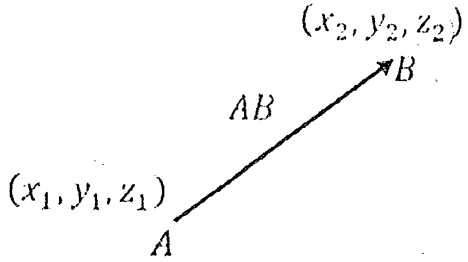
المتجهات

المتجه في مستوى $\overrightarrow{A} = A_x i + A_y j$ مقدار المتجه $|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ اما الاتجاه $tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$

المتجه في فراغ $\overrightarrow{A} = A_x i + A_y j + A_z k$ مقدار المتجه $|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

اما الاتجاهات مع المحاور $cos\theta_x = \frac{A_x}{|A|}$ ، $cos\theta_y = \frac{A_y}{|A|}$ ، $cos\theta_z = \frac{A_z}{|A|}$



أي متجه علمت نقطة البداية والنهاية يمكن تحويله لمتجه

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$$
$$AB = A_x i + A_y j + A_z k$$

متجه الوحدة $\vec{e} = \frac{\overrightarrow{A}}{|A|}$ وهو يدل على اتجاه الكمية المتجهة والذي يمكن كتابته بالصيغ الاتية

$\vec{e} = \frac{A_x i + A_y j + A_z k}{|A|}$ او $\overrightarrow{e} = \frac{A_x}{|A|} i + \frac{A_y}{|A|} j + \frac{A_z}{|A|} k$ او $\vec{e} = cos\theta_x i + cos\theta_y j + cos\theta_z k$

الذي يمكن إعادة كتابته بالصورة $(cos\theta_x)^2 + (cos\theta_y)^2 + (cos\theta_z)^2 = 1$

$$\overrightarrow{e} = \frac{(x_2 - x_1)}{|A|} i + \frac{(y_2 - y_1)}{|A|} j + \frac{(z_2 - z_1)}{|A|} k$$

اذا علم متجه الوحدة (جيب التمام) واحداثيات نقطة لمتجه ومقدار وجزء من المتجه يمكن إيجاد احداثيات النقطة الأخرى .

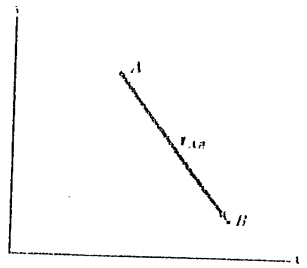
إذا كان لدينا مقدار لكمية متجهة فان حاصل ضرب مقدار هذه القوة في متجه الوحدة $\vec{e}$ يعطي مركبات هذه القوة على المحاور الاساسية (معادلة اتجاهية)

$\overrightarrow{F} = |f|\,\vec{e}$ نحصل على $\overrightarrow{F} = F_x i + F_y j + F_z k$

$\overrightarrow{A} = |A|\,\vec{e}$ نحصل على $\overrightarrow{A} = A_x i + A_y j + A_z k$

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

مثال/ احداثيات النقطة $A = (1.8\ ,\ 3)ft$ والنقطة B لها أحداثي $y = 0.6ft$ ومتجه الوحدة $e_{AB} = 0.616i - 0.788j$ ماهي مركبات المتجه r_{AB}

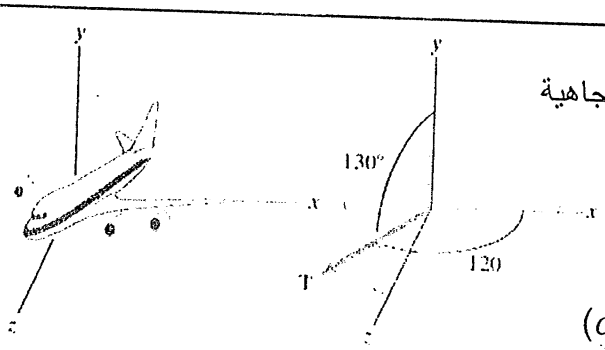


الحل/ $-0,788 = \frac{(0,6-3)}{|r_{AB}|}$ $cos\theta_y = \frac{(y_2-y_1)}{|r_{AB}|}$ $|r_{AB}| = 3,05$

$\overrightarrow{AB} = |r_{AB}|\ \vec{e}$

$\overrightarrow{AB} = [1.88i - 2.4j]ft$ بذلك $\overrightarrow{AB} = 3,05[0.616i - 0.788j]$

مثال/ إذا كانت $T = 200KN$ عبر عنها بمعادلة اتجاهية



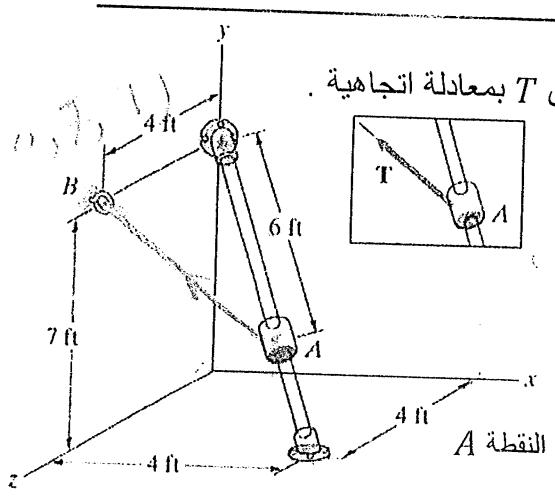
الحل/

$(cos120)^2 + (cos130)^2 + (cos\theta_z)^2 = 1$

$\overrightarrow{T} = |200|\ [cos120i + cos130j + cos54,5k]$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{T} = |200|\ \vec{e}$

$\overrightarrow{T} = (-100i - 128.6j + 116k)kN$

مثال/الكابل AB يؤثر بشد $T = 32Ib$ عند الطوق A عبرعن T بمعادلة اتجاهية .



