وما مقدار العزم عندئذ .

الحل /

الأسطوانة على وشك الحركة على المستوى المائل

لهذا رد فعل المستوى الأفقي على الأسطوانة يساوي صفر .

$$\sum F_x = 0 : N \sin \alpha - \mu_s N \cos \alpha = 0 \dots (1)$$

$$N(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha) = 0$$

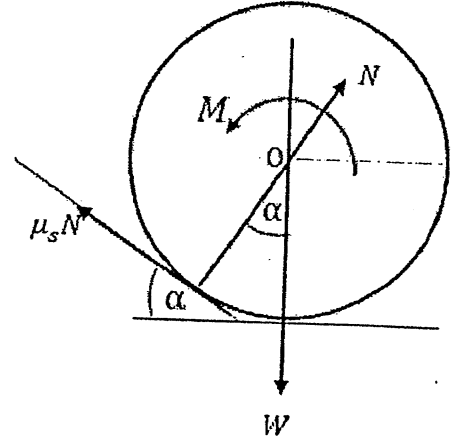
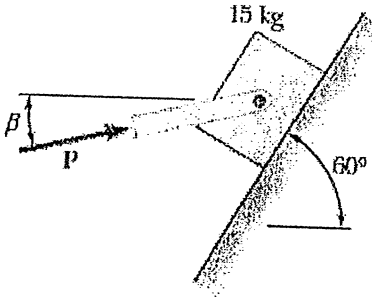
$$\Rightarrow \sin \alpha - \mu_s \cos \alpha = 0 \Rightarrow \mu_s)_{min} = \tan \alpha$$

$$\sum F_y = 0 : N \cos \alpha - \mu_s N \sin \alpha - W = 0$$

$$N(\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha) = W$$

$$N = \frac{W}{\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha} \dots (2)$$

$$\sum M_0 = 0 : M - \mu_s N(R) = 0 \Rightarrow M = \mu_s N(R)$$



20 - إذا علمت أن معامل الاحتكاك بين الكتلة والسطح المائل $\mu_s = 0.25$

احسب أقل قوة P تحافظ على اتزان الكتلة واحسب الزاوية β .

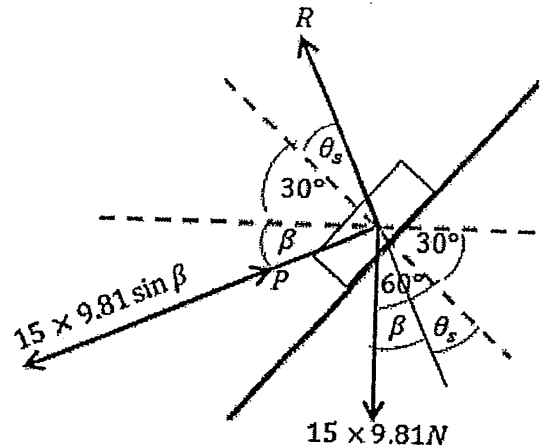
الحل /

$$\mu_s = \tan \theta_s \Rightarrow \theta_s = \tan^{-1} 0.25 = 14^\circ$$

$$\therefore \beta = 60^\circ - 14^\circ = 46^\circ$$

$$\sum F = 0 : P - 15 \times 9.81 \sin \beta = 0$$

$$P = 15 \times 9.81 \sin 46^\circ = 105.9 \text{ N}$$

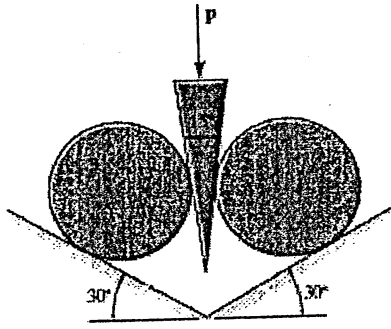
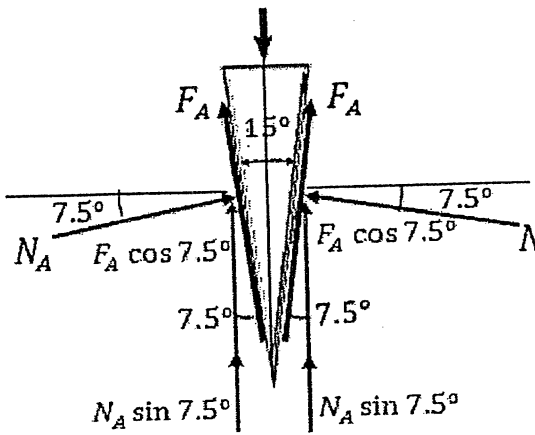
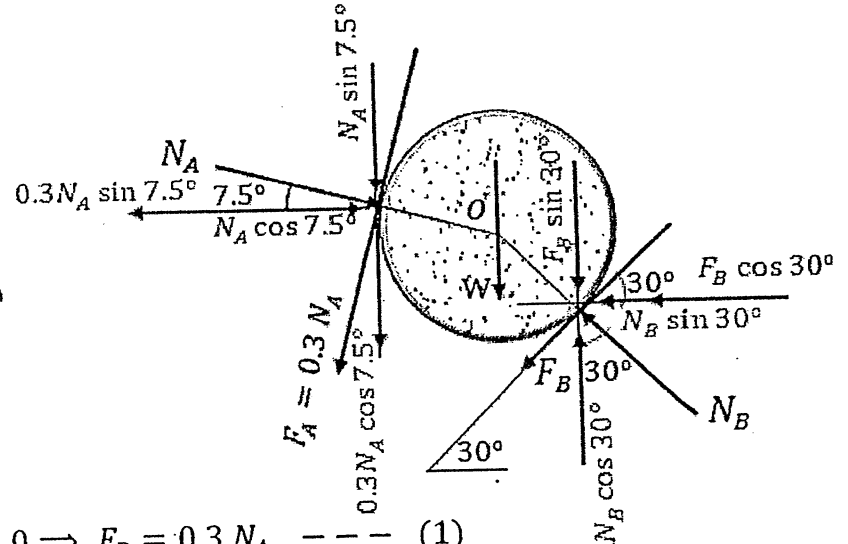


(21) احسب أصغر قوة عمودية P اللازمة لتدفع الوتد بين الكرتين

علما بأن كل من الكرتين لهما وزن W ومعامل الاحتكاك عند

نقاط اتصال الأسطح $\mu_s = 0.3$.

الحل / المطلوب أقل قوة P (عندها يكون الوتد على وشك الحركة)



$$\sum M_O = 0 : 0.3 N_A(r) - F_B(r) = 0 \Rightarrow F_B = 0.3 N_A \quad \text{--- (1)}$$

$$\sum F_x = 0 : N_A \cos 7.5^\circ - 0.3 N_A \sin 7.5^\circ - F_B \cos 30^\circ - N_B \sin 30^\circ = 0$$

$$F_B = N_A \Rightarrow 0.9914 N_A - 0.0392 N_A - 0.8860(0.3) N_A - 0.5 N_B = 0$$

$$\Rightarrow 0.6864 N_A - 0.5 N_B = 0 \Rightarrow N_A = 0.7284 N_B \quad \text{--- (2)}$$

$$\sum F_y = 0 : N_B \cos 30^\circ - 0.3 N_A \cos 7.5^\circ - F_B \sin 30^\circ - N_A \sin 7.5^\circ - W = 0$$

$$F_B = 0.3 N_A \Rightarrow 0.8860 N_B - 0.2974 N_A - 0.5(0.3) N_A - N_A 0.1305 = W$$

$$\Rightarrow 0.8860 N_B - 0.5779 N_A = W \quad \text{--- (3)}$$

بحل المعادلتين (2) ، (3) :

$$\Rightarrow 0.8860 N_B - 0.5779 (0.7284 N_B) = W \Rightarrow 0.4651 N_B = W$$

$$\Rightarrow N_B = 2.2 W \Rightarrow N_A = 0.7284 (2.2 W) = 1.6 W$$

$$\Rightarrow F_B = 0.3 (1.6 W) = 0.48 W$$

$$F_{B_{\max}} = 0.3 N_B = 0.3(2.2 W) = 0.66 W \Rightarrow F_B < F_{B_{\max}}$$

إذن قوة الاحتكاك بين الكرة والمستوى المائل $F_B = 0.48 W$.

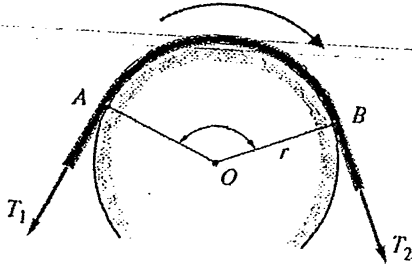
ومن الشكل الحر للوتد :

$$\sum F_y = 0 : P = 2F_A \cos 7.5^\circ + 2N_A \sin 7.5^\circ$$

$$P = 2(0.3 N_A) \cos 7.5^\circ + 2N_A \sin 7.5^\circ = 0.6(1.6 W) \cos 7.5^\circ + 2(1.6 W) \sin 7.5^\circ$$

$$P = 1.37 W$$

احتكاك السيور اللينة



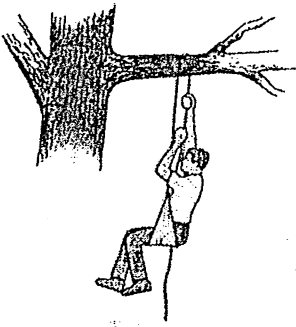
في الشكل حزام مسطح يمر فوق اسطوانة نصف قطرها r ، وعلى افتراض أن هناك احتكاك بين الحزام والاسطوانة و T_1 ، T_2 ليست متساوية وفقاً لنظرية الاحتكاك الجاف وهما قوتا الشد في الجانب المرتخي والجانب المشدود على الترتيب من الحزام ($T_2 > T_1$) والعلاقة بينهما هي

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta}$$

حيث: $\mu = \mu_k$ عند انزلاق الحزام، $\mu = \mu_s$ عندما يكون الحزام على وشك الانزلاق
 β ، الزاوية المركزية المقابلة للقوس AB بالـ (rad)

ملاحظات :

- 1- لا يقتصر استخدام العلاقة السابقة على الاسطح الاسطوانية فقط، فإنه يمكن أن تستخدم للسطح المنحني الثابت أيضاً .
- 2- إذا كان عدد لفات الحبل (الحزام) حول وتد هو n من اللفات فإن $\beta = 2n\pi$.



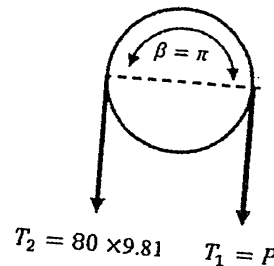
مثال 22/ يهبط رجل كتلته 80 kg بواسطة حبل ملفوف حول فرع شجرة أفقي فإذا كان معامل الاحتكاك بين الحبل والفرع هو 0.5 فاحسب القوة التي يجب أن يطبقها الرجل على الحبل ليهبط ببطء .

الحل /

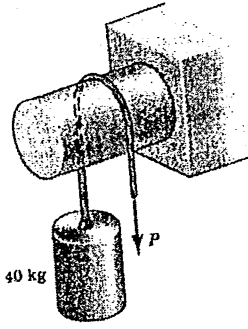
$$\because T_2 = T_1 e^{\mu\beta}, \mu = 0.5, \beta = \pi = \frac{22}{7}$$

$$80 \times 9.81 = P e^{0.5 \left(\frac{22}{7}\right)}$$

$$\Rightarrow P = 80 \times 9.81 e^{-0.5 \left(\frac{22}{7}\right)} = 163 \text{ N}$$



$$T_2 = 80 \times 9.81 \quad T_1 = P$$



مثال 23/ اسطوانة كتلتها 40 kg مربوطة بحبل ملفوف حول وتد ثابت كما بالشكل احسب مدى القوة الرأسية P بحيث تظل الاسطوانة في وضع الاتزان علماً بأن معامل الاحتكاك الاستاتيكي بين الحبل والانبوب 0.3

الحل /

$$\therefore T_2 = T_1 e^{\mu\beta}$$

نحسب أكبر قوة وهي القوة التي تجعل الاسطوانة على وشك الحركة إلى أعلى

$$T_2 = P_{max}, T_1 = 40 \times 9.81, \beta = 180^\circ = \frac{22}{7} \text{ rad}, \mu = 0.3$$

$$\Rightarrow P_{max} = 40 \times 9.81 e^{0.3\left(\frac{22}{7}\right)} = 1007.4 \text{ N}$$

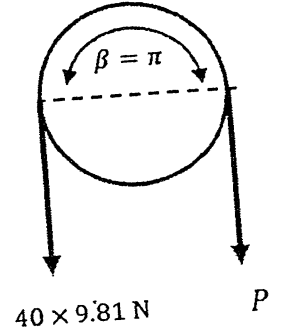
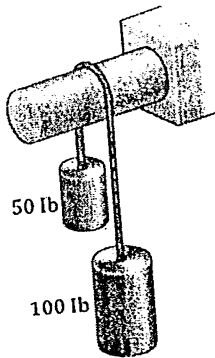
نحسب أصغر قوة وهي القوة التي تجعل الاسطوانة على وشك الحركة إلى أسفل

$$T_2 = 40 \times 9.81, T_1 = P_{min}, \beta = 180^\circ = \frac{22}{7} \text{ rad}, \mu = 0.3$$

$$\Rightarrow 40 \times 9.81 = P_{min} e^{0.3\left(\frac{22}{7}\right)}$$

$$\Rightarrow P_{min} = 40 \times 9.81 e^{-0.3\left(\frac{22}{7}\right)} = 152.8 \text{ N}$$

$$\therefore 152.8 \text{ N} \leq P \leq 1007.4 \text{ N}$$



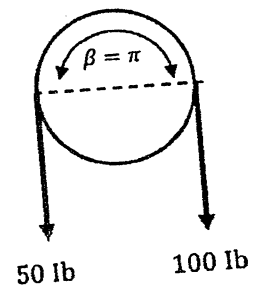
مثال 24/ ما هو أصغر معامل احتكاك بين الحبل والتد الثابت والذي يمنع الاسطوانتين من الحركة.

الحل /

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = e^{\pi\mu}$$

$$\Rightarrow \pi\mu = \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \Rightarrow \pi\mu = \ln\left(\frac{100}{50}\right) = \ln 2$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\ln 2}{\pi} = 0.221$$



مثال 25/ في الشكل المقابل الاسطوانتين على وشك الحركة أوجد معامل الاحتكاك بين الحبل والعمود الثابت .

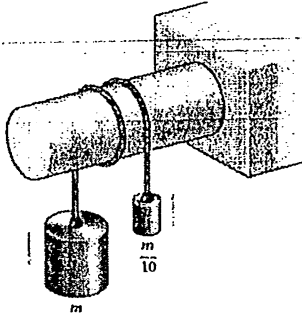
الحل /

∴ عدد اللفات = 1.25 لفة

$$\beta = 2\pi(1.25) = 3\pi \text{ rad}$$

$$\therefore \frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\beta} \Rightarrow \frac{mg}{mg/10} = e^{3\pi\mu} \Rightarrow e^{3\pi\mu} = 10$$

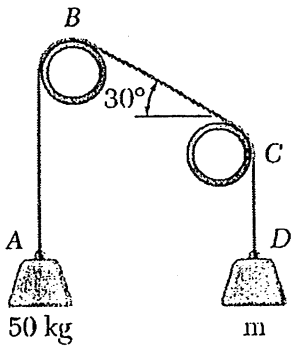
$$3\pi\mu = \ln 10 \Rightarrow \mu = \frac{\ln 10}{3\pi} = 0.244$$



مثال 26/ الحبل ABCD لف على أنبوبين كما في الشكل المقابل

(أ) أحسب أكبر كتلة m بحيث تظل المجموعة في وضع الاتزان وكذلك الشد بين الأنبوبين .

(ب) أحسب أصغر كتلة m بحيث تظل المجموعة في وضع الاتزان وكذلك الشد بين الأنبوبين . علماً بأن معامل الاحتكاك الساكن بين الحبل والأنبوبين 0.25 .



الحل /

(أ) أكبر كتلة : الكتلة m علي وشك الهبوط

$$\therefore \beta = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \Rightarrow m(9.81) = 50(9.81) e^{0.25\pi} \Rightarrow m = 109.7 \text{ kg}$$

$$\therefore \beta = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi \text{ rad}$$

مقدار الشد بين الأنبوبين :

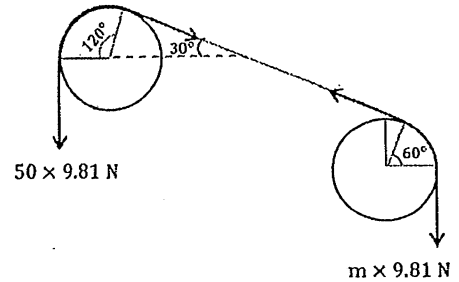
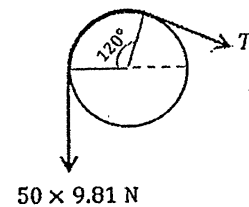
$$T = 50(9.81) e^{0.25(\frac{2}{3}\pi)} = 828 \text{ N}$$

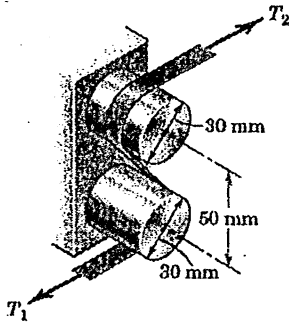
(ب) أصغر كتلة : الكتلة m علي وشك الصعود

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \Rightarrow 50(9.81) = m(9.81) e^{0.25\pi} \Rightarrow m = 50 e^{-0.25\pi} = 22.8 \text{ kg}$$

مقدار الشد بين الأنبوبين :

$$T = 50(9.81) e^{-0.25(\frac{2}{3}\pi)} = 290.6 \text{ N}$$





مثال 27 / ينزلق الشريط حول الوتدين كما هو موضح في الشكل تحت تأثير الشدين الأفقيين $T_1 = 40 \text{ N}$, $T_2 = 160 \text{ N}$. أوجد معامل الاحتكاك بين الشريك والوتاد .