الحل:-

معادلة العمود المائل بدلالة نقاطه $r = -4i + 7j - 4k$

عل نفس العمود $\vec{e} = \frac{-4}{9}i + \frac{7}{9}j - \frac{4}{9}k$

بذلك يمكن إيجاد إحداثيات النقطة A $\frac{(x_2-x_1)}{|A|}i + \frac{(y_2-y_1)}{|A|}j + \frac{(z_2-z_1)}{|A|}$

بذلك $\frac{-4}{9} = \frac{(0-x_1)}{6}$, $\frac{7}{9} = \frac{(7-y_1)}{6}$, $\frac{-4}{9} = \frac{(0-z_1)}{6}$ $A(2.67\ ,\ 2.3\ ,\ 2.67)$

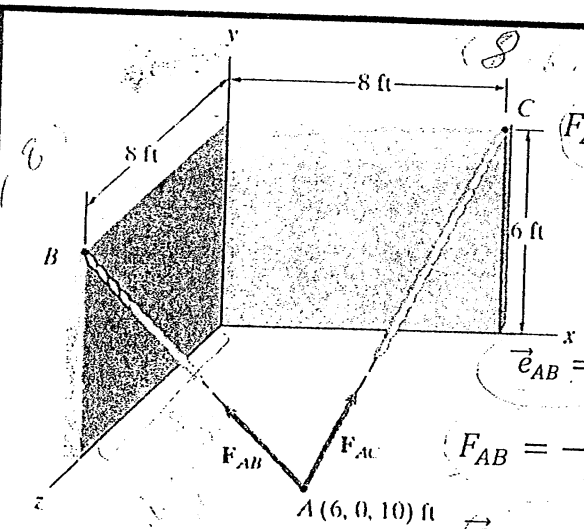
معادلة الكابل $r_{AB} = -2.67i + 4.7j + 1.33k$

بذلك $\vec{e}_{AB} = \frac{-2.67}{5.6}i + \frac{4.7}{5.6}j + \frac{1.33}{5.6}k$ اذا $T_{AB} = T\vec{e}_{AB}$

$T_{AB} = -15.3i + 26.9j + 7.6k$

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإجمال على الرقم 0911337506

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911137606



مثال/ اذا كانت القوة $F_{AB} = 200Ib$ والقوة $F_{AC} = 100Ib$

اوجد المحصلة واتجاهها

الحل:-

$r_{AB} = -6i + 6j - 2k$ بذلك $\vec{e}_{AB} = \frac{-6}{8.72}i + \frac{6}{8.72}j - \frac{2}{8.72}k$

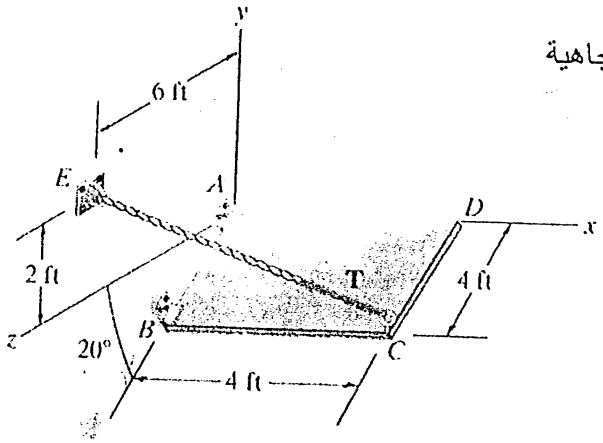
$F_{AB} = 200\vec{e}_{AB}$ بذلك $F_{AB} = -137.6i + 137.6j - 45.9k$

$r_{AC} = 2i + 6j - 10k$ بذلك $\vec{e}_{AC} = \frac{2}{11.8}i + \frac{6}{11.8}j - \frac{10}{11.8}k$

$F_{AC} = 100\vec{e}_{AC}$ بذلك $F_{AC} = 17i + 50.8j - 84.7k$

$R = -120.6i + 188.4j - 130.6k$

$R = \sqrt{120.6^2 + 188.4^2 + 130.6^2} = 259Ib$ اذا $\theta_x = 117.8°,\ \theta_y = 43.3°\ ,\theta_z = 120.3°$



مثال/ القوة في الكابل $T_{CE} = 50Ib$ عبر عنه بمعادلة اتجاهية

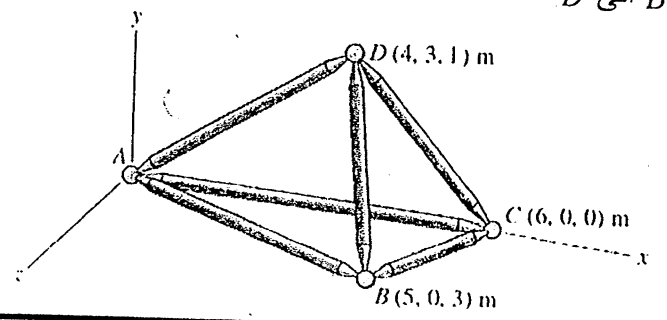
الحل:-

$A(4\ ,-1.37\ ,3.76)\ \ E(0\ ,2\ ,6)$

$r_{CE} = -4i + 3.37j + 2.24k$ بذلك

$\vec{e}_{CE} = -\frac{4}{5.7}i + \frac{3.37}{5.7}j + \frac{2.24}{5.7}k$

$T_{CE} = -35.14i + 29.6j + 19.65k$ بذلك $T_{CE} = 50\vec{e}_{CE}$



مثال/ اوجد مركبات المتجه r_{BD} وطول المسافة من B الى D

الحل :-

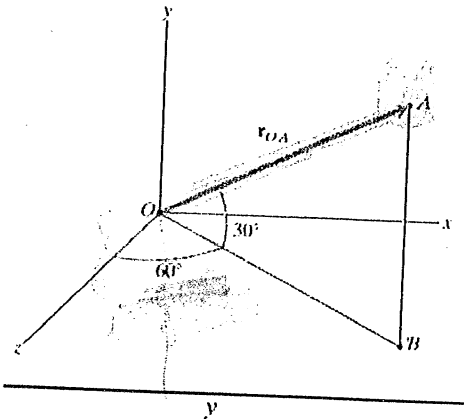
$r_{BD} = -i + 3j - 2k$

$BD = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الاتصال على الرقم 0911370506

تمارين واجب

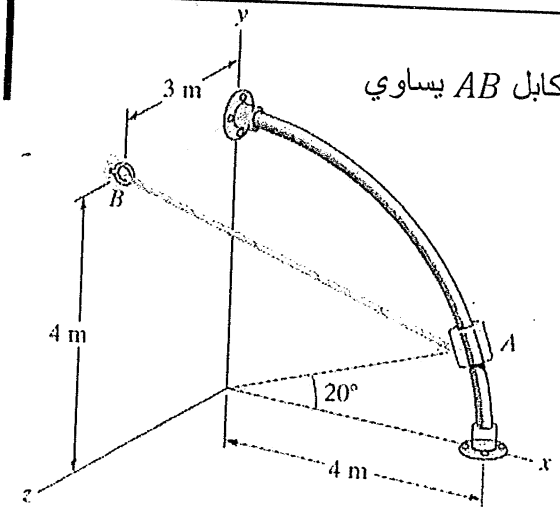
1(المتجه $r_{OA} = 20ft$ و AB موازي للمحور y والنقطة B في المستوى $x - z$ عبر عن r_{OA} بمعادلة اتجاهية .



$$r_{OA} = 15i + +10j + 68.66k$$

---

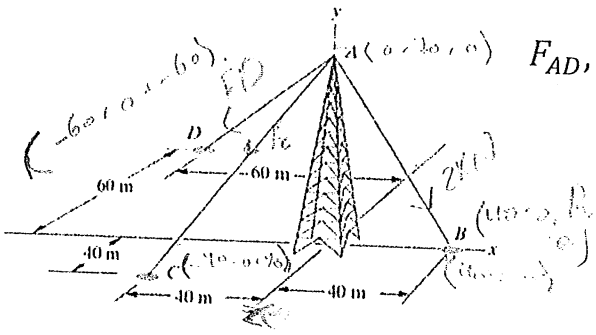
2) الطوق له نصف قطر $4m$ في المستوى $x - y$ والشد في الكابل AB يساوي $60N$ عبر عنه بمعادلة اتجاهية



$$T = -41i + +28.8j + 32.8k$$

---

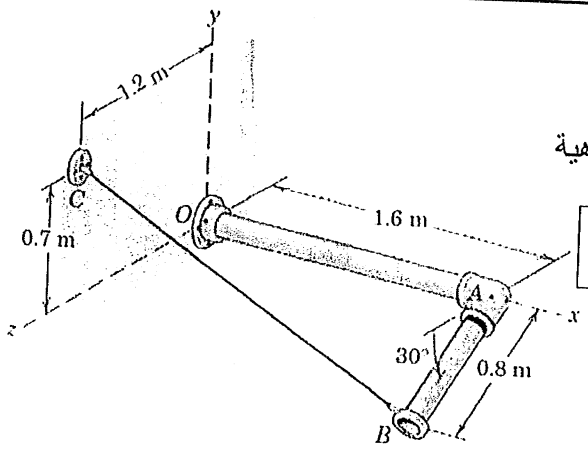
3) البرج طوله $70m$والقوة في الكابل $F_{AB} = 2KN$ ومركبات القوى في اتجاه x, z تساوي صفر/لجميع الكوابل الثلاثة ماهي مقدار القوة في الكابل F_{AD}, F_{AC}