الحل /

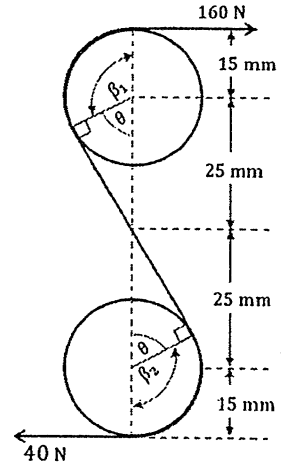
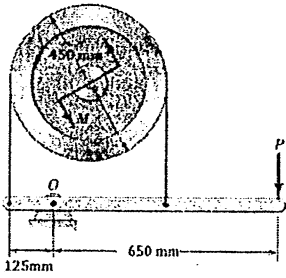
$$\theta = \cos^{-1} \frac{15}{25} = 53.13^\circ$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 180^\circ - 53.13^\circ = 126.87^\circ$$

$$\Rightarrow \beta = \beta_1 + \beta_2 = 253.74^\circ = 4.43 \text{ rad}$$

$$\therefore T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \Rightarrow e^{\mu\beta} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{160}{40}$$

$$\Rightarrow e^{\mu\beta} = 40 \Rightarrow \mu\beta = \ln 40 \Rightarrow \mu = \frac{\ln 40}{4.43} = 0.313$$



مثال 28 / يؤثر عزم في اتجاه ضد عقارب الساعة على القرص قدره 150 N.m . إذا كان معامل الاحتكاك بين الحزام والقرص هو 0.2 . احسب أصغر قوة P لازمة لمنع القرص من الدوران .

الحل /

من الشكل الحر للقرص :

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \Rightarrow T_2 = T_1 e^{0.2(\frac{22}{7})} \Rightarrow T_2 = 1.87 T_1 \quad \text{--- 1}$$

$$\sum M_A = 0 : T_1(0.225) - T_2(0.225) + 150 = 0 \quad \text{--- 2}$$

بحل المعادلتين :

$$T_1(0.225) - 1.87 T_1 (0.225) + 150 = 0$$

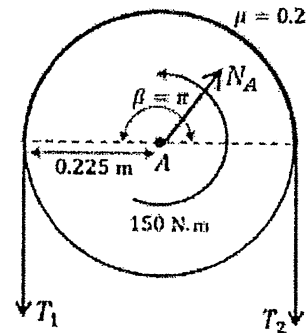
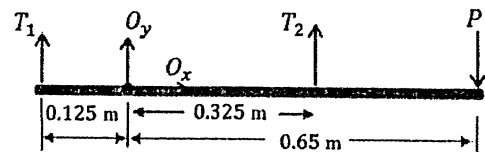
$$\Rightarrow T_1 = 766 \text{ N} , T_2 = 1432 \text{ N}$$

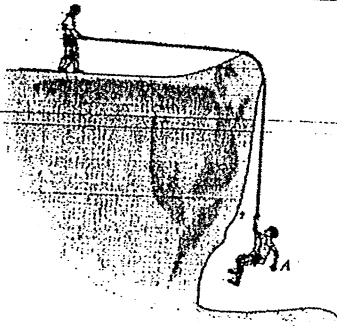
من الشكل الحر للقضيب :

$$\sum M_O = 0 :$$

$$-766(0.125) + 1432(0.325) - P(0.65) = 0$$

$$\Rightarrow P = 568 \text{ N}$$





مثال 29 / ولد وزنه 100 lb معلق عند A بحبل يمر على ربع دائرة من صخرة منحدره . هل من الممكن لإمرأة وزنها 185 lb أن ترفعه . وإذا كان ممكناً فما هي أصغر قوة يجب أن تبذلها المرأة على الحبل ، إذا كان معامل الاحتكاك الساكن بين الحبل والصخرة 0.2 وبين المرأة والأرض 0.8 .

الحل /

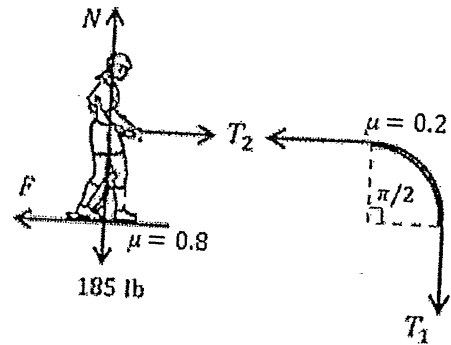
$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \Rightarrow T_2 = 100 e^{0.2(\frac{\pi}{2})} \Rightarrow T_2 = 136.9 \text{ lb}$$

$$\sum F_y = 0 : \Rightarrow N = 185 \text{ lb}$$

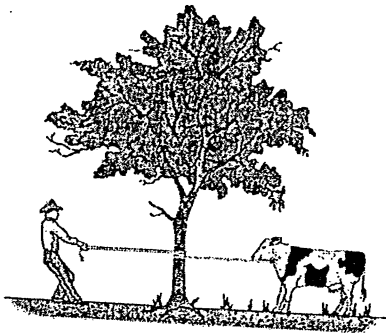
$$\sum F_x = 0 : \Rightarrow F = T = 136.9 \text{ lb} \quad (\text{أقل قوة})$$

$$\therefore F(\text{max}) = 0.8(185) = 148 \text{ lb}$$

$$\Rightarrow F < F(\text{max})$$



إذن المرأة تستطيع رفع الولد



مثال 30 / يحاول رجل إعاقة بقرة من الهروب وذلك بلف حبل حول جذع الشجرة لفتين كاملتين كما بالشكل . فإذا أثرت البقرة بقوة قدرها 250 lb على الحبل بين ما إذا كان الرجل يستطيع إعاقة البقرة أم لا . علماً بأن وزن الرجل 180 lb ومعامل الاحتكاك الساكن بين الحبل والشجرة 0.15 وبين حذاء الرجل والأرض 0.3 .

الحل /

$$\beta = 2(2\pi) = 4\pi$$

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \Rightarrow 250 = T_1 e^{0.15(4\pi)} \Rightarrow 37.96 \text{ lb}$$

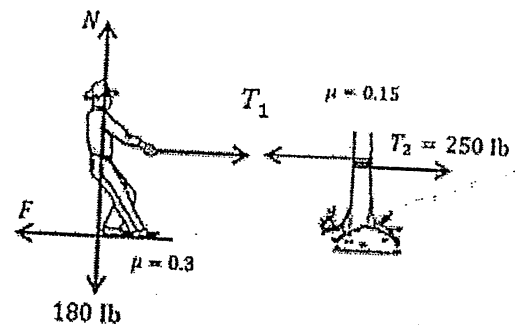
من الشكل الحر للرجل :

$$\sum F_x = 0 : F = T_1 = 37.96 \text{ lb}$$

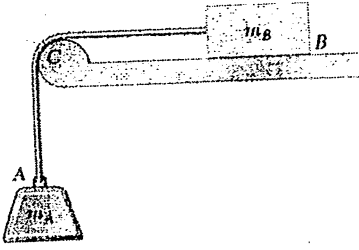
$$\sum F_y = 0 : N = 189 \text{ lb}$$

$$\therefore F(\text{max}) = \mu_s N = 0.3(180) = 54 \text{ lb}$$

$$\Rightarrow F < F(\text{max})$$



إذن يستطيع الرجل إعاقة البقرة



مثال 31/ في الشكل المقابل معامل الاحتكاك الساكن بين الكتلة B والسطح الأفقي وبين الحبل والدعامة C هو 0.4 ، فإذا كانت $m_A = 12 \text{ kg}$ أوجد أصغر كتلة m_B بحيث تبقى المجموعة متزنة .

الحل /

$$\therefore \beta = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$T_A = T_B e^{\mu\beta} \Rightarrow 12(9.81) = T_B e^{0.4\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

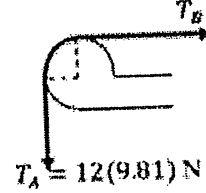
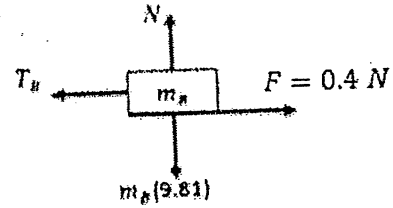
$$\Rightarrow T_B = 12(9.81)e^{0.4\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 62.8 \text{ N}$$

من الشكل الحر للكتلة m_B :

$$\sum F_y = 0 : N = m_B (9.81)$$

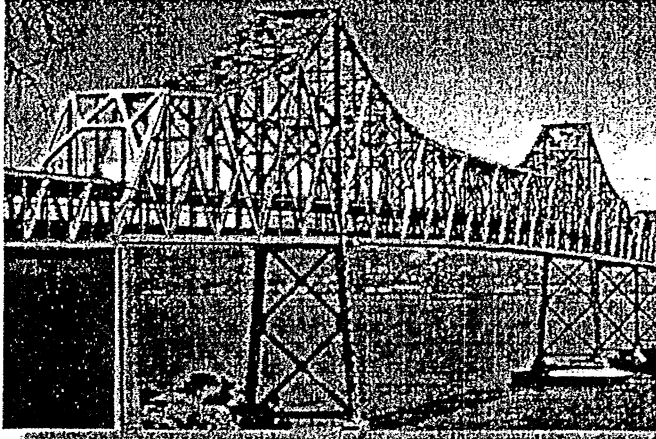
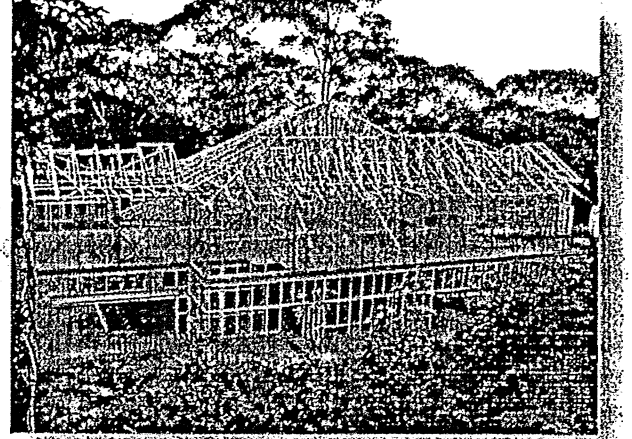
$$\sum F_x = 0 : T_B = 0.4 N$$

$$\Rightarrow 62.8 = 0.4 m_B (9.81) \Rightarrow m_B = 16 \text{ kg}$$

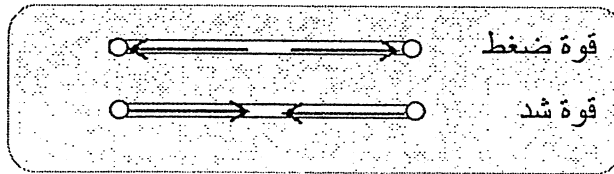


الجمالونات (الأعضاء المفصلية)

الأعضاء المفصلية عبارة عن هيكل مكون من مجموعة من العناصر الطولية (قطبان) متصلة مع بعضها البعض عن طريق اللحام أو المسامير الملولة أو المبرشمة بحيث تكون منشأ صلب مثل الجسر أو الأسقف



وتكون القوة مؤثرة على المفاصل وفي اتجاه أعضاء الهيكل المفصلي إما ضغط أو شد أو قوة صفرية



طرق تحليل الهيكل المفصلي في مستوي (إيجاد القوة الداخلية)

(1) طريقة العقد :

عبارة عن اتزان قوى متلاقية في نقطة ويجب أن يكون عدد الأعضاء المجهولة لا تزيد عن عضوين لأنه توجد معادلتان للتحليل.

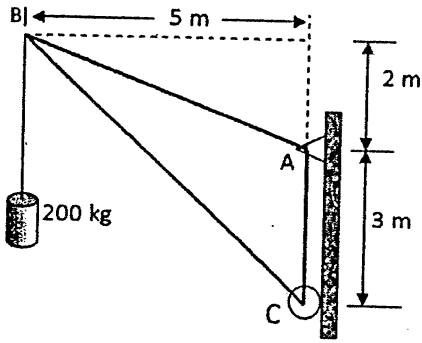
$$\sum F_x = 0 , \sum F_y = 0$$

(2) طريقة القطع :

عبارة عن اتزان قوى ليست متلاقية في نقطة ويجب أن عدد الأعضاء المجهولة لا تزيد عن ثلاثة أعضاء لأنه توجد ثلاثة معادلات للتحليل .

$$\sum F_x = 0 , \sum F_y = 0 , \sum M_{\text{أي نقطة}} = 0$$

مثال 1 / احسب القوة في كل عضو للجمالون المحمل .



الحل /

نحتاج لردود الأفعال :

$$\sum M_A = 0 : 1.962 (5) - C_x (3) = 0 \Rightarrow C_x = 3.27 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : A_x = C_x = 3.27 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = 1.962 \text{ kN}$$

العقدة C :

$$\sum F_x = 0 : -CB \sin 45 - 3.27 = 0$$

$$\Rightarrow CB = -4.62 \text{ kN} = 4.62 \text{ kN} \text{ ضغط}$$

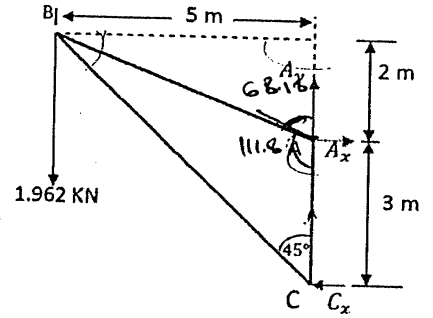
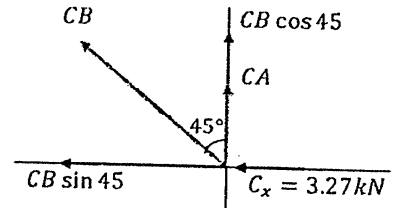
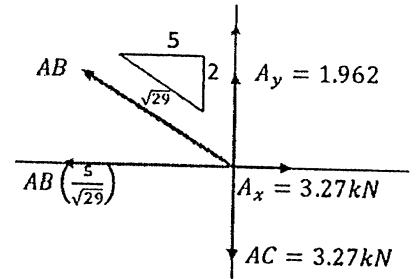
$$\sum F_y = 0 : CB \sin 45 - CA = 0$$

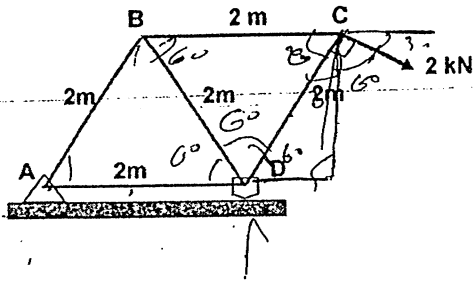
$$\Rightarrow CA = 4.62 \sin 45 = 3.27 \text{ kN} \text{ شد}$$

العقدة A :

$$\sum F_x = 0 : AB \left(\frac{5}{\sqrt{29}} \right) - 3.27 = 0$$

$$\Rightarrow AB = 3.27 \left(\frac{\sqrt{29}}{5} \right) = 3.52 \text{ kN} \text{ شد}$$





مثال 2 / احسب القوة في كل عضو للجملون المحمل باستخدام طريقة العقد وطريقة القطع.

الحل /

نحسب ردود الافعال

$$\sum M_A = 0 :$$

$$2 D_y - 2 \cos 30 (2 \sin 60) - 2 \sin 30 (3) = 0$$

$$\Rightarrow D_y = 3 \text{ kN} \uparrow$$

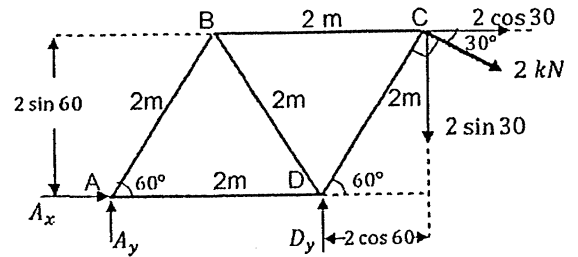
$$\sum F_x = 0 :$$

$$A_x + 2 \cos 30 = 0 \Rightarrow A_x = -\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 :$$

$$A_y + D_y = 2 \sin 30 \Rightarrow A_y + 3 = 1$$

$$\Rightarrow A_y = -2 \Rightarrow A_y = 2 \text{ kN} \downarrow$$



أولاً / طريقة العقد :

العقدة A :

$$\sum F_y = 0 : AB \sin 60 - 2 = 0 \Rightarrow AB = 2.31 \text{ kN} \text{ شد}$$

$$\sum F_x = 0 : AB \cos 60 + AD = \sqrt{3}$$

$$2.31 \cos 60 + AD = \sqrt{3} \Rightarrow AD = 0.577 \text{ kN} \text{ شد}$$

العقدة B :

$$\sum F_y = 0 : -AB \sin 60 - BD \sin 60 = 0$$

$$\Rightarrow BD = -AB = -2.31 = 2.31 \text{ kN} \text{ ضغط}$$

$$\sum F_x = 0 : BD \cos 60 + BC - AB \cos 60 = 0$$

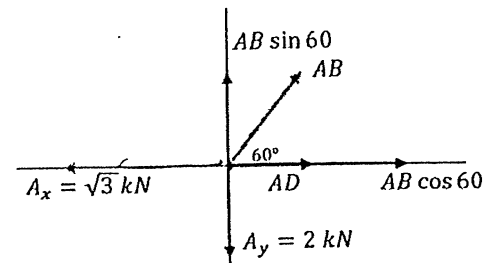
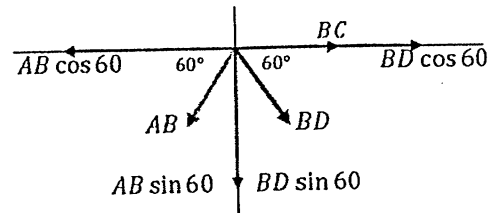
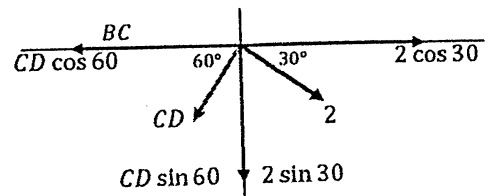
$$\Rightarrow BC = AB \cos 60 - BD \cos 60$$

$$= 2.31 \cos 60 - (-2.31) \cos 60 = 2.31 \text{ kN} \text{ شد}$$

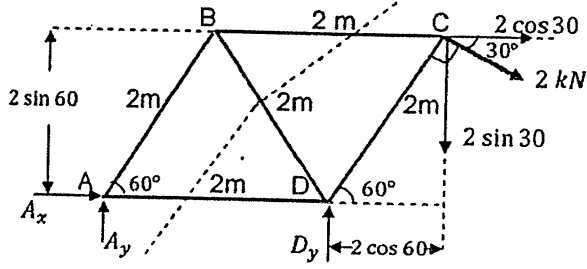
العقدة C :

$$\sum F_y = 0 : -CD \sin 60 - 2 \sin 30 = 0$$

$$\Rightarrow CD = -1.15 = 1.15 \text{ kN} \text{ ضغط}$$



ثانياً / طريقة القطع :