$$F_{AC} = 1.1163KN, \quad F_{AD} = 0.91$$

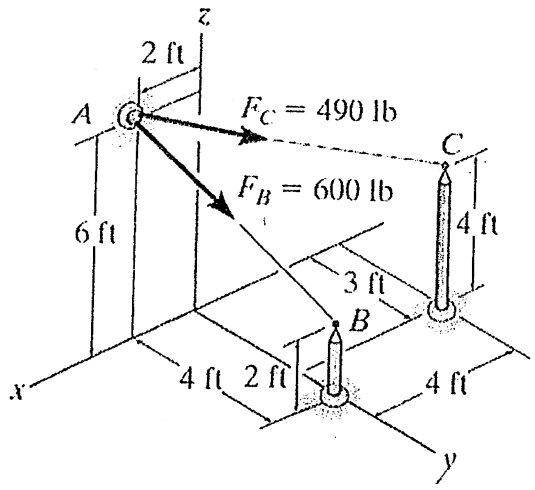
---

4) الشد في الكابل $T_{BC} = 750N$ عبر عنه بمعادلة اتجاهية



$$T_{BC} = -598i + 411j + 189.5k$$

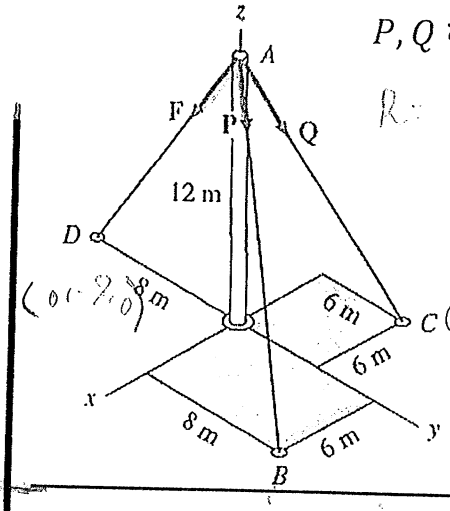
5) اوجد المحصلة مقدارا واتجاهاً



$$R = -620i + 610j - 540k$$

---

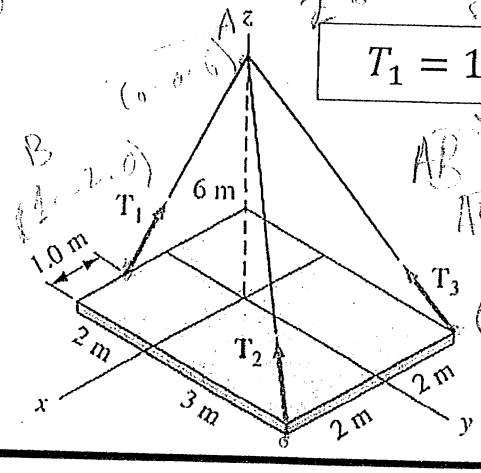
6) القوى الثلاثة تؤثر في اتجاه محور Z اذا كانت $F = 120N$ اوجد القوة P, Q



$$P = 74.3N \ , Q = 69.9N$$

---

7) اوجد القوة في كل كابل اذا كانت محصلة القوى $210k(KN)$



$$T_1 = 134.5kNN \ , T_2 = 12.25kN \ , T_3 = 58.75kN$$

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

الضرب القياسي (النقطي) إذا كان لدينا أي متجهان $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ فان $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = |A||B|cos\theta$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين $cos\theta = \frac{\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}}{|A||B|}$ إذا وجد $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = 0$ فانهم متعامدان

بينما شرط التوازي $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$

مسقط متجه A على B يمكن حسابه $P_{\frac{A}{B}} = \frac{\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}}{|B|} = |A|cos\theta$

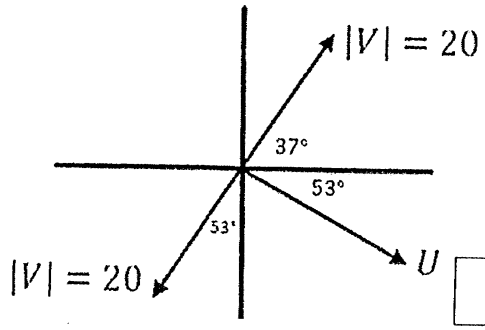
ملاحظة/إذا كان لدينا متجهي ازاحة (كابل اوخط) وفي أحدهم قوة مقدارها $|f|$ ويراد ايجاد مركبة هذه القوة في اتجاه المتجه الاخر فإنها تساوي $F_t = |f|cos\theta$ وتسمى مقدار المركبة المماسية

اما $F_n = |f|sin\theta$ تسمى مقدار المركبة العمودية

مسائل محلولة

مثال/ المتجهان U, V في مستوى (x, y)متعامدان وكان $U = 6i - 8j$ ومقدار $|V| = 20$

اوجد المتجهV.