الحل /

القطاع اليمين :

$$\sum M_B = 0 : -DA(2 \sin 60) - 2 \sin 30 (2) + D_y(1) = 0$$

$$-DA(2 \sin 60) - 2 \sin 30 (2) + 3(1) = 0$$

$$\Rightarrow DA = 0.577 \text{ kN شد}$$

$$\sum M_D = 0 : BC (2 \sin 60) - 2 (2) = 0$$

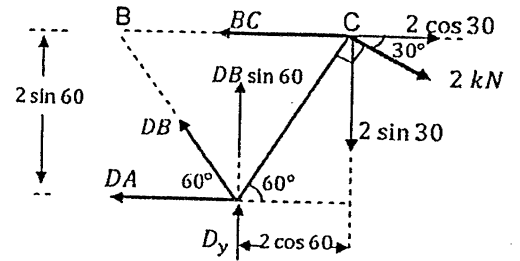
$$\Rightarrow BC = 2.31 \text{ kN شد}$$

$$\sum F_y = 0 : DB \sin 60 + D_y - 2 \sin 30 = 0$$

$$\Rightarrow DB \sin 60 + 3 - 2 \sin 30 = 0$$

$$\Rightarrow DB = -2.31 \text{ kN} \Rightarrow DB = 2.31 \text{ kN ضغط}$$

القطاع اليسر :



$$\sum M_B = 0:$$

$$DA(2 \sin 60) - \sqrt{3} (2 \sin 60) + 2(1) = 0$$

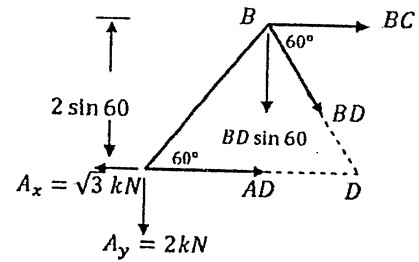
$$\Rightarrow DA = 0.577 \text{ kN شد}$$

$$\sum M_D = 0: -BC(2 \sin 60) + 2 (2) = 0$$

$$\Rightarrow BC = 2.31 \text{ kN شد}$$

$$\sum F_y = 0: -BD \sin 60 - 2 = 0$$

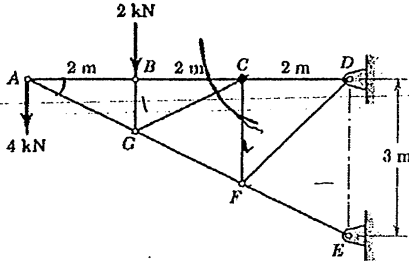
$$\Rightarrow BD = -2.31 \text{ kN} \Rightarrow BD = 2.31 \text{ kN ضغط}$$



مثال 3 / احسب القوة في العضوين CF, CG للسانام الموضح

بالشكل .

الحل /

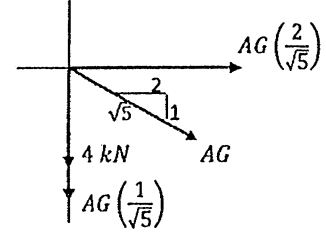


العقدة A :

$$\sum F_y = 0 : 4 + AG \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0 \Rightarrow AG = -4\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \text{ kN ضغط}$$

$$\sum F_x = 0 : AB + AG \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 0$$

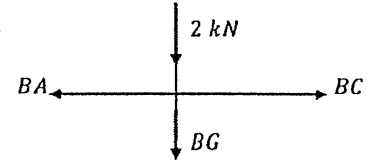
$$\Rightarrow AB + (-4\sqrt{5}) \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 0 \Rightarrow AB = 8 \text{ kN شد}$$



العقدة B :

$$\sum F_y = 0 : -2 - BG = 0 \Rightarrow BG = 2 \text{ kN شد}$$

$$\sum F_x = 0 : BC = BA = 8 \text{ kN شد}$$



العقدة G :

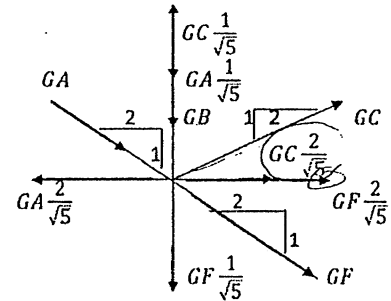
$$\sum F_x = 0 : GA \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) + GF \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) + GC \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{5} + GF + GC = 0 \quad \text{--- 1}$$

$$\sum F_y = 0 : -GB - GA \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) - GF \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) + GC \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow -2 - 4\sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) - GF \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) + GC \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow -GF \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) + GC \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 6 \Rightarrow -GF + GC = 6\sqrt{5} \quad \text{--- 2}$$



بحل المعادلتين :

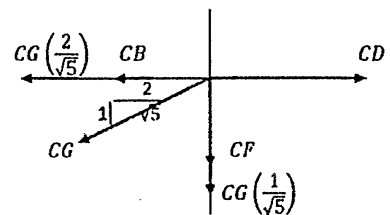
$$\Rightarrow GC = \sqrt{5} \text{ kN شد} , GF = -5\sqrt{5} = 5\sqrt{5} \text{ kN ضغط}$$

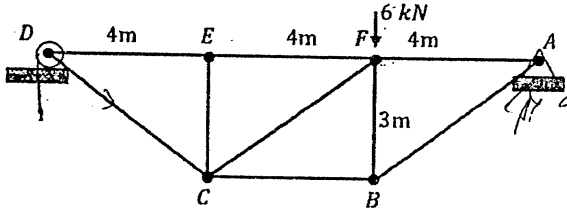
العقدة C :

$$\sum F_y = 0 : -CF - CG \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow CF = -CG \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = -\sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\Rightarrow CF = -1 \text{ kN} = 1 \text{ kN ضغط}$$





مثال 4 / احسب القوة في العضوين CF , CB للسنام
الموضح بالشكل .

/الحل/

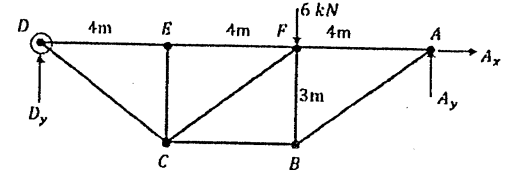
نحسب ردود الافعال :

$$\sum M_A = 0: 6(4) - D_y(12) = 0 \Rightarrow D_y = 2 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 : A_x = 0$$

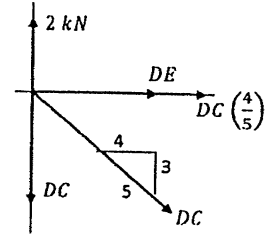
$$\sum F_y = 0 : D_y + A_y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 2 + A_y - 6 = 0 \Rightarrow A_y = 4 \text{ kN} \uparrow$$



أولاً / طريقة العقد :

$$\sum F_y = 0 : DC \left(\frac{3}{5} \right) = 2 \Rightarrow DC = \frac{10}{3} \text{ kN} \text{ شد}$$

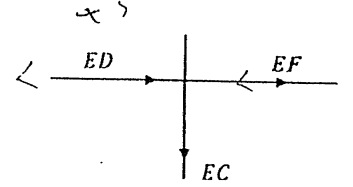


$$\sum F_x = 0 : DE + DC \left(\frac{4}{5} \right) = 0 \Rightarrow DE + \frac{10}{3} \left(\frac{4}{5} \right) = 0$$

$$\Rightarrow DE = -\frac{8}{3} \Rightarrow DE = \frac{8}{3} \text{ kN} \text{ ضغط}$$

$$\sum F_y = 0 : EC = 0$$

العقدة E :



$$\sum F_x = 0 : EF + ED = 0 \Rightarrow EF = -\frac{8}{3} \Rightarrow EF = \frac{8}{3} \text{ kN} \text{ ضغط}$$

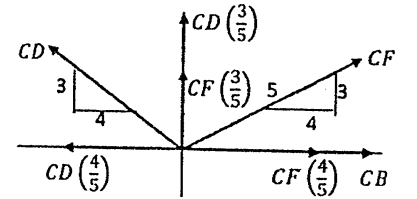
$$\sum F_y = 0 : CD \left(\frac{3}{5} \right) + CF \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$

العقدة C :

$$\Rightarrow CF = -CD = -\frac{10}{3} = \frac{10}{3} \text{ kN} \text{ ضغط}$$

$$\sum F_x = 0 : CF \left(\frac{4}{5} \right) + CB - CD \left(\frac{4}{5} \right) = 0$$

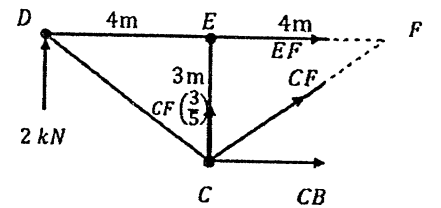
$$\Rightarrow -\frac{10}{3} \left(\frac{4}{5} \right) + CB - \frac{10}{3} \left(\frac{4}{5} \right) = 0 \Rightarrow CB = \frac{16}{3} \text{ kN} \text{ شد}$$



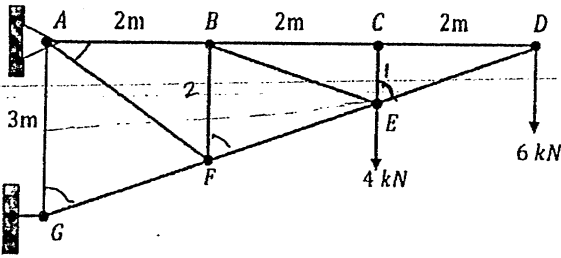
ثانياً / طريقة القطع :

$$\sum M_F = 0 : CB(3) - 2(8) = 0 \Rightarrow CB = \frac{16}{3} \text{ kN} \text{ شد}$$

$$\sum F_y = 0 : CF \left(\frac{3}{5} \right) + 2 = 0 \Rightarrow CF = -\frac{10}{3} = \frac{10}{3} \text{ kN} \text{ ضغط}$$



مثال 5 / من الكتل المقابل

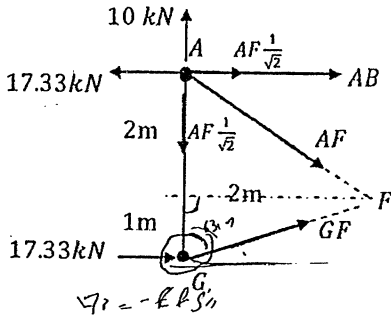
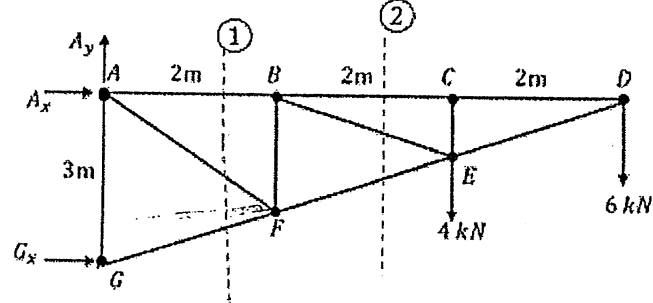


أ) احسب ردود الافعال عند كل من A . G

ب) باستخدام طريق القطع احسب القوى في

الاعضاء BC , BE , AB , AF

الحل /



نحسب ردود الافعال :

$$\sum M_A = 0 : G_x(3) - 4(4) - 6(6) = 0 \Rightarrow G_x = 17.3 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum F_x = 0 : A_x + G_x = 0 \Rightarrow A_x = -17.33 \text{ kN} = 17.3 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = 10 \text{ kN} \uparrow$$

الجانب الايسر من القطع ①

$$\sum M_A = 0 : 17.3(3) - 10(2) - AB(2) = 0 \Rightarrow AB = 16 \text{ kN} \text{ شد}$$

$$\sum M_G = 0 : 17.3(2) - AB - AF\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 17.3(3) - 16 - AF\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow AF = 50.5 \text{ kN} \text{ شد}$$

الجانب الايمن من القطع ②

$$\sum M_E = 0 : CB(1) - 6(2) = 0 \Rightarrow CB = 12 \text{ kN} \text{ شد}$$

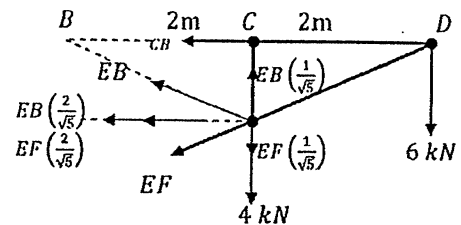
$$\sum M_D = 0 : -EB\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)(1) - EB\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2) + 4(2) = 0$$

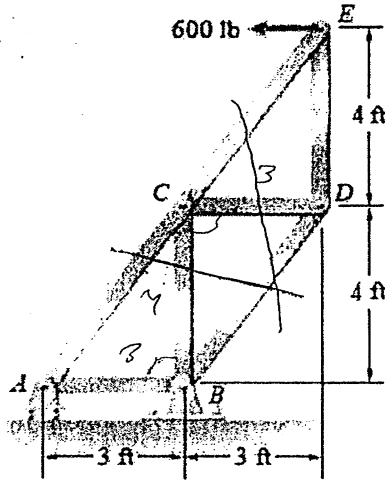
$$-EB\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) + 4(2) = 0 \Rightarrow EB = 2\sqrt{5} \text{ شد}$$

$$\sum F_x = 0 : -EB\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - EF\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - CB = 0$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - EF\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 12 = 0$$

$$\Rightarrow -16 - EF\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0 \Rightarrow EF = 8\sqrt{5} \text{ kN} \text{ ضغط}$$





مثال 6 / من الشكل : احسب ردود الأفعال عند كل من B, A

والقوى في الأعضاء CD, CB

الحل / طريقة العقد

نحسب ردود الأفعال :

$$\sum M_B = 0: 600(8) - A_y(3) = 0 \Rightarrow A_y = 1600 \text{ lb } \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 : A_x = 0 \Rightarrow B_x = 600 \text{ lb } \rightarrow$$

$$\sum F_y = 0 : B_y + A_y = 0 \Rightarrow B_y = -A_y = -1600 \text{ lb} = 1600 \text{ lb } \downarrow$$

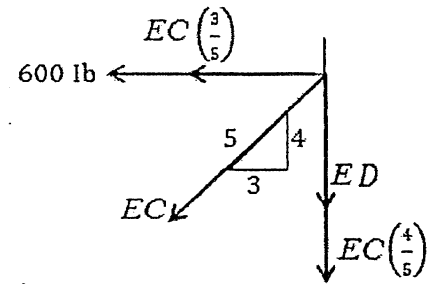
العقدة E :

$$\sum F_x = 0 : -600 - EC \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$

$$\Rightarrow CE = -1000 \text{ lb} \Rightarrow CE = 1000 \text{ lb} \text{ ضغط}$$

$$\sum F_y = 0 : -ED - EC \left(\frac{4}{5} \right) = 0$$

$$\Rightarrow ED = -EC \left(\frac{4}{5} \right) \Rightarrow ED = -(-1000) \left(\frac{4}{5} \right) = 800 \text{ lb} \text{ شد}$$

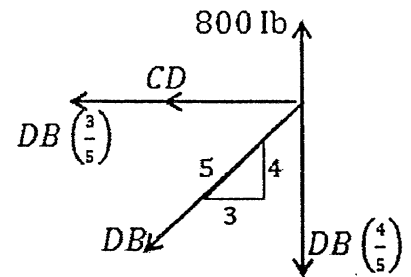


العقدة D :

$$\sum F_y = 0 : 800 - DB \left(\frac{4}{5} \right) = 0 \Rightarrow DB = 1000 \text{ lb} \text{ شد}$$

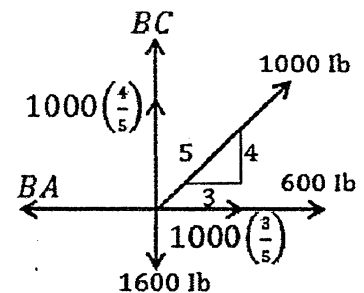
$$\sum F_x = 0 : -CD - DB \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$

$$\Rightarrow CD = -1000 \left(\frac{3}{5} \right) \text{ lb} = -600 \text{ lb} = 600 \text{ lb} \text{ ضغط}$$



العقدة B :

$$\sum F_y = 0 : BC + 1000 \left(\frac{4}{5} \right) = 1600 \Rightarrow BC = 800 \text{ lb} \text{ شد}$$



طريقة القطع

$$\sum M_D = 0 : 600(4) + EC \left(\frac{3}{5} \right) (4) = 0 \Rightarrow EC = -1000 \text{ lb}$$

$$\Rightarrow EC = 1000 \text{ lb} \text{ ضغط}$$

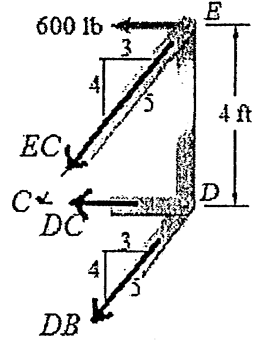
$$\sum F_y = 0 : -EC \left(\frac{4}{5} \right) - DB \left(\frac{4}{5} \right) = 0 \Rightarrow DB = -EC$$

$$\Rightarrow DB = -(-1000) = 1000 \text{ lb} \text{ شد}$$

$$\sum F_x = 0 : -DC - DB \left(\frac{3}{5} \right) - EC \left(\frac{3}{5} \right) - 600 = 0$$

$$-DC - (1000) \left(\frac{3}{5} \right) - (-1000) \left(\frac{3}{5} \right) - 600 = 0$$

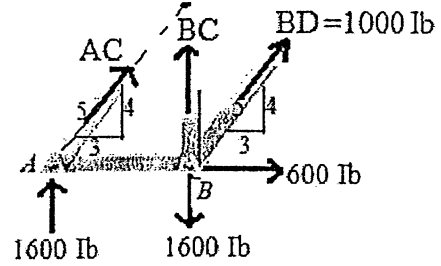
$$DC = -600 \text{ lb} \Rightarrow DC = 600 \text{ lb} \text{ ضغط}$$



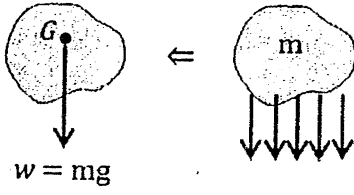
$$\sum M_A = 0 : 1000 \left(\frac{4}{5} \right) (3) + BC(3) - 1600(3) = 0$$

$$1000 \left(\frac{4}{5} \right) + BC - 1600 = 0$$

$$BC = 1600 - 800 = 800 \text{ lb} \text{ شد}$$



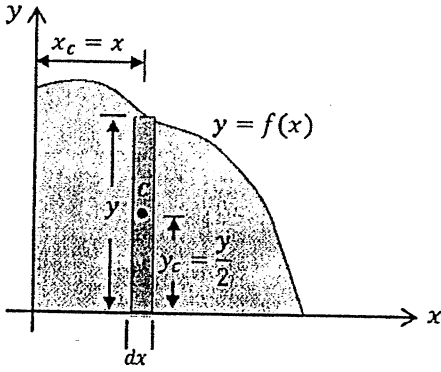
المساحة ومركز الثقل



إن أي جسم يتكون من مجموعة كبيرة من الجسيمات وكل جسيم يجذب نحو مركز الأرض ، وحيث أن الجسم أصغر بكثير من الأرض فإن اتجاه قوة الجذب لجميع الجسيمات في هذا الجسم تعتبر متوازية ومتجهه نحو مركز الأرض ، ومحصلة هذه القوى يمكن الحصول عليها وتساوي mg وتؤثر في نقطة تسمى بمركز المساحة .