الحل/

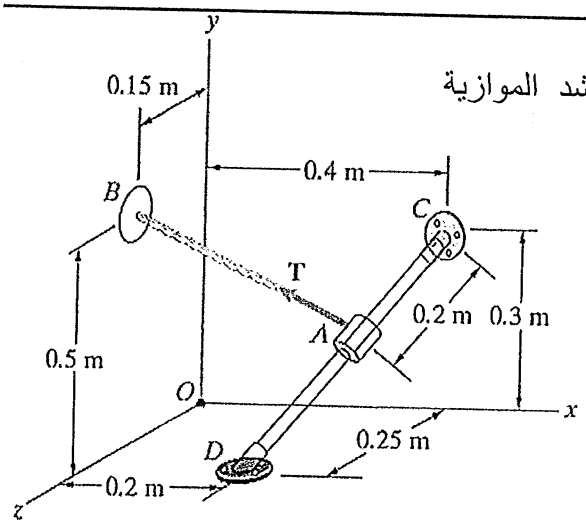
$|U| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-8}{6}\right) = 53°$

$V = 20cos37i + 20sin37j$ $\boxed{V = 16i + 12j}$

$V = -20sin53i - 20cos53j$ $\boxed{V = -16i - 12j}$

مثال/اذا كان الشد في الكابل $T_{AB} = 50N$ اوجد مركبتي الشد الموازية والعمودية للعمود CD



الحل:-

معادلة العمود المائل بدلالة نقاطه

$CD = -0.2i - 0.3j + 0.25k$

$e_{CD} = -\frac{0.2}{0.44}i - \frac{0.3}{0.44}j + \frac{0.25}{0.44}k$ عل نفس العمود

بذلك يمكن إيجاد إحداثيات النقطة A $\frac{(x_2-x_1)}{|A|}i + \frac{(y_2-y_1)}{|A|}j + \frac{(z_2-z_1)}{|A|}$

بذلك $\frac{0.25}{0.44} = \frac{(z_2-0)}{0.2}$, $-\frac{0.3}{0.44} = \frac{(y_2-0.3)}{0.2}$, $-\frac{0.2}{0.44} = \frac{(x_2-0.4)}{0.2}$ $A(0.309,\ 0.164, 0.114)$

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

معادلة الكابل $\overrightarrow{AB} = -0.309i + 0.336j + 0.036k$

الان يمكن إيجاد الزاوية بين المتجهين $cos\theta = \frac{-0.03}{(0.44)(0.458)}$ منها $\theta = 98.6°$

$$F_t = 50cos98.6° = -7.48N$$

$$F_n = 50sin98.6° = 49.4N$$

لإيجاد المعادلة الاتجاهية للمركبة العمودية والمماسية نعوض في المعادلة $\overrightarrow{F_{AB}} = \overrightarrow{F_n} + \overrightarrow{F_t}$

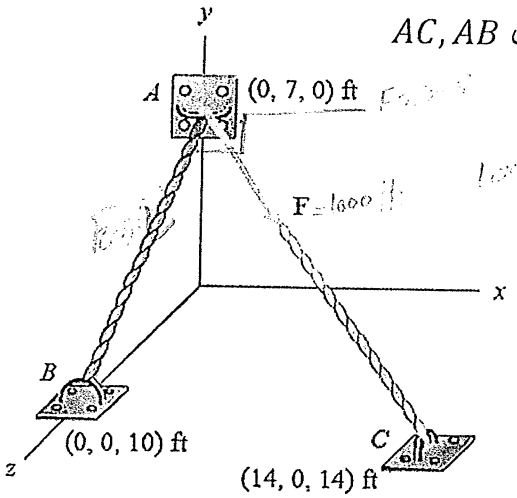
$$\overrightarrow{F_{AB}} = 50e_{AB} = -33.7i + 36.7j + 3.93k$$

$$F_t = 49{,}44e_{CD} = 3.4i + 5.1j - 4.25k$$

عليه $\overrightarrow{F_n} = -37.1i + 31.6 + 8.2k$

مثال/ الشد في الكابل $AC = 1000Ib$ اوجد الزاوية بين الكابل AC, AB

وكذلك مركبة القوة الموازية للكابل AB



الحل:-

$$AC = 14i - 7j + 14k$$

$$AB = 0i - 7j + 10k$$

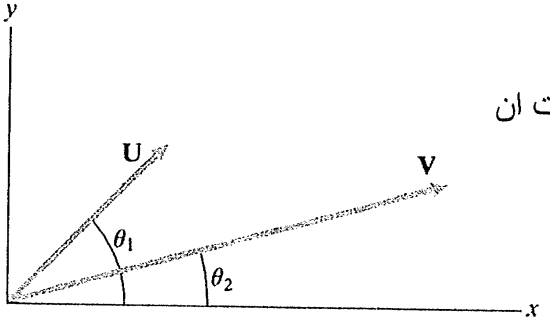
$cos\theta = \frac{189}{(21)(12.21)}$ منها $\theta = 42.5°$

$$F_t = 1000cos42.5° = 737.3IbN$$

$$F_t = 737.3e_{AB} = 0i - 422.7j + 604k$$

تمارين واجب

1) مستخدما الضرب القياسي $U.V$ في الشكل الموضح اثبت ان



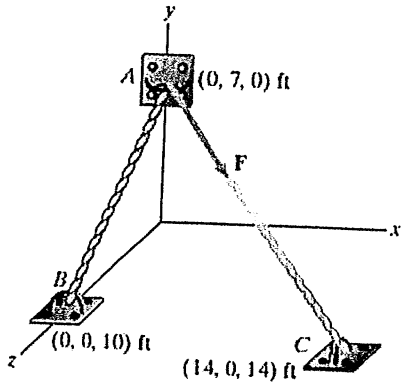
$$cos(\theta_1 - \theta_2) = cos\theta_1 cos\theta_2 + sin\theta_1 sin\theta_2$$