أولاً / المركز الهندسي للمساحة للشكل الغير منتظم

إذا كانت المساحة محصورة بين المنحني ومحور x أو المحور y

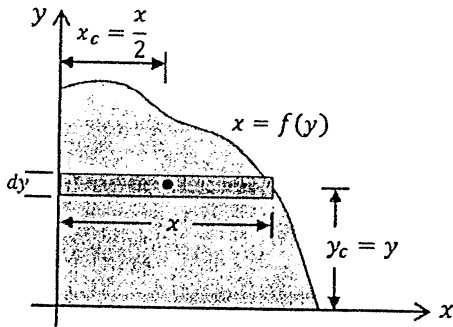


بإستخدام شريحة رأسية :

$$dA = y dx \Rightarrow A = \int_A y dx$$

$$A \bar{x} = \int_A x_c dA = \int_A x y dx$$

$$A \bar{y} = \int_A y_c dA = \int_A \frac{y}{2} y dx = \frac{1}{2} \int_A y^2 dx$$



بإستخدام شريحة أفقية :

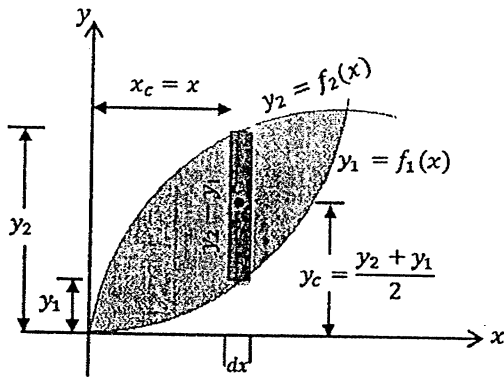
$$dA = x dy \Rightarrow A = \int_A x dy$$

$$A \bar{x} = \int_A x_c dA = \int_A \frac{x}{2} x dy = \frac{1}{2} \int_A x^2 dy$$

$$A \bar{y} = \int_A y_c dA = \int_A y x dy$$

إذا كانت المساحة محصورة بين منحنيين

بإستخدام شريحة رأسية :



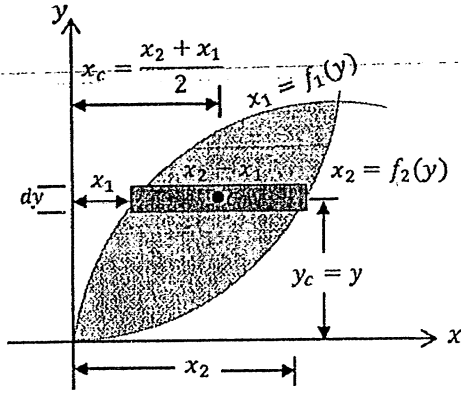
$$dA = (y_2 - y_1) dx \Rightarrow A = \int_A (y_2 - y_1) dx$$

$$A \bar{x} = \int_A x_c dA = \int_A x (y_2 - y_1) dx$$

$$A \bar{y} = \int_A y_c dA = \int_A \frac{y_2 + y_1}{2} (y_2 - y_1) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_A (y_2^2 - y_1^2) dx$$

باستخدام شريحة أفقية :

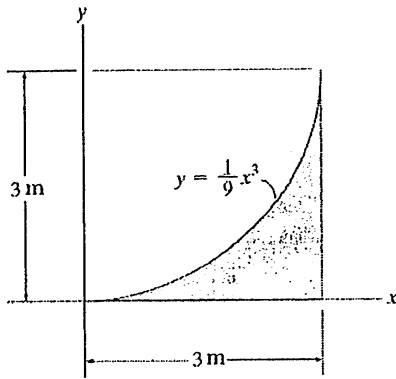


$$dA = (x_2 - x_1) dy \Rightarrow A = \int_A (x_2 - x_1) dy$$

$$A \bar{x} = \int_A x_c dA = \int_A \frac{x_2 + x_1}{2} (x_2 - x_1) dy$$

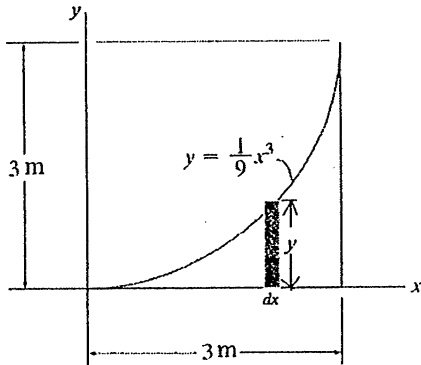
$$= \frac{1}{2} \int_A (x_2^2 - x_1^2) dy$$

$$A \bar{y} = \int_A y_c dA = \int_A y (x_2 - x_1) dy$$



مثال 1/ احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظلة والموضحة بالشكل

الحل /



$$A = \int_A y dx = \int_0^3 \frac{1}{9} x^3 dx = \left[\frac{1}{36} x^4 \right]_0^3 = 2.25 \text{ m}^2$$

$$A \bar{x} = \int_A x y dx = \int_0^3 x \left(\frac{1}{9} x^3 \right) dx = \frac{1}{9} \int_0^3 x^4 dx = \left[\frac{1}{45} x^5 \right]_0^3$$

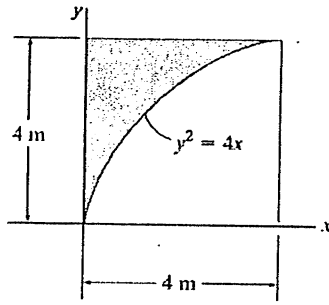
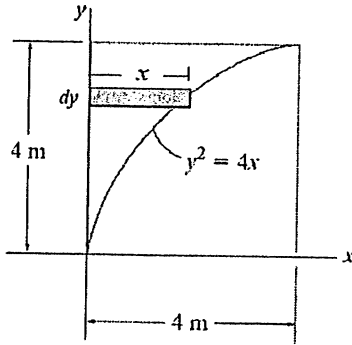
$$2.25 \bar{x} = 5.4 \Rightarrow \bar{x} = 2.4 \text{ m}$$

$$A \bar{y} = \frac{1}{2} \int_A y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(\frac{1}{9} x^3 \right)^2 dx = \frac{1}{162} \int_0^3 x^6 dx$$

$$2.25 \bar{y} = \left[\frac{1}{1134} x^7 \right]_0^3 \Rightarrow 2.25 \bar{y} = 1.929 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 0.857 \text{ m}$$

مثال 2/ احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالشكل



/ الحل

$$\because y^2 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4}y^2$$

$$A = \int_A x \, dy = \int_0^4 \frac{1}{4}y^2 \, dy = \left[\frac{1}{12}y^3 \right]_0^4 = 5.33 \, \text{m}^2$$

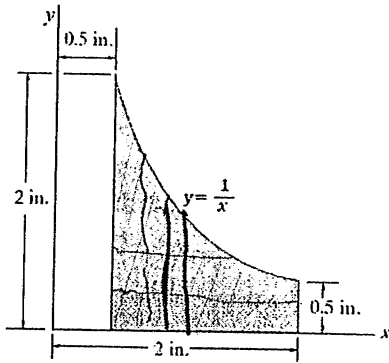
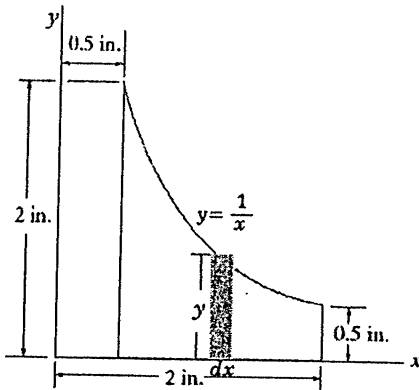
$$A \bar{x} = \frac{1}{2} \int_A x^2 \, dy = \frac{1}{2} \int_0^4 \left(\frac{1}{4}y^2 \right)^2 \, dy = \frac{1}{32} \int_0^4 y^4 \, dy =$$

$$5.33 \bar{x} = \left[\frac{1}{160}y^5 \right]_0^4 \Rightarrow 5.33 \bar{x} = 6.4 \Rightarrow \bar{x} = 1.2 \, \text{m}$$

$$A \bar{y} = \int_A y \, x \, dy = \int_0^4 y \left(\frac{1}{4}y^2 \right) \, dy = \frac{1}{4} \int_0^4 y^3 \, dy$$

$$5.33 \bar{y} = \left[\frac{1}{16}y^4 \right]_0^4 \Rightarrow 5.33 \bar{y} = 16 \Rightarrow \bar{y} = 3$$

مثال 3/ احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالشكل .



/ الحل

$$A = \int_A y \, dx = \int_{0.5}^2 \frac{1}{x} \, dx = [\ln x]_{0.5}^2 = 1.386 \, \text{in}^2$$

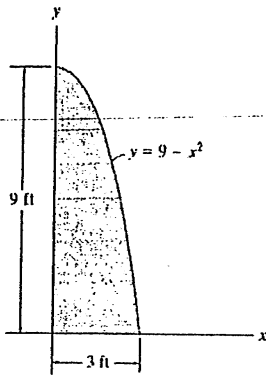
$$A \bar{x} = \int_A x \, y \, dx = \int_{0.5}^2 x \left(\frac{1}{x} \right) \, dx = \int_{0.5}^2 1 \, dx = [x]_{0.5}^2$$

$$1.386 \bar{x} = 1.5 \Rightarrow \bar{x} = 1.08 \, \text{in}$$

$$A \bar{y} = \frac{1}{2} \int_A y^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{0.5}^2 \left(\frac{1}{x} \right)^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{0.5}^2 x^{-2} \, dx$$

$$1.386 \bar{y} = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{x} \right]_{0.5}^2 \Rightarrow 1.386 \bar{y} = 0.75 \Rightarrow \bar{y} = 0.541 \, \text{in}$$

مثال 4 / احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالشكل .



الحل /

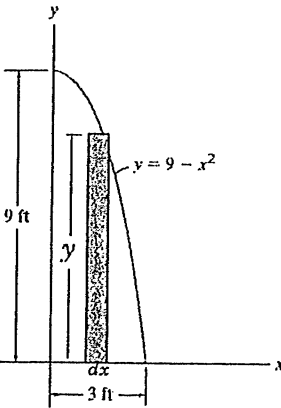
$$A = \int_A y \, dx = \int_0^3 (9 - x^2) \, dx = \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 18 \, \text{ft}^2$$

$$A \bar{x} = \int_A x y \, dx = \int_0^3 x (9 - x^2) \, dx = \int_0^3 (9x - x^3) \, dx = \left[\frac{9}{2} x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^3$$

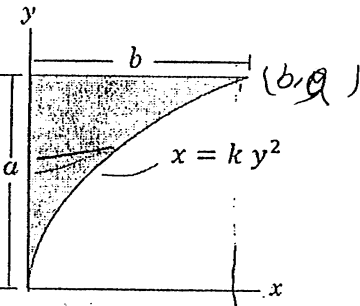
$$18 \bar{x} = 20.25 \Rightarrow \bar{x} = 1.125 \, \text{ft}$$

$$A \bar{y} = \frac{1}{2} \int_A y^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^3 (9 - x^2)^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^3 (81 - 18x^2 + x^4) \, dx$$

$$18 \bar{y} = \frac{1}{2} \left[81x - 6x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_0^3 \Rightarrow 18 \bar{y} = 64.8 \, \text{ft} \Rightarrow \bar{y} = 3.6 \, \text{ft}$$



مثال 5 / احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالشكل .



الحل /

$$\because x = k y^2, x = b, y = a \Rightarrow b = k a^2 \Rightarrow k = \frac{b}{a^2} \Rightarrow x = \frac{b}{a^2} y^2$$

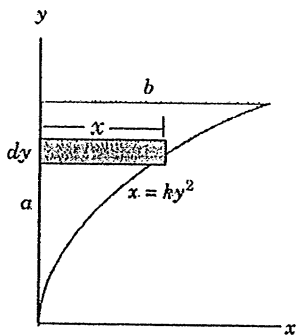
$$A = \int_A x \, dy = \int_0^a \frac{b}{a^2} y^2 \, dy = \frac{b}{a^2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{b}{a^2} \times \frac{a^3}{3} = \frac{ba}{3}$$

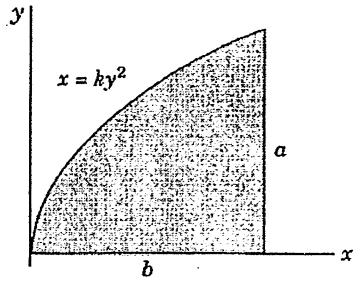
$$A \bar{x} = \frac{1}{2} \int_A x^2 \, dy = \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{b}{a^2} y^2 \right)^2 \, dy = \frac{b^2}{2a^4} \int_0^a y^4 \, dy = \frac{b^2}{2a^4} \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^a$$

$$\frac{ba}{3} \bar{x} = \frac{b^2 a}{10} \Rightarrow \bar{x} = \frac{3b}{10}$$

$$A \bar{y} = \int_A y x \, dy = \int_0^a y \left(\frac{b}{a^2} y^2 \right) \, dy = \frac{b}{a^2} \int_0^a y^3 \, dy = \frac{b}{a^2} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^a$$

$$\frac{ba}{3} \bar{y} = \frac{ba^2}{4} \Rightarrow \bar{y} = \frac{3a}{4}$$





مثال 6/ احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالشكل .

الحل /

$$\because x = ky^2, x = b, y = a \Rightarrow b = ka^2 \Rightarrow k = \frac{b}{a^2} \Rightarrow x = \frac{b}{a^2} y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{a^2}{b} x \Rightarrow y = \frac{a}{b^{1/2}} x^{1/2}$$

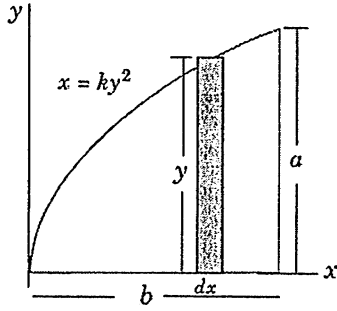
$$A = \int_A y dx = \frac{a}{b^{1/2}} \int_0^b x^{1/2} dx = \frac{a}{b^{1/2}} \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^b = \frac{a}{b^{1/2}} \frac{2b^{3/2}}{3} = \frac{2ab}{3}$$

$$A\bar{x} = \int_A x y dx = \int_0^b x \left(\frac{a}{b^{1/2}} x^{1/2} \right) dx = \frac{a}{b^{1/2}} \int_0^b x^{3/2} dx$$

$$\frac{2ab}{3} \bar{x} = \frac{a}{b^{1/2}} \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^b \Rightarrow \frac{2ab}{3} \bar{x} = \frac{2ab^2}{5} \Rightarrow \bar{x} = \frac{3b}{5}$$

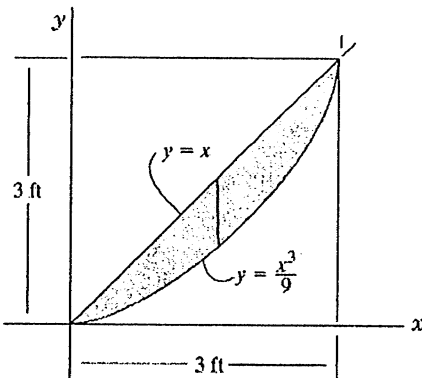
$$A\bar{y} = \frac{1}{2} \int_A y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^b \frac{a^2}{b} x dx = \frac{a^2}{2b} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b$$

$$\frac{2ab}{3} \bar{y} = \frac{a^2 b}{4} \Rightarrow \bar{y} = \frac{3a}{8}$$



مثال 7/ احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالشكل .

الحل /



$$A = \int_A (y_2 - y_1) dx = \int_0^3 \left(x - \frac{x^3}{9} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{36} \right]_0^3 = 2.25 \text{ ft}^2$$

$$A\bar{x} = \int_A x (y_2 - y_1) dx = \int_0^3 x \left(x - \frac{x^3}{9} \right) dx$$

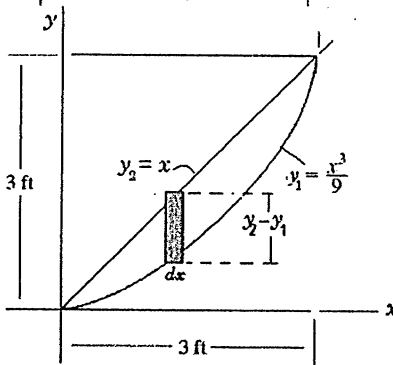
$$A\bar{x} = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^4}{9} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{45} \right]_0^3$$

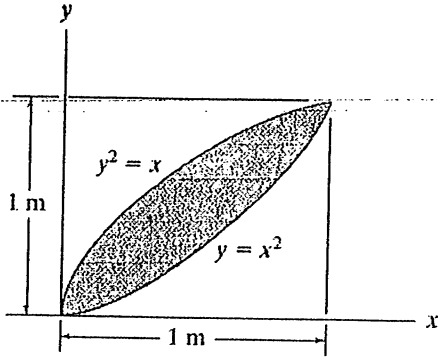
$$2.25 \bar{x} = 3.6 \Rightarrow \bar{x} = 1.6 \text{ ft}$$

$$A\bar{y} = \frac{1}{2} \int_A (y_2^2 - y_1^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^6}{81} \right) dx$$

$$A\bar{y} = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{567} \right]_0^3 = 2.57$$

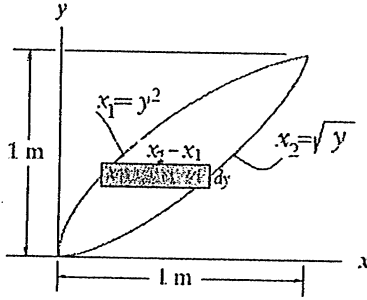
$$2.25 \bar{y} = 2.57 \Rightarrow \bar{y} = 1.14 \text{ ft}$$





مثال 8/ احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالشكل .

الحل /



$$A = \int_A (x_2 - x_1) dy = \int_0^1 (y^{1/2} - y^2) dy = \left[\frac{y^{3/2}}{3/2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1$$

$$A = \frac{1}{3} \text{ m}^2$$

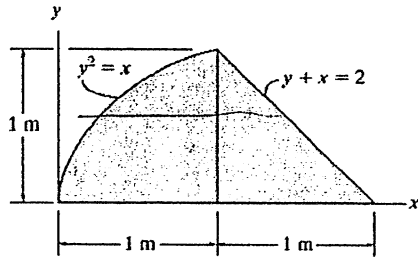
$$A \bar{x} = \frac{1}{2} \int_A (x_2^2 - x_1^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y - y^4) dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \right]_0^1$$

$$\frac{1}{3} \bar{x} = \frac{3}{20} \Rightarrow \bar{x} = \frac{9}{20} = 0.45 \text{ m}$$

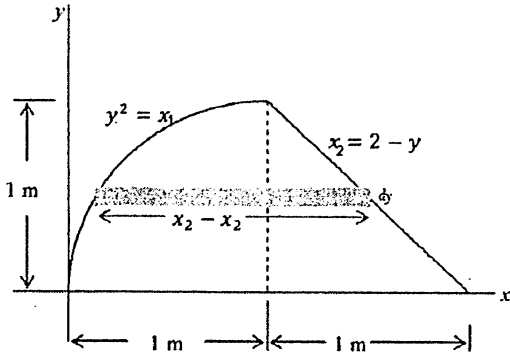
$$A \bar{y} = \int_A y (x_2 - x_1) dy = \int_0^1 y (y^{1/2} - y^2) dy$$

$$\frac{1}{3} \bar{y} = \int_0^1 (y^{3/2} - y^3) dy = \left[\frac{y^{5/2}}{5/2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1$$

$$\frac{1}{3} \bar{y} = \frac{3}{20} \Rightarrow \bar{y} = \frac{9}{20} = 0.45 \text{ m}$$



مثال 9/ احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالشكل .



الحل /

$$A = \int_A (x_2 - x_1) dy = \int_0^1 (2 - y - y^2) dy$$

$$A = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{7}{6} \text{ m}^2$$

$$A \bar{x} = \frac{1}{2} \int_A (x_2^2 - x_1^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 ((2 - y)^2 - y^4) dy$$

$$A \bar{x} = \frac{1}{2} \int_0^1 (4 - 4y + y^2 - y^4) dy = \frac{1}{2} \left[4y - 2y^2 + \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_0^1$$

$$\frac{7}{6} \bar{x} = \frac{16}{15} \Rightarrow \bar{x} = 0.914 \text{ m}$$

$$A \bar{y} = \int_A y (x_2 - x_1) dy = \int_0^1 y(2 - y - y^2) dy$$

$$A \bar{y} = \int_0^1 (2y - y^2 - y^3) dy = \left[y^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1$$

$$\frac{7}{6} \bar{y} = \frac{5}{12} \Rightarrow \bar{y} = 0.357 \text{ m}$$

0.914

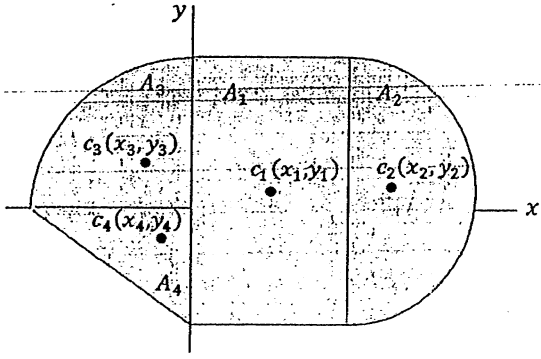
0.357

0.357

0.606

1.01

ثانياً / المركز الهندسي للمساحة المركبة



في عدة حالات يمكن تقسيم المساحة المركبة إلى مستطيلات ومثلثات وبعض الأشكال الهندسية الشائعة والمعروف مركزها الهندسي ومنها يتم حساب المركز الهندسي للمساحة الكلية .

إذا كان لدينا مساحة ما وقسمت إلى المساحات $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ومركز ثقل كل منها $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ على الترتيب فإن المركز

الهندسي للمساحة الكلية يحسب بالعلاقة

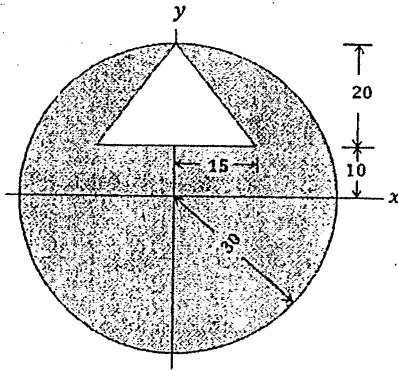
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

المركز الهندسي لبعض الأشكال الهندسية

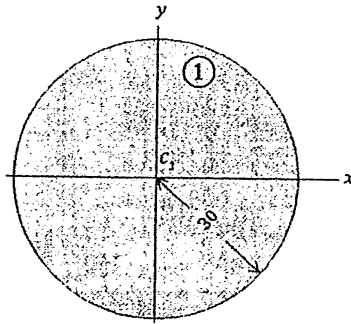
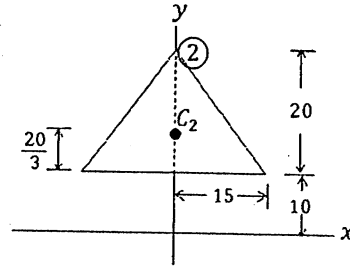
<p>المستطيل</p> <p>$A = bh, \bar{x} = \frac{b}{2}, \bar{y} = \frac{h}{2}$</p>	<p>المثلث</p> <p>$A = \frac{1}{2}bh, \bar{x} = \frac{b}{3}, \bar{y} = \frac{h}{3}$</p>	<p>الدائرة</p> <p>$A = \pi r^2, \bar{x} = \bar{y} = r$</p>
<p>ربع القطع الناقص</p> <p>$A = \pi ab, \bar{x} = \frac{4a}{3\pi}, \bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$</p>	<p>نصف الدائرة</p> <p>$A = \frac{1}{2}\pi r^2, \bar{x} = r, \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$</p>	<p>ربع الدائرة</p> <p>$A = \frac{1}{4}\pi r^2, \bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$</p>

مثال 1 / احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالشكل .

(حيث الأبعاد بالسنتيمتر)



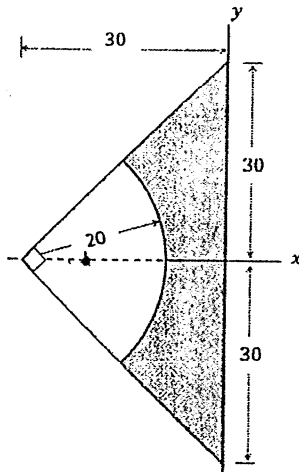
الحل / ∴ الشكل متماثل حول المحور $y \Leftrightarrow \bar{x} = 0$



$$A_1 = \pi \times 30^2 = 2827.4 \text{ cm}^2, y_1 = 0 \text{ cm}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} \times 30 \times 20 = -300 \text{ cm}^2, y_2 = 10 + \frac{20}{3} = 16.7 \text{ cm}$$

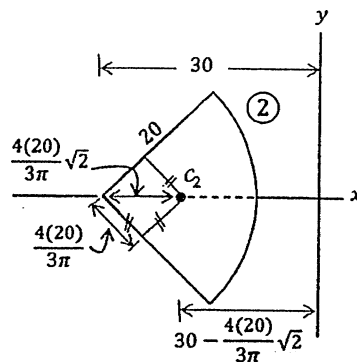
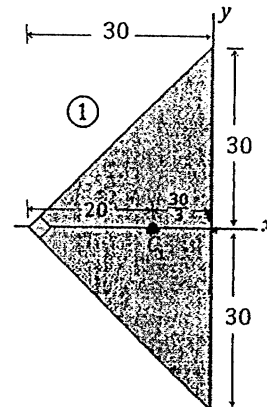
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{2827.4 (0) - 300(16.7)}{2827.4 - 300} = -1.98 \text{ cm}$$



مثال 2 / احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالشكل .

(حيث الأبعاد بالسنتيمتر)

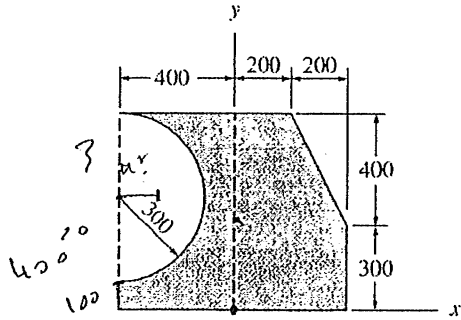
الحل / ∴ الشكل متماثل حول المحور $x \Leftrightarrow \bar{y} = 0$



$$A_1 = \frac{1}{2} \times 60 \times 30 = 900 \text{ cm}^2, x_1 = -\frac{30}{3} = -10 \text{ cm}$$

$$A_2 = -\frac{1}{4} \pi \times 20^2 = -314.16 \text{ cm}^2, x_2 = -\left(30 - \frac{4(20)}{3\pi}\right) = -25.76 \text{ cm}$$

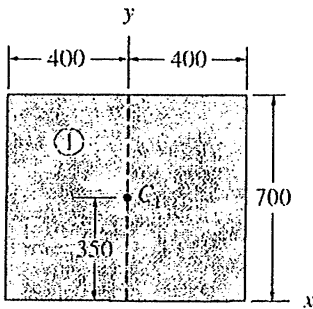
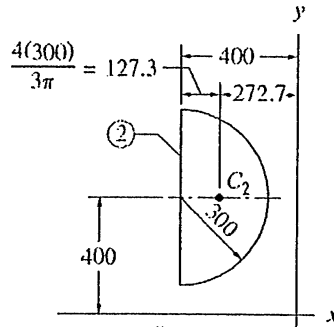
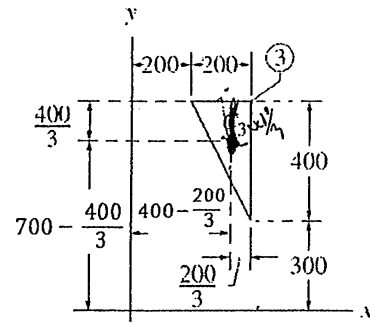
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{900(-10) - 314.16(-25.76)}{900 - 314.16} = \text{cm}$$



مثال 10 / احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظلة والموضحة بالشكل .

(حيث المثلث متساوي الأضلاع والأبعاد بالمليمتر)

الحل/



$$A_1 = 800 \times 700 = 56 \times 10^4 \text{ mm}^2, x_1 = 0, y_1 = 350 \text{ mm}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} \pi \times 300^2 = -14.14 \times 10^4 \text{ mm}^2, x_2 = -\left[400 - \frac{4(300)}{3\pi}\right] = -272.7 \text{ mm}, y_2 = 400 \text{ mm}$$

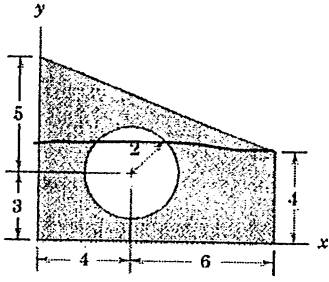
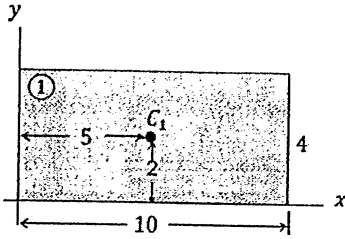
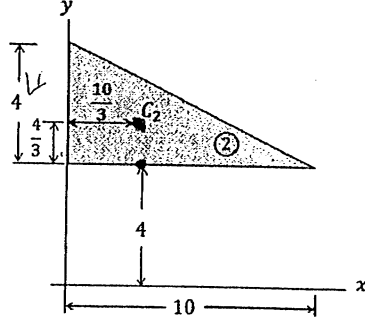
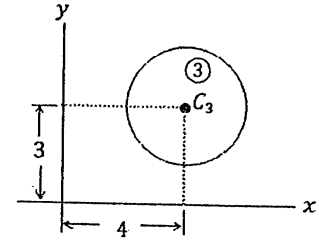
$$A_3 = -\frac{1}{2} \times 200 \times 400 = -4 \times 10^4 \text{ mm}^2, x_3 = 400 - \frac{200}{3} = 333.3 \text{ mm}$$

$$y_3 = 700 - \frac{400}{3} = 566.7 \text{ mm}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{56 \times 10^4(0) - 14.14 \times 10^4(-272.7) - 4 \times 10^4(333.3)}{56 \times 10^4 - 14.14 \times 10^4 - 4 \times 10^4} = 66.6 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{56 \times 10^4(350) - 14.14 \times 10^4(400) - 4 \times 10^4(566.7)}{56 \times 10^4 - 14.14 \times 10^4 - 4 \times 10^4} = 308.4 \text{ mm}$$

مثال 11 / احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالشكل .
(حيث الأبعاد بالسنتيمتر)



الحل /

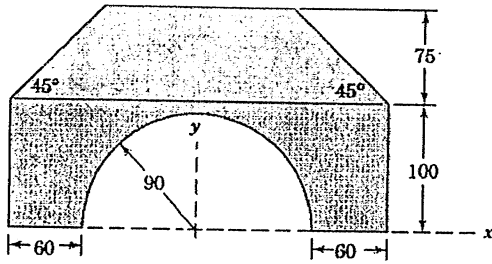
$$A_1 = 10 \times 4 = 40 \text{ cm}^2, x_1 = 5 \text{ cm}, y_1 = 2 \text{ cm}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 4 = 20 \text{ cm}^2, x_2 = \frac{10}{3} = 3.33 \text{ cm}, y_2 = 4 + \frac{10}{3} = 5.33 \text{ cm}$$

$$A_3 = -\pi \times 2^2 = -12.57 \text{ cm}^2, x_3 = 4 \text{ cm}, y_3 = 3 \text{ cm}$$

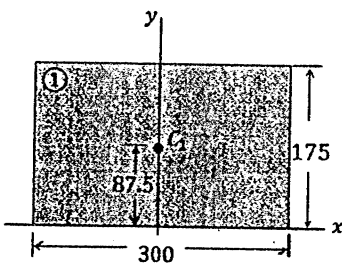
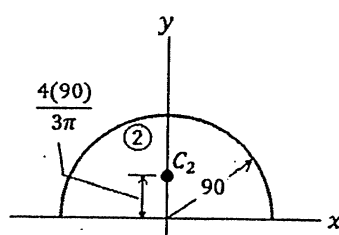
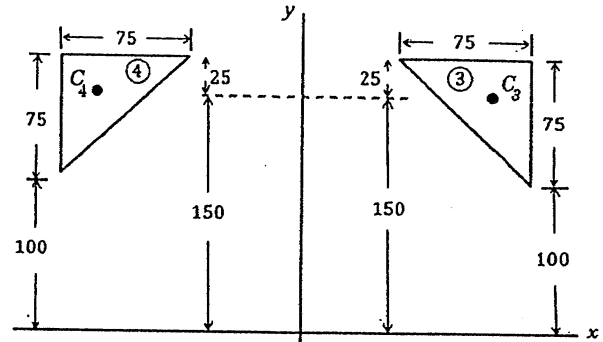
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{40(5) + 20(3.33) - 12.57(5)}{40 + 20 - 12.57} = 4.56 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{40(2) + 20(5.33) - 12.57(3)}{40 + 20 - 12.57} = 3.14 \text{ cm}$$



مثال 12 / احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالشكل
(حيث الأبعاد بالمليمتر)

الحل / ∴ الشكل متماثل حول المحور $y \Rightarrow \bar{x} = 0$



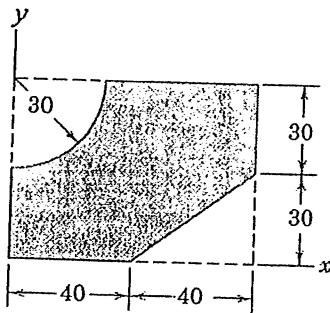
$$A_1 = 300 \times 175 = 52500 \text{ mm}^2, y_1 = 87.5 \text{ mm}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}\pi \times 90^2 = -12723.45 \text{ mm}^2, y_2 = \frac{4(90)}{3\pi} = 38.2 \text{ mm}$$

$$A_3 = -\frac{1}{2} \times 75 \times 75 = -2812.5 \text{ mm}^2, y_3 = 100 + 50 = 150 \text{ mm}$$

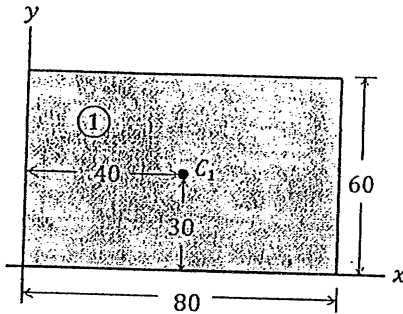
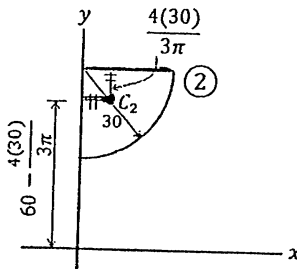
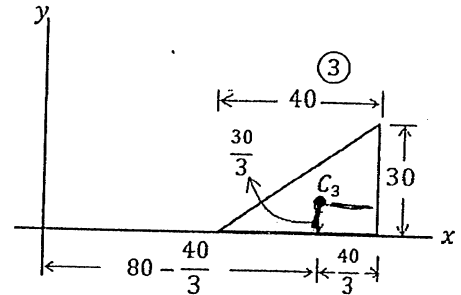
$$A_4 = -\frac{1}{2} \times 75 \times 75 = -2812.5 \text{ mm}^2, y_4 = 100 + 50 = 150 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{52500(87.5) - 12723.45(38.2) - 2812.5(150) - 2812.5(150)}{52500 - 12723.45 - 2812.5 - 2812.5} = \text{mm}$$



مثال 13 / احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالشكل.
(حيث الأبعاد بالمليمتر)

/ الحل



$$A_1 = 80 \times 60 = 4800 \text{ mm}^2, x_1 = 40 \text{ mm}, y_1 = 30 \text{ mm}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}\pi \times 30^2 = -1413.7 \text{ mm}^2, x_2 = \frac{4(30)}{3\pi} = 12.73 \text{ mm}, y_2 = 60 - \frac{4(30)}{3\pi} = 47.27 \text{ mm}$$

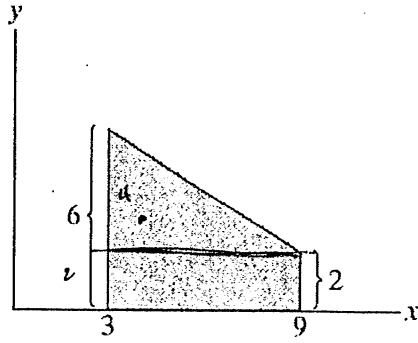
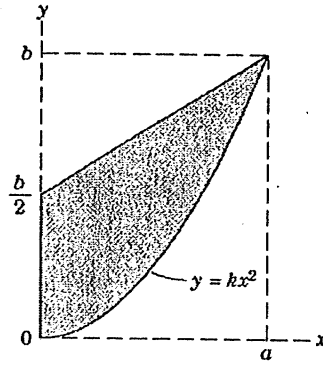
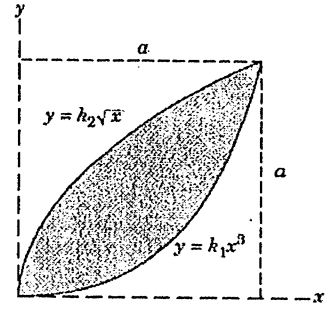
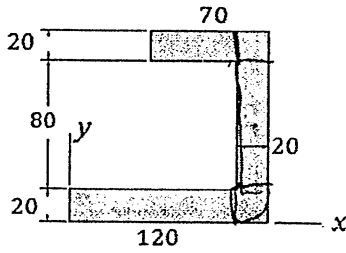
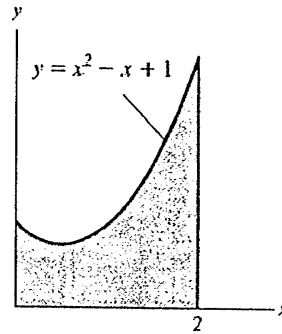
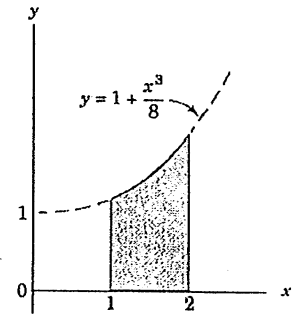
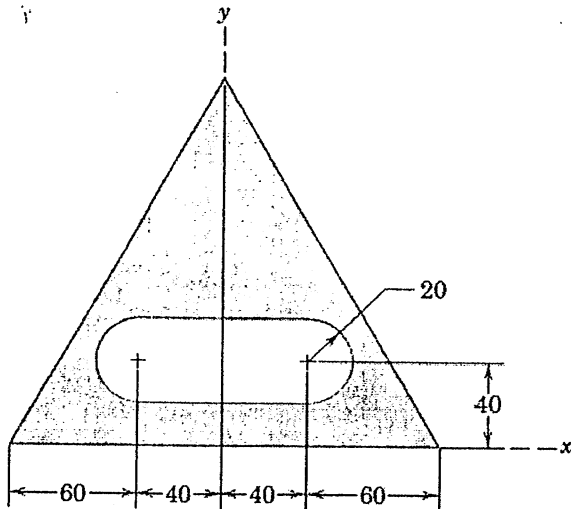
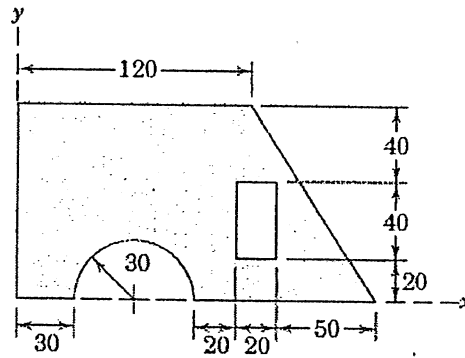
$$A_3 = -\frac{1}{2} \times 40 \times 30 = -600 \text{ mm}^2, x_3 = 80 - \frac{40}{3} = 66.7 \text{ mm}, y_3 = \frac{30}{3} = 10 \text{ mm}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{4800(40) - 1413.7(12.73) - 600(66.7)}{4800 - 1413.7 - 600} = 30.56 \text{ mm}$$

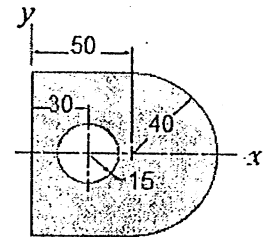
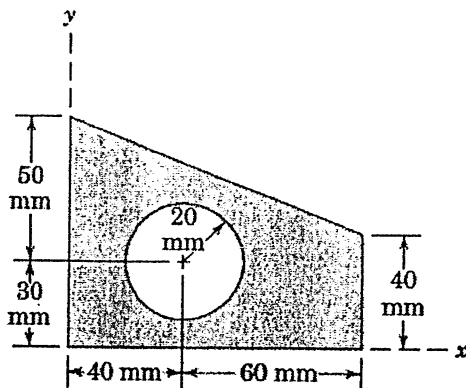
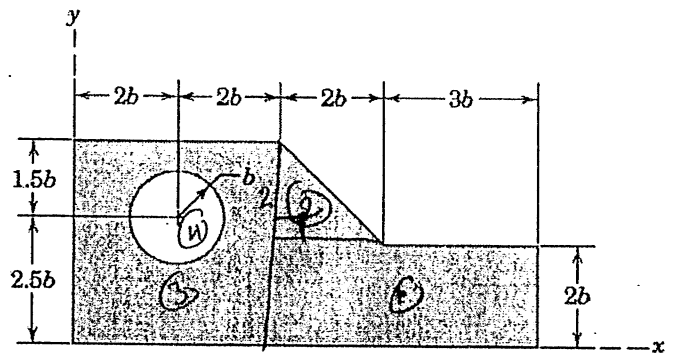
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{4800(30) - 1413.7(47.27) - 600(10)}{4800 - 1413.7 - 600} = 25.54 \text{ mm}$$

تمارين

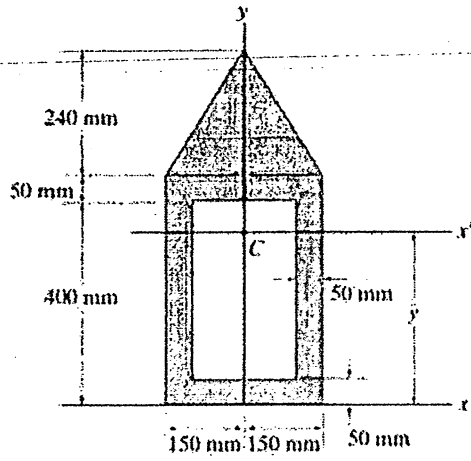
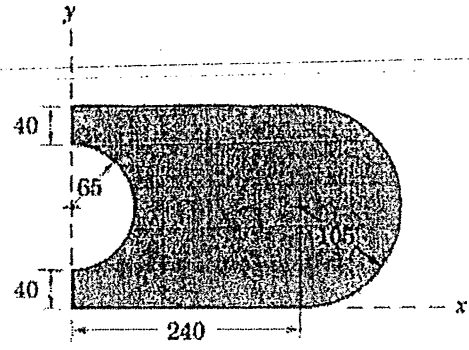
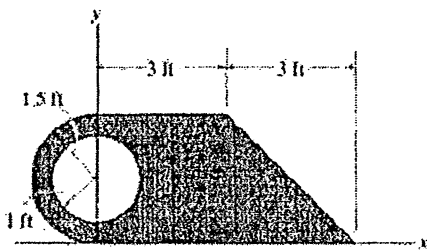
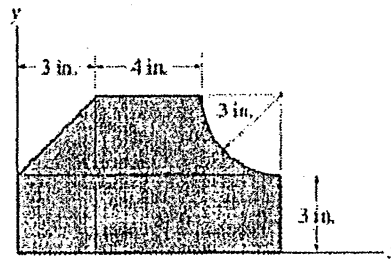
احسب المركز الهندسي $(\bar{x}, \bar{y})$ للمساحة المظللة والموضحة بالأشكال الآتية .



Dimensions in millimeters



Ans. $\bar{X} = 4.02b$, $\bar{Y} = 1.588b$



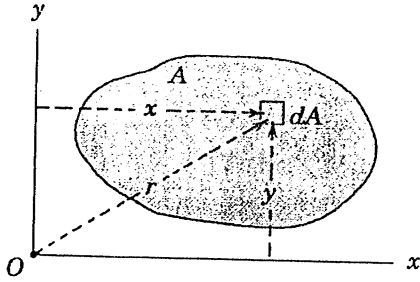
عزم القصور الذاتي (Moment of Inertia)

تعريف عزم القصور الذاتي حول محور

عزم القصور الذاتي حول محور ما هو حاصل ضرب المساحة في مربع بعدها عن المحور
عزم القصور القطبي الذاتي حول نقطة معينة

يساوي مجموع عزمي القصور الذاتي حول محورين متعامدين يمران بالنقطة .

عزم القصور الذاتي حول المحورين y, x :



يبين الشكل مساحة مستوية A ثابتة بالنسبة للمحورين y, x ، وإذا

قسمت المساحة A إلى مساحات صغيرة فإن مجموع حاصل ضرب هذه

المساحات في مربع بعدها عن المحور يعطي عزم القصور الذاتي للمساحة A

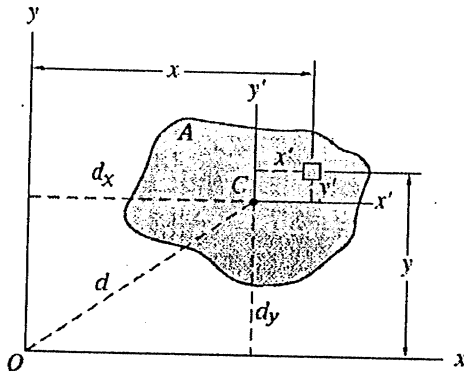
ويتم حساب عزم القصور الذاتي حول المحورين y, x بالمعادلتين :

$$I_x = \lim_{A_i \rightarrow 0} \sum_i x^2 A_i = \int_A x^2 dA, I_y = \lim_{A_i \rightarrow 0} \sum_i y^2 A_i = \int_A y^2 dA$$

عزم القصور القطبي الذاتي حول النقطة O

يساوي مجموع عزمي القصور الذاتي حول المحورين y, x ويرمز له بالرمز J_0

$$J_0 = I_x + I_y$$



نظرية المحاور المتوازية (النقل)

وتنص على أن "عزم القصور الذاتي لمساحة حول محور ما يساوي

القصور الذاتي حول محور موازي للأول ومار بالمركز الهندسي للمس

إليه حاصل ضرب مساحة الشكل في مربع البعد بين المحورين"

أي أن:

$$I_x = I_{x'} + A d_y^2, I_y = I_{y'} + A d_x^2$$

كما أن لنظرية النقل لعزم القصور الذاتي القطبي الصيغة التالية

$$J = J_0 + A d^2$$

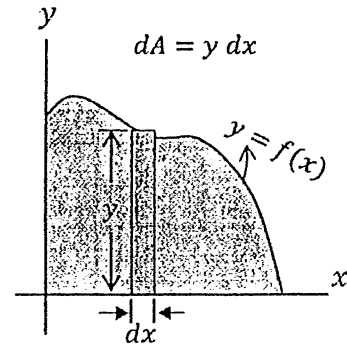
نتائج هامة :

1- من الشكل باستخدام شريحة رأسية : $dl_x = \frac{1}{3} y^2 dA \Rightarrow dl_x = \frac{1}{3} y^2 \cdot y dx = \frac{1}{3} y^3 dx$

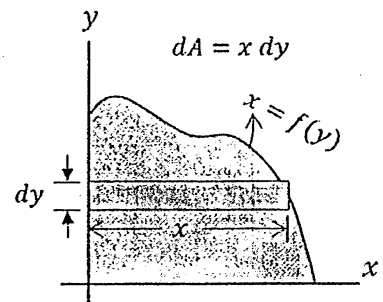
$$\Rightarrow I_x = \frac{1}{3} \int_A y^3 dx$$

$$dl_y = x^2 dA \Rightarrow dl_y = x^2 \cdot y dx$$

$$\Rightarrow I_y = \int_A x^2 y dx$$



2- من الشكل باستخدام شريحة أفقية :



$$dl_x = y^2 dA \Rightarrow dl_x = y^2 \cdot x dy$$

$$\Rightarrow I_x = \int_A y^2 x dy$$

$$dl_y = \frac{1}{3} x^2 dA \Rightarrow dl_y = \frac{1}{3} x^2 \cdot x dy = \frac{1}{3} x^3 dy$$

$$\Rightarrow I_y = \frac{1}{3} \int_A x^3 dy$$

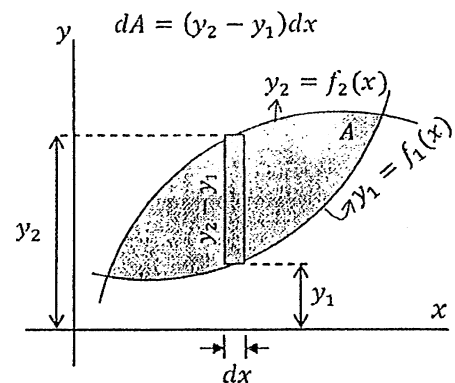
$$dl_x = \frac{1}{3} (y_2^3 - y_1^3) dx$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{1}{3} \int_A (y_2^3 - y_1^3) dx$$

$$dl_y = x^2 dA \Rightarrow dl_y = x^2 (y_2 - y_1) dx$$

$$I_y = \int_A x^2 (y_2 - y_1) dx$$

3- من الشكل باستخدام شريحة رأسية :



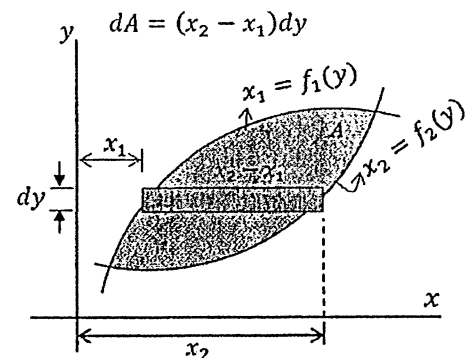
$$dl_x = y^2 dA \Rightarrow dl_x = y^2 (x_2 - x_1) dy$$

$$\Rightarrow I_x = \int_A y^2 (x_2 - x_1) dy$$

$$dl_y = \frac{1}{3} (x_2^3 - x_1^3) dy$$

$$\Rightarrow I_y = \frac{1}{3} \int_A (x_2^3 - x_1^3) dy$$

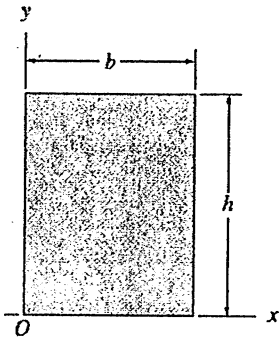
4- من الشكل باستخدام شريحة أفقية :



ملاحظة : يفضل عند إيجاد I_x استخدام شريحة أفقية ، ويفضل عند إيجاد I_y استخدام شريحة رأسية .