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911327065

$W = -2i + 4j + W_z k$ ، $V = -3i + V_y j + 3k$ ، $(2U = U_x i + 3j + 2k$

المركبات السابقة متعامدة بشكل متبادل اوجد المركبات U_x, V_y, W_z

$U_x = 2{,}857$, $V_y = 0{,}857$, $W_z = 3{,}143$



3) الكوابل تؤثر من A الى Bوكذلك من AالىC.والقوة في الكابل AC هي $F = 1000lb$ اوجد

$a)$ الزاوية بين AB, AC

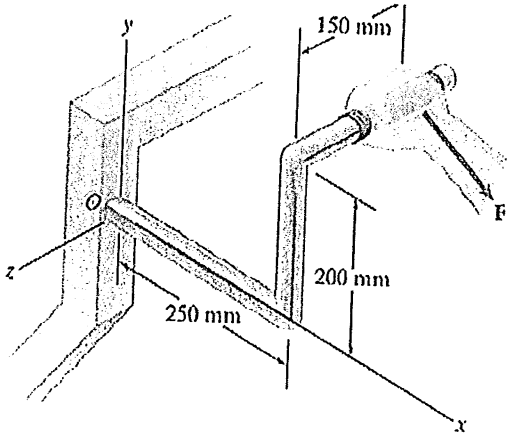
$b)$ متجه مركبات القوة F الموازية AB

$a)42{,}5°, b) - 423j + 604k$

4) المعادلة الاتجاهية لقوة اليد هي $F = 60i - 40j(N)$ اوجد

مركبات القوة الموازية على طول الخط من o الى نقطة تأثير اليد

$$F_t = 14i + 11.2j - 8.4k$$



مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإجمال على الرقم 0911370606

الضرب الاتجاهي إذا كان لدينا أي متجهان $\vec{A}$, $\vec{B}$ فان $\vec{A} \times \vec{B} = |A||B|sin\theta\vec{e}$

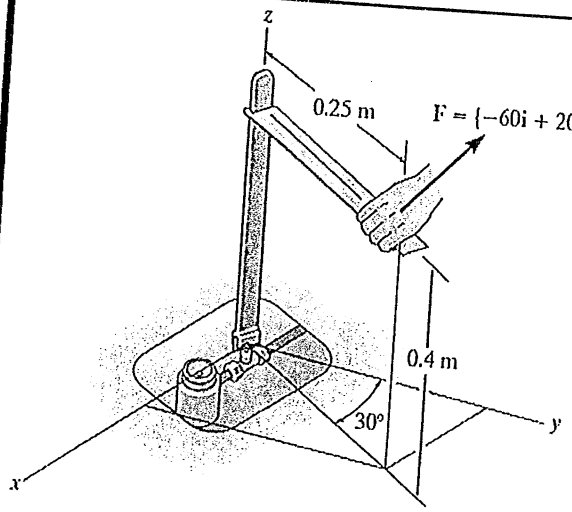
الناتج من الضرب الاتجاهي مجه جديد عمودي على كل من المتجهين الأصليين

مساحة متوازي الاضلاع $= |\vec{A} \times \vec{B}|$

مساحة مثلث $= \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$

* العزم $(M) = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{r} \times \vec{F}|$

مسائل محلولة



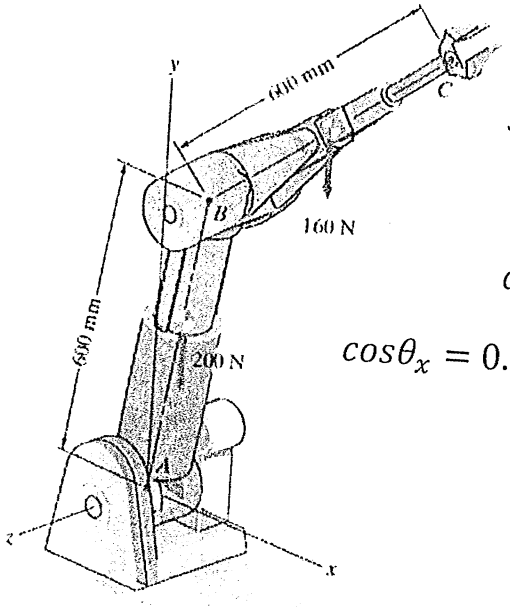
مثال/ اوجد عزم القوة حول محور z

الحل:-

$$\vec{r} = 0.125i + 0.125\sqrt{3}j + 0.4k$$

$$M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.125 & 0.125\sqrt{3} & 0.4 \\ -60 & 20 & 15 \end{vmatrix}$$

$M = (-4.75)i - (25.875)j + (15.5)k$ منها $M_z = 15.5N.m$



مثال/ الثاقب الثابت له اوزان موضحة الشكل في مراكز ثقلها عند منتصف الاطوال AB , BC ولها اتجاهات

AB هي $cos\theta_x = 0.5$, $cos\theta_y = 0.866$, $cos\theta_z = 0$

وBC هي $cos\theta_x = 0.707$, $cos\theta_y = 0.619$, $cos\theta_z = -0.342$

اوجد محصلة عزم الاوزان حول المحاور الرئيسية

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370506

الحل:-

يمكن إيجاد احداثيات نقطة الوزن $200N$ ومنها مباشرة معادلة r_1

$$0.5 = \frac{x-0}{0.3}\ ,\ 0.866 = \frac{y-0}{0.3}\ ,\ 0 = \frac{y-0}{0.3}$$

$$r_1 = 0.15i + 0.2598j + 0k$$

$$\mathrm{M}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.15 & 0.2598 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \end{vmatrix}$$ بذلك $$\mathrm{M}_1 = -30k(N.m)$$

يجب إيجاد احداثيا النقطة B

$$0 = \frac{y-0}{0.6}\ ,\ 0619 = \frac{y-0.5196}{0.6}\ ,\ 0.5 = \frac{x-0}{0.6}$$ منها $$B(0.3\ ,\ 0.5196\ ,0)$$

يمكن إيجاد احداثيات نقطة الوزن $160N$

$$-0.342 = \frac{y-0}{0.3}\ ,\ 0.619 = \frac{y-0.5196}{0.3}\ ,\ 0.707 = \frac{x-0.3}{0.3}$$

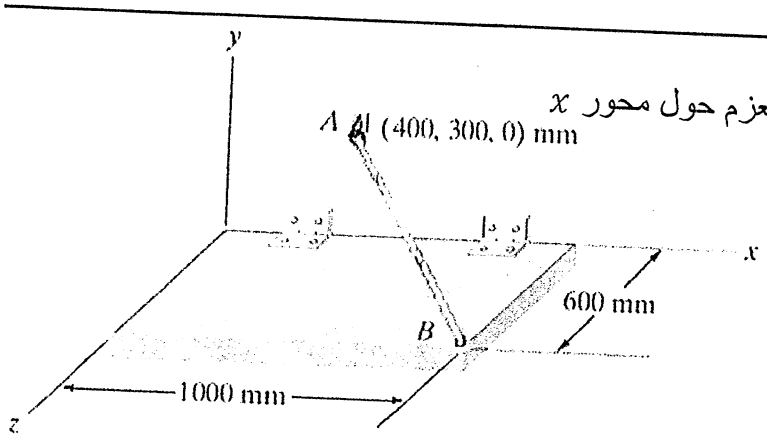
$$r_2 = 0.512i + 0.705j - 0.1026k$$

$$\mathrm{M}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.512 & 0.705 & -0.103 \\ 0 & -160 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{M}_2 = (-16.48)i + 0j - (81.9)k$$

محصلة العزم $$M = (-16.48)i - 0j - 111.9k(N.m)$$

مثال / اذا كان الشد في الكابل $1kN$ اوجد العزم حول محور x



الحل:-

$$BA = -0.6i + 0.3j - 0.6k$$

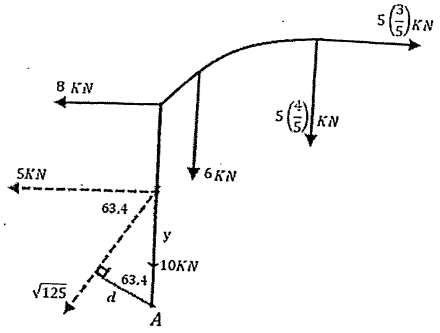
$$M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0.6 \\ -0.67 & 0.33 & -0.67 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{M} = (-0.2)i + 0.27j + (0.33)k\ (KN.m)$$

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370595

من نظرية العزوم لتعيين موقع وخط عمل المحصلة من A (طريقة1) $1 = 5(y) + 10(0)$ اذا $y = 0.2m$

من نظرية العزوم لتعيين موقع وخط عمل المحصلة من A (طريقة2)

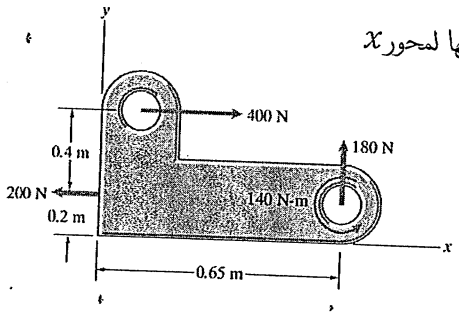


$1 = \sqrt{125}(d)$

$1 = \sqrt{125}(ycos63{,}4)$

$y = 0.2\text{m}$

مثال/تؤثر ثلاثة قوى وعزم الازدواج في الإطار الموضح اوجد المحصلة ونقطة تقاطعها لمحور x



الحل:

$$f_x = 400 - 200 = 200N$$

$$f_y = 180N$$

$$R = \sqrt{200^2 + 180^2} = 269.1N$$

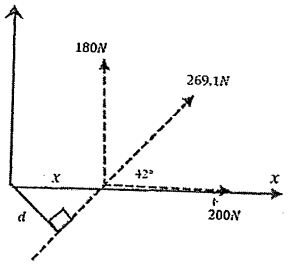
$$\theta = \tan^{-1}\frac{180}{200} = 42°$$

$$\sum M_o = 180(0.65) + 200(0.2) - 400(0.6) + 140 = 57N.m \circlearrowleft$$

من نظرية العزوم لتعيين موقع وخط عمل المحصلة من A (طريقة1) $57 = 180x$

$x = 0.317m$

من نظرية العزوم لتعيين موقع وخط عمل المحصلة من A (طريقة2)