مثال 1/ باستخدام شريحة أفقية برهن أن عزمي القصور الذاتي للمساحة

المستوية المبينة بالشكل

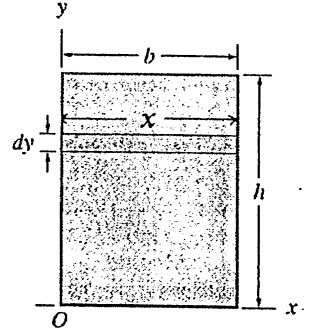


$$I_x = \frac{bh^3}{3}, I_y = \frac{hb^3}{3}$$

الحل /

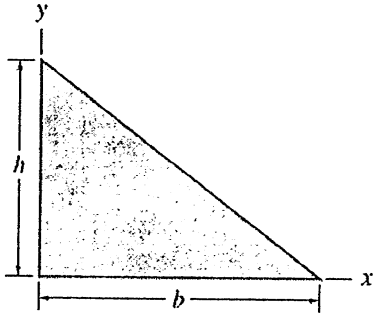
$$\therefore I_x = \int_A y^2 x dy \Rightarrow I_x = \int_0^h y^2 (b) dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

$$\therefore I_y = \frac{1}{3} \int_A x^3 dy \Rightarrow I_y = \frac{1}{3} \int_0^h b^3 dy = \frac{b^3}{3} [y]_0^h = \frac{hb^3}{3}$$



مثال 2/ برهن أن عزمي القصور الذاتي للمساحة المستوية المبينة بالشكل

$$I_x = \frac{bh^3}{12}, I_y = \frac{hb^3}{12}$$



معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0, h), (b, 0)$

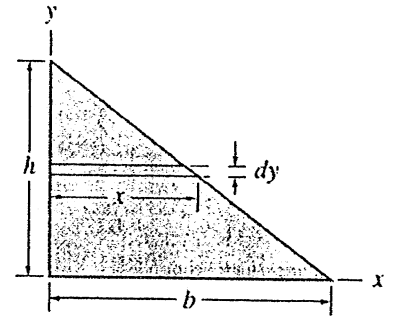
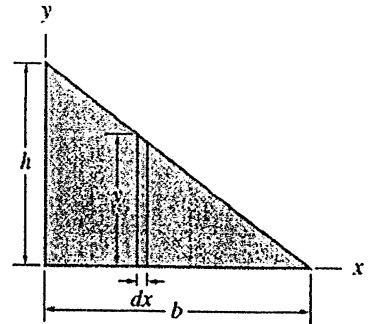
$$y = mx + b \Rightarrow y = h - \frac{h}{b} x \Rightarrow x = b - \frac{b}{h} y$$

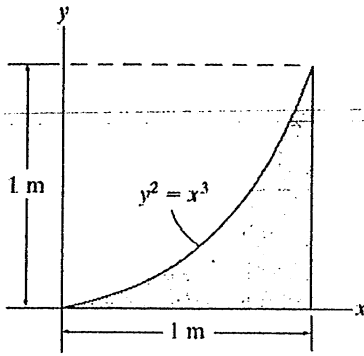
$$\therefore I_x = \int_A y^2 x dy \Rightarrow I_x = \int_0^h y^2 \left(b - \frac{b}{h} y \right) dy$$

$$= \int_0^h \left(by^2 - \frac{b}{h} y^3 \right) dy = \left[\frac{by^3}{3} - \frac{b}{h} \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

$$\therefore I_y = \int_A x^2 y dx = \int_0^b x^2 \left(h - \frac{h}{b} x \right) dx$$

$$= \int_0^b \left(hx^2 - \frac{h}{b} x^3 \right) dx = \left[\frac{hx^3}{3} - \frac{h}{b} \frac{x^4}{4} \right]_0^b = \frac{hb^3}{3} - \frac{hb^3}{4} = \frac{hb^3}{12}$$



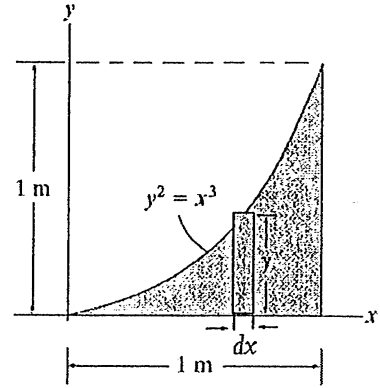
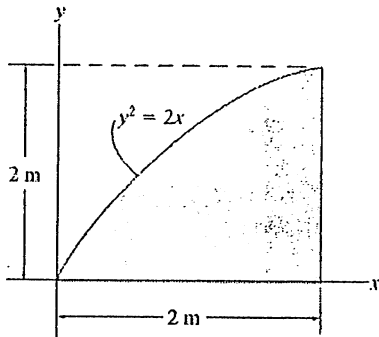


مثال 3/ باستخدام شريحة رأسية احسب عزم القصور الذاتي I_x و I_y للمساحة المستوية المبينة بالشكل

الحل /

$$\begin{aligned} \therefore I_x &= \frac{1}{3} \int_A y^3 dx \Rightarrow I_x = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[x^{\frac{3}{2}} \right]^3 dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left[x^{\frac{9}{2}} \right] dx = \frac{1}{3} \left[\frac{2 x^{\frac{11}{2}}}{11} \right]_0^1 = \frac{2}{33} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore I_y &= \int_A x^2 y dx \Rightarrow I_y = \int_0^1 x^2 \left[x^{\frac{3}{2}} \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[x^{\frac{7}{2}} \right] dx = \left[\frac{2 x^{\frac{9}{2}}}{9} \right]_0^1 = \frac{2}{9} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

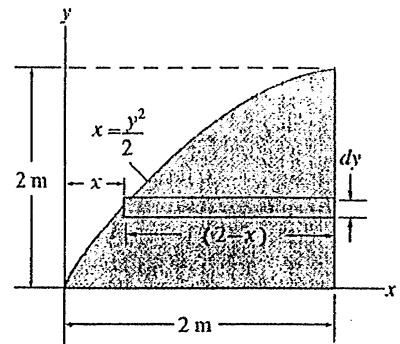


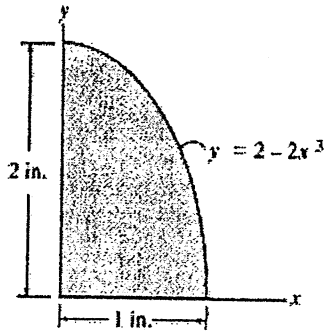
مثال 4/ باستخدام شريحة أفقية احسب عزم القصور الذاتي I_x و I_y للمساحة المستوية المبينة بالشكل

الحل /

$$\begin{aligned} \therefore I_x &= \int_A y^2 (2 - x) dy = \int_0^2 y^2 \left(2 - \frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(2y^2 - \frac{1}{2} y^4 \right) dy = \left[\frac{2 y^3}{3} - \frac{1}{10} y^5 \right]_0^2 = \frac{32}{15} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore I_y &= \frac{1}{3} \int_A (x_2^3 - x_1^3) dy = \frac{1}{3} \int_0^2 \left(8 - \frac{y^6}{8} \right) dy \\ &= \frac{1}{3} \left[8y - \frac{y^7}{56} \right]_0^2 = 4.57 \text{ m}^4 \end{aligned}$$



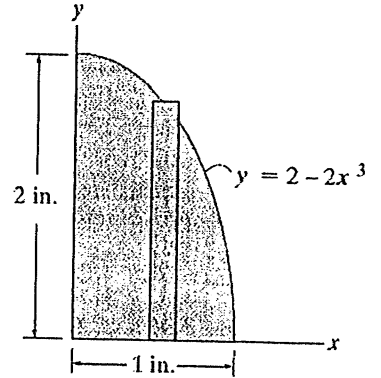
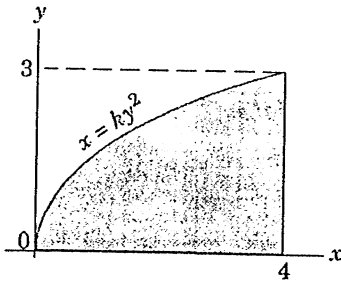


مثال 5/ باستخدام شريحة رأسية احسب عزم القصور الذاتي I_x و I_y للمساحة المستوية المبينة بالشكل .

الحل /

$$\begin{aligned} \therefore I_x &= \frac{1}{3} \int_A y^3 dx \Rightarrow I_x = \frac{1}{3} \int_0^1 [2 - 2x^3]^3 dx \\ &= \frac{8}{3} \int_0^1 [1 - x^3]^3 dx = \frac{8}{3} \int_0^1 [1 - 3x^3 + 3x^6 - x^9] dx \\ &= \frac{8}{3} \left[x - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{7}x^7 - \frac{1}{10}x^9 \right]_0^1 = \frac{54}{35} \text{ in}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore I_y &= \int_A x^2 y dx \Rightarrow I_y = \int_0^1 x^2 [2 - 2x^3] dx \\ &= \int_0^1 [2x^2 - 2x^5] dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^6 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ in}^4 \end{aligned}$$



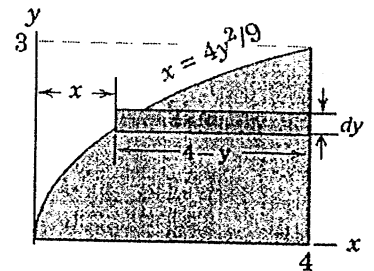
مثال 6/ احسب عزم القصور الذاتي I_x للمساحة المستوية المبينة بالشكل باستخدام أ) شريحة أفقية ب) شريحة رأسية (المسافة بالأمتار)

الحل / عندما $x = 4$ و بالتعويض $y = 3$ في المعادلة $x = ky^2$

$$k = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \frac{4}{9} y^2 \Rightarrow y = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

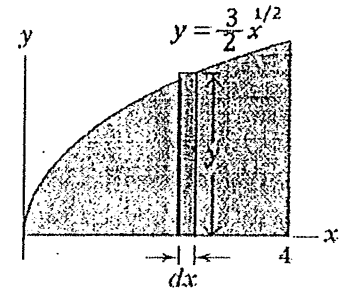
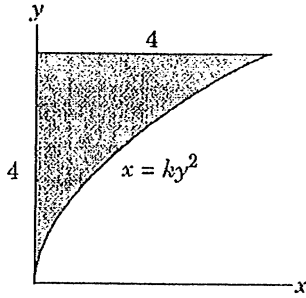
$$\begin{aligned} \therefore I_x &= \int_A y^2 dA = \int_0^3 y^2 (4 - x) dy \\ &= \int_0^3 y^2 \left(4 - \frac{4}{9} y^2 \right) dy = \int_0^3 \left(4y^2 - \frac{4}{9} y^4 \right) dy \\ &= \left[\frac{4}{3} y^3 - \frac{4}{45} y^5 \right]_0^3 = 14.4 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

أ) باستخدام شريحة أفقية :



(ب) باستخدام شريحة رأسية :

$$\begin{aligned} \therefore I_x &= \frac{1}{3} \int_A y^3 dx = \frac{1}{3} \int_0^4 \left[\frac{3}{2} x^{1/2} \right]^3 dx \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{8} \int_0^4 x^{3/2} dx = \frac{9}{8} \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^4 = \frac{72}{5} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

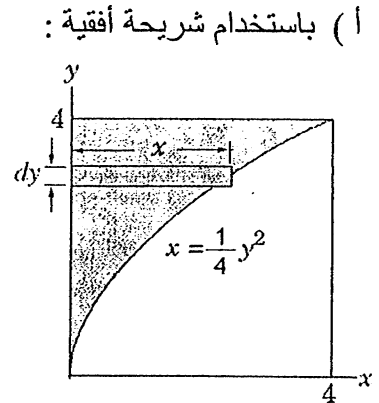


مثال 7/ احسب عزم القصور الذاتي I_x للمساحة المستوية المبينة بالشكل
(باستخدام أ) شريحة أفقية (ب) شريحة رأسية (المسافة بالأمتار)

الحل / $\therefore$ المنحني $x = ky^2$ يمر بالنقطة (4,4)

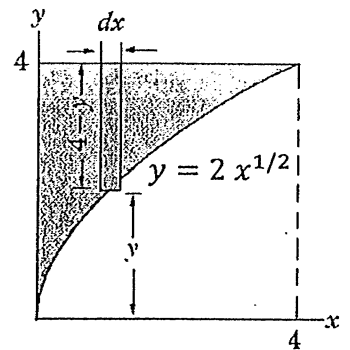
$$\Rightarrow 4 = 16k \Rightarrow k = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} y^2 \Rightarrow y = 2 x^{1/2}$$

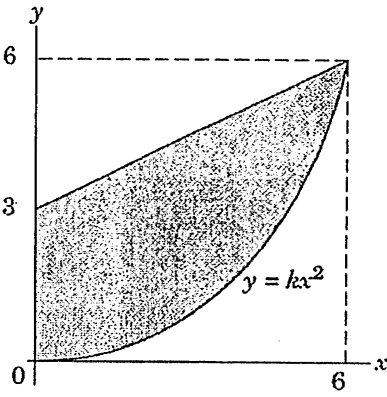
$$\begin{aligned} \therefore I_x &= \int_A y^2 x dy = \int_0^4 y^2 \left(\frac{1}{4} y^2 \right) dy = \frac{1}{4} \int_0^4 y^4 dy \\ &= \frac{1}{20} [y^5]_0^4 = \frac{256}{5} = 51.2 \text{ m}^4 \end{aligned}$$



(ب) باستخدام شريحة رأسية :

$$\begin{aligned} \therefore I_x &= \frac{1}{3} \int_A (y_2^3 - y_1^3) dy = \frac{1}{3} \int_0^4 (4^3 - [2x^{1/2}]^3) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^4 (4^3 - 8x^{3/2}) dx = \frac{1}{3} \left[4^3 x - \frac{16}{5} x^{5/2} \right]_0^4 \\ &= 51.2 \text{ m}^4 \end{aligned}$$





مثال 8/ احسب عزم القصور الذاتي I_x للمساحة المستوية المبينة بالشكل (المسافة بالأمتار).

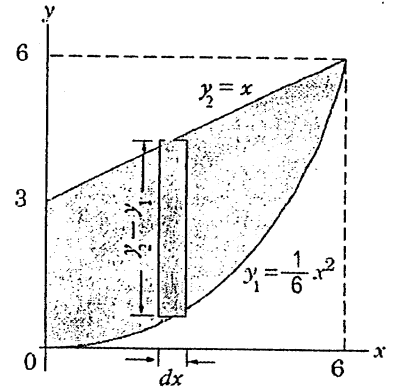
الحل / نوجد معادلة الخط المستقيم :

$$y = mx + b, m = \frac{6-3}{6-0} = \frac{1}{2}, b = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$$

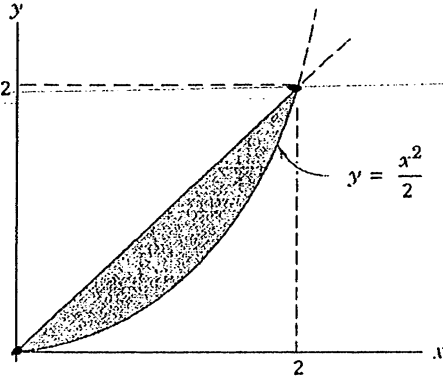
∴ المنحني $y = kx^2$ يمر بالنقطة (6,6)

$$\Rightarrow 6 = 36k \Rightarrow k = \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{6}x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore I_x &= \frac{1}{3} \int_A (y_2^3 - y_1^3) dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^6 \left[\left(\frac{1}{2}x + 3 \right)^3 - \left(\frac{1}{6}x^2 \right)^3 \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^6 \left[\frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{2}x + 27 - \frac{1}{216}x^6 \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{32}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + 27x - \frac{1}{1512}x^7 \right]_0^6 \\ &= 140.8 \text{ m}^4 \end{aligned}$$



مثال 9/ احسب عزم القصور القطبي الذاتي J_0 للمساحة المستوية المبيّنة بالشكل .



$y = x$
 $\frac{2-0}{2-0} = 1$

الحل /

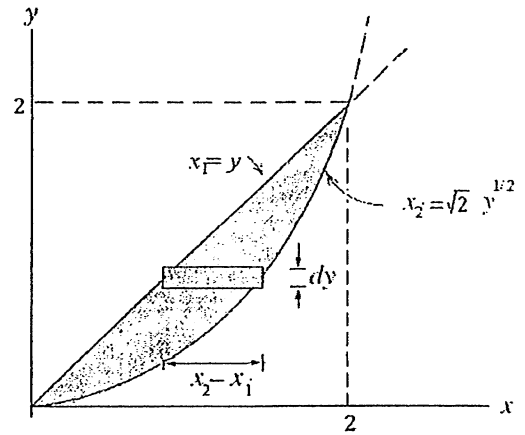
$\sqrt{2} y$

معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0,0)$, $(2,2)$ هي $y = x$

باستخدام شريحة أفقية لإيجاد I_x :

$$\begin{aligned} \therefore I_x &= \int_A y^2 (x_2 - x_1) dy = \int_0^2 y^2 (\sqrt{2} y^{1/2} - y) dy \\ &= \int_0^2 (\sqrt{2} y^{5/2} - y^3) dy = \left[\sqrt{2} \frac{y^{7/2}}{7/2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{7} m^4 \end{aligned}$$

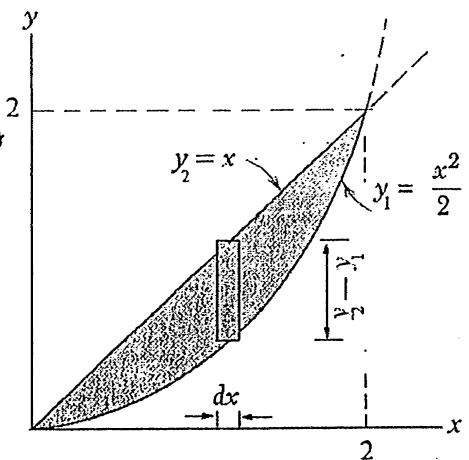
و. $\int 2 \frac{4}{7}$



باستخدام شريحة رأسية لإيجاد I_y :

$$\begin{aligned} \therefore I_y &= \int_A x^2 (y_2 - y_1) dx = \int_0^2 x^2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dy = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{y^5}{10} \right]_0^2 = \frac{12}{5} m^4 \end{aligned}$$

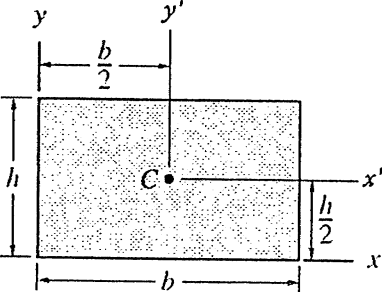
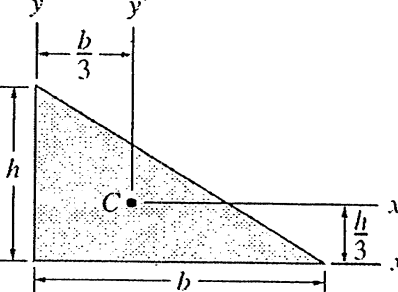
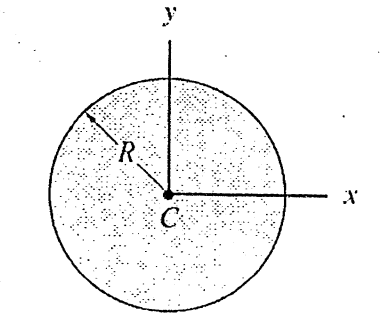
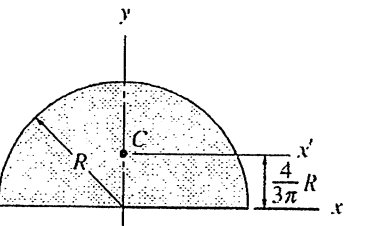
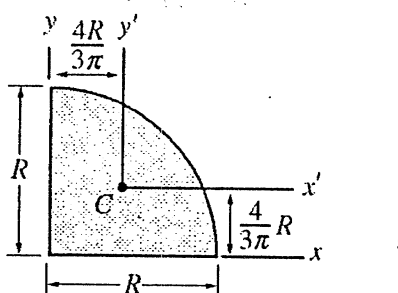
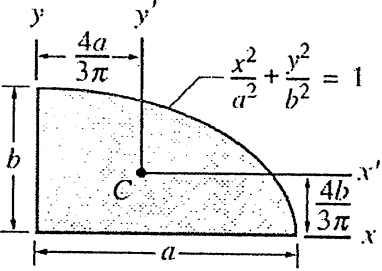
$$\therefore J_0 = I_x + I_y = \frac{4}{7} + \frac{12}{5} = \frac{104}{35} = 2.97 m^4$$



$$I_x = \sum I_{x'} + \sum A d_y^2, I_y = \sum I_{y'} + \sum A d_x^2$$

$$J_o = I_x + I_y$$

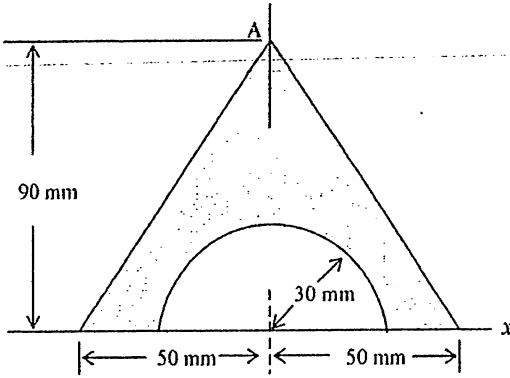
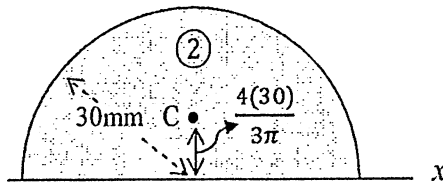
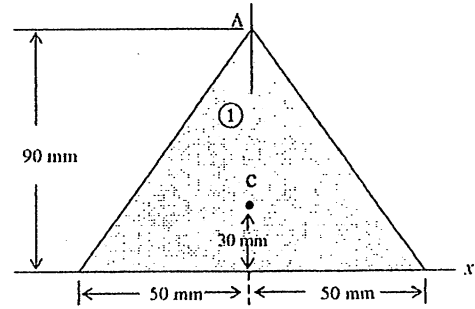
حيث $I_{x'}$ عزم القصور الذاتي حول المحور x' والموازي للمحور x ويمر بالمركز الهندسي للشكل، d_y بعد المركز الهندسي عن المحور x ، $I_{y'}$ عزم القصور الذاتي حول محور y' والموازي للمحور y ويمر بالمركز الهندسي للشكل، d_x بعد المركز الهندسي عن المحور y

<p>المستطيل</p>  $I_x = \frac{bh^3}{3}, I_y = \frac{hb^3}{3}$ $I_{x'} = \frac{bh^3}{12}, I_{y'} = \frac{hb^3}{12}$	<p>المثلث</p>  $I_x = \frac{bh^3}{12}, I_y = \frac{hb^3}{12}$ $I_{x'} = \frac{bh^3}{36}, I_{y'} = \frac{hb^3}{36}$	<p>الدائرة</p>  $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$
<p>نصف الدائرة</p>  $I_x = \frac{\pi R^4}{8}, I_y = I_{y'} = \frac{\pi R^4}{8}$ $I_{x'} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) R^4 = 0.1098 R^4$	<p>ربع الدائرة</p>  $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$ $I_{x'} = I_{y'} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) R^4 = 0.05488 R^4$	<p>ربع القطع الناقص</p>  $I_x = \frac{\pi ab^3}{16}, I_y = \frac{\pi ba^3}{16}$ $I_{x'} = 0.054ab^3, I_{y'} = 0.054ba^3$

أمثلة

1- احسب عزم القصور الذاتي حول المحور x .

الحل :



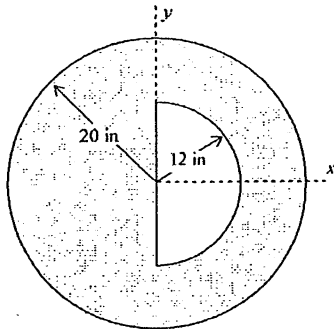
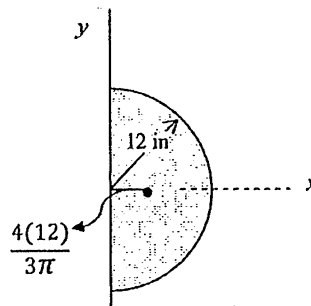
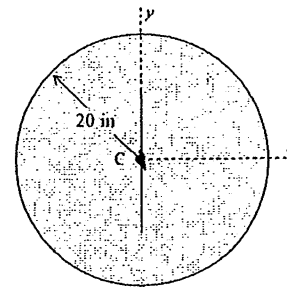
$$\textcircled{1} I_x]_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{100(90)^3}{12} = 6.08 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$\textcircled{2} I_x]_2 = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi}{8} (30)^4 = 0.318 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$\therefore I_x = 6.08 (10)^6 - 0.318 (10)^6 = 5.76 (10)^6 \text{ mm}^4$$

2- احسب عزم القصور الذاتي حول المحور y .

الحل :

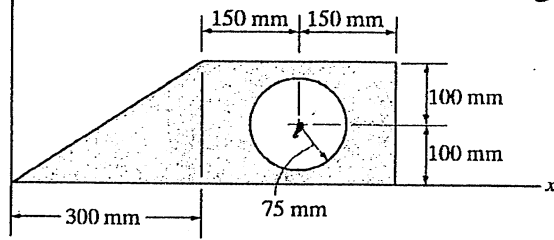


$$\textcircled{1} I_y]_1 = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi(20)^4}{4} = 1.26 (10)^5$$

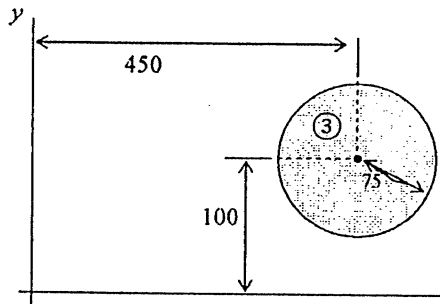
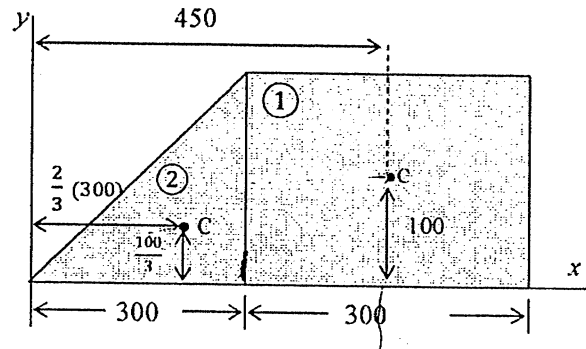
$$\textcircled{2} I_y]_2 = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi(12)^4}{8} = 0.08 (10)^5$$

$$\therefore I_y = 1.26 (10)^5 - 0.08 (10)^5 = 1.18 (10)^5 \text{ in}^4$$

3- احسب عزم القصور الذاتي حول المحور x وحول المحور y



الحل :



$$① I_x]_1 = \frac{bh^3}{3} = \frac{300(200)^3}{3} = 8(10)^8 \text{ mm}^4$$

$$② I_x]_2 = \frac{bh^3}{12} = \frac{300(200)^3}{12} = 2(10)^8 \text{ mm}^4$$

$$③ I_x]_3 = \frac{\pi R^4}{4} + Ad_y^2 = \frac{\pi(75)^4}{4} + \pi(75)^2(100)^2$$

$$= 2.0157(10)^8 \text{ mm}^4$$

$$\therefore I_x = 8(10)^8 + 2(10)^8 - 2.0157(10)^8 = 798.43(10)^8 \text{ mm}^4$$

$$① I_y]_1 = \bar{I}_y + Ad_x^2 = \frac{hb^3}{12} + Ad_x^2$$

$$= \frac{200(300)^3}{12} + (200)(300)(450)^2 = 1.26(10)^{10} \text{ mm}^4$$

$$② I_y]_2 = \frac{hb^3}{36} + Ad_x^2 = \frac{200(300)^3}{36} + \frac{1}{2}(200)(300)\left[\frac{2}{3}(300)\right]^2$$

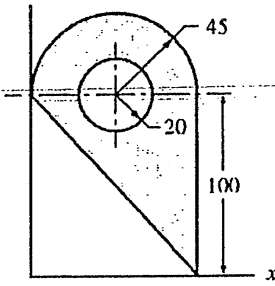
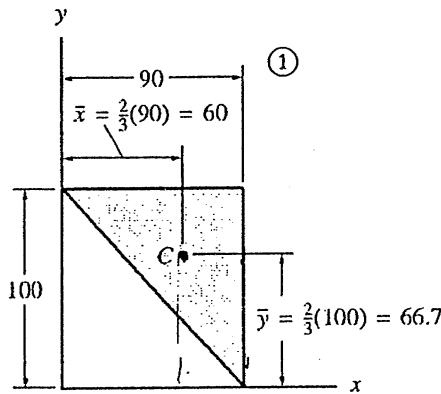
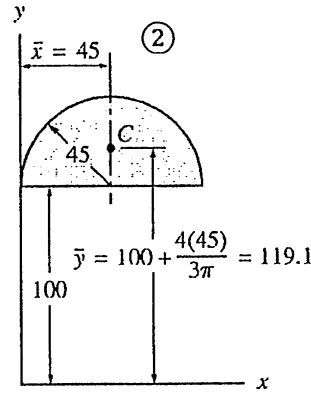
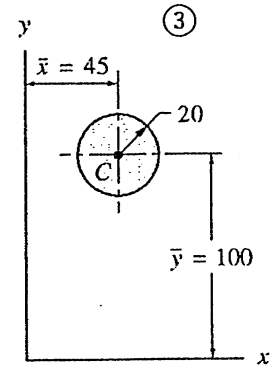
$$= 0.135(10)^{10} \text{ mm}^4$$

$$③ I_y]_3 = \frac{\pi R^4}{4} + Ad_x^2 = \frac{\pi(75)^4}{4} + \pi(75)^2(450)^2 = 0.36(10)^{10} \text{ mm}^4$$

$$\therefore I_y = 1.26(10)^{10} + 0.135(10)^{10} - 0.36(10)^{10} = 1.035(10)^{10} \text{ mm}^4$$

4- احسب عزم القصور الذاتي حول المحور x وحول المحور y .
(الابعاد بالمليمتر)

الحل :



$$\textcircled{1} \quad I_{x1} = \frac{bh^3}{36} + Ad_y^2 = \frac{90(100)^3}{36} + \frac{1}{2} (90)(100) (66.7)^2 = 22.5 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$\textcircled{2} \quad I_{x2} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) R^4 + Ad_y^2 = 0.1098 (45)^4 + \frac{1}{2} \pi (45)^2 (119.1)^2 = 45.57 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$\textcircled{3} \quad I_{x3} = \frac{\pi R^4}{4} + Ad_y^2 = \frac{\pi (20)^4}{4} + \pi (20)^2 (100)^2 = 12.69 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$\therefore I_x = 22.5 (10)^6 + 45.57 (10)^6 - 12.69 (10)^6 = 55.35 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$\textcircled{1} \quad I_{y1} = \frac{hb^3}{36} + Ad_x^2 = \frac{100(90)^3}{36} + \frac{1}{2} (90)(100) (60)^2 = 18.23 (10)^6 \text{ mm}^4$$

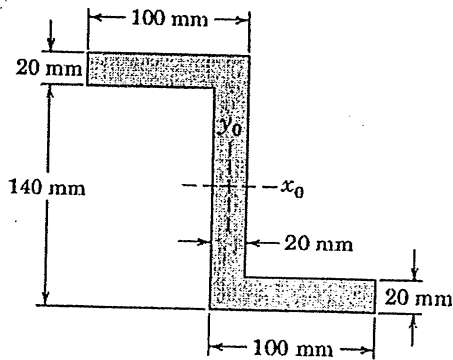
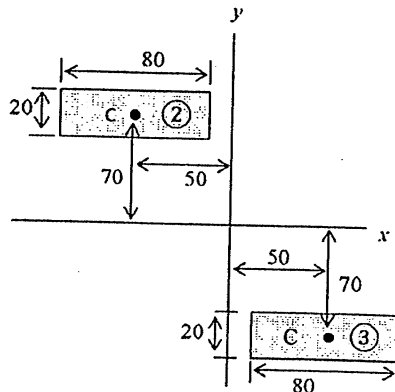
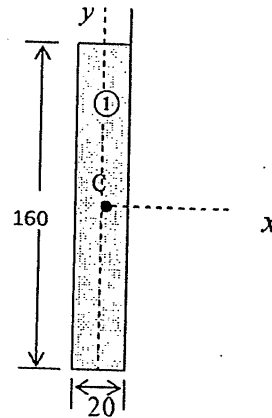
$$\textcircled{2} \quad I_{y2} = \frac{\pi R^4}{8} + Ad_x^2 = \frac{\pi}{8} (45)^4 + \frac{1}{2} \pi (45)^2 (45)^2 = 8.05 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$\textcircled{3} \quad I_{y3} = \frac{\pi R^4}{4} + Ad_x^2 = \frac{\pi (20)^4}{4} + \pi (20)^2 (45)^2 = 2.67 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$\therefore I_y = 18.23 (10)^6 + 8.05 (10)^6 - 2.67 (10)^6 = 23.61 (10)^6 \text{ mm}^4$$

5- احسب عزم القصور الذاتي القطبي I_0 .

الحل :



$$I_x]_1 = \frac{bh^3}{12} + Ad_y^2 = \frac{20(160)^3}{12} + (20)(160)(0) = 6.83(10)^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x]_2 = \frac{bh^3}{12} + Ad_y^2 = \frac{80(20)^3}{12} + (80)(20)(70)^2 = 7.89(10)^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x]_3 = I_x]_2 = 7.89(10)^6 \text{ mm}^4$$

$$\therefore I_x = 6.83(10)^6 + 7.89(10)^6 + 7.89(10)^6 = 22.6(10)^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y]_1 = \frac{hb^3}{12} + Ad_x^2 = \frac{160(20)^3}{12} + (20)(160)(0) = 0.1067(10)^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y]_2 = \frac{hb^3}{12} + Ad_x^2 = \frac{20(80)^3}{12} + (20)(80)(50)^2 = 4.85(10)^6 \text{ mm}^4$$

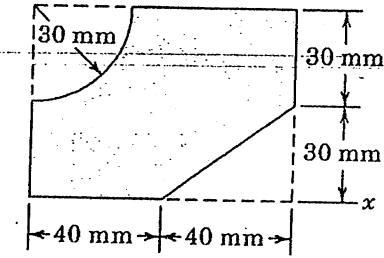
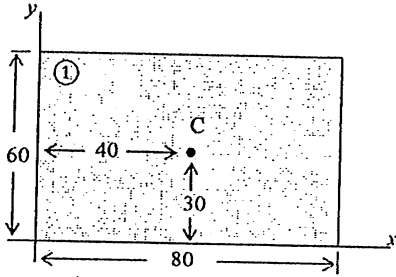
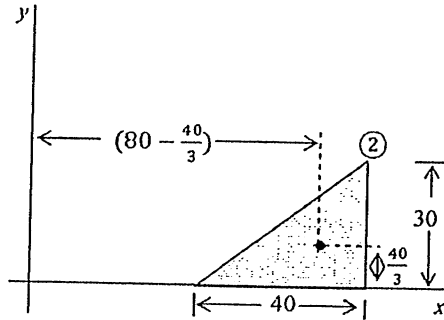
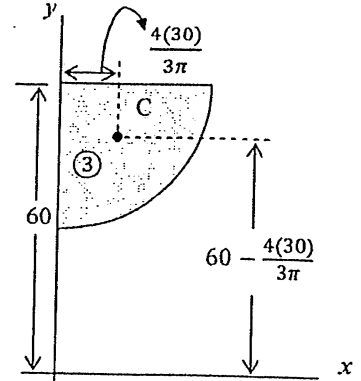
$$I_y]_2 = I_y]_3 = 4.85(10)^6 \text{ mm}^4$$

$$\therefore I_y = 0.1067(10)^6 + 4.85(10)^6 + 4.85(10)^6 = 9.81(10)^6 \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow I_0 = I_x + I_y = 7.89(10)^6 + 9.81(10)^6 = 17.7(10)^6 \text{ mm}^4$$

6- احسب عزم القصور الذاتي القطبي I_0 .

الحل :



$$① I_x]_1 = \frac{bh^3}{3} = \frac{80(60)^3}{3} = 5.76 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$② I_x]_2 = \frac{bh^3}{12} = \frac{40[30]^3}{12} = 0.09 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$③ I_x]_3 = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) R^4 + Ad_y^2 = 0.05488 (30)^4 + \frac{1}{4} \pi (30)^2 \left(60 - \frac{4(30)}{3\pi} \right)^2 = 1.62 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$\therefore I_x = 5.76 (10)^6 - 0.09 (10)^6 - 1.62 (10)^6 = 4.05 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$① I_y]_1 = \frac{hb^3}{3} = \frac{60(80)^3}{3} = 10.24 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$② I_y]_2 = \frac{hb^3}{36} + Ad_x^2 = \frac{30(40)^3}{36} + \frac{1}{2} (30)(40) \left(80 - \frac{40}{3} \right)^2 = 2.72 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$③ I_y]_3 = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) R^4 + Ad_x^2 = 0.05488 (30)^4 + \frac{1}{4} \pi (30)^2 \left(\frac{4(30)}{3\pi} \right)^2 = 0.159 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y]_3 = \frac{\pi R^4}{16} = \frac{\pi}{16} (30)^4 = 0.159 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

بطريقة اخرى :

$$\therefore I_y = 10.24 (10)^6 - 2.72 (10)^6 - 0.159 (10)^6 = 7.36 (10)^6 \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow I_0 = I_x + I_y = 4.05 (10)^6 + 7.36 (10)^6 = 11.41 (10)^6 \text{ mm}^4$$

تمرين / احسب عزم القصور الذاتي حول المحور x وحول المحور y للأشكال الآتية .