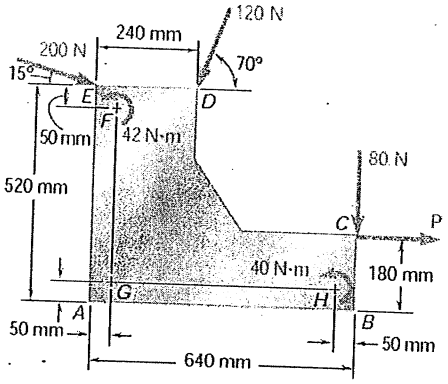
$57 = 269.1(d)$

$57 = 269.1(xsin42)$

$x = 0.317\text{m}$

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

مثال/من اجل $P = 60N$ اوجد محصلة القوى وعزمي الازدواج ونقطة تقاطع المحصلة مع GH, GF



الحل:

$$f_x = 60 + 200cos15 - 120cos70 = 212,14N$$

$$f_y = -80 - 200sin15 - 120sin70 = -244,53N$$

$$R = \sqrt{212,14^2 + 244,53^2} = 323.73N \quad \text{والاتجاه هو } \theta = \tan^{-1}\frac{244,53}{212,14} = 49°$$

$$\sum M_G = 200sin15(0.05) - 200cos15(0.47) + 120cos70(0.47) - 120sin70(0.19) - 80(0.59) - 60(0.13) + 40 + 42 = 63.43N.m \circlearrowleft$$

من نظرية العزوم لتعيين موقع وخط عمل المحصلة على GH من G(طريقة1)

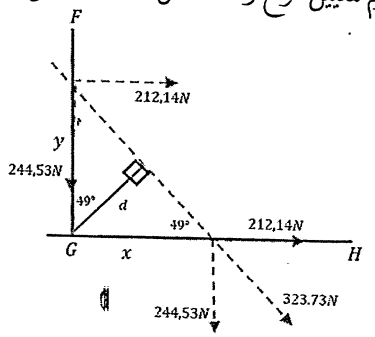
$$-63.43 = -244,53x$$

$$x = 0.259m$$

من نظرية العزوم لتعيين موقع وخط عمل المحصلة على GF من G(طريقة1)

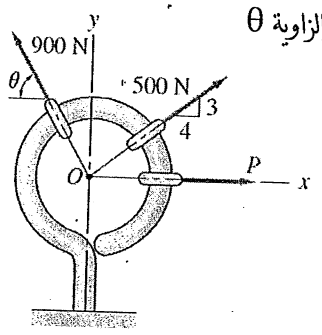
$$-63.43 = -212,14y$$

$$y = 0.299m$$



اتجاه ↓

مثال/محصلة القوى الثلاث المؤثرة في مسمار ذي العروة هي $R = 800j$ اوجد القوة P والزاوية θ



الحل:

بما ان المحصلة تعمل في محور y الموجب فقط فان $R = f_y \, , f_x = 0$

$$800 = 500\left(\frac{3}{5}\right) + 900sin\theta \Rightarrow \theta = 33.75°$$

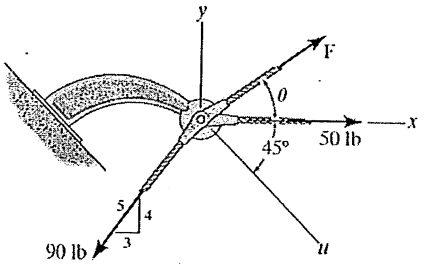
$$-500\left(\frac{4}{5}\right) + 900cos33.75 = P \Rightarrow P = 348.3N$$

للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

مرجع الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

مثال/ اذا كانت محصلة القوى تساوي $80Ib$ وفي اتجاه محور u اوجد

مقدار القوة F والزاوية θ



الحل:-

$$80cos45 = 50 - 90\left(\frac{3}{5}\right) + Fcos\theta$$

$$Fcos\theta = 60.6Ib$$

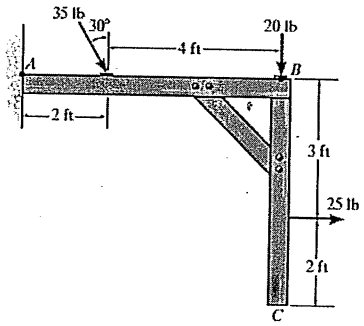
محور y السالب

$$-80sin45 = -90\left(\frac{4}{5}\right) + Fsin\theta$$

$Fsin\theta = 15.4\text{Ib}$ منها $tan\theta = \frac{15.4}{60.6}$ بذلك $\theta = 14.3°$ ، $F = 62.5Ib$

مثال/ استبدل القوى الاتية بقوة مكافئة وحدد موقعها على AB من A وكذلك

على BC من B



الحل/

$$R_x = 25 + 35sin30 = 42,5Ib$$

$$R_y = -20 - 35cos30 = -50,3Ib$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{50,3}{42,5} = 49.8° \quad , \quad R = \sqrt{42,5^2 + 50,3^2} = 65,86Ib$$

$$\sum M_B = 25(3) + 35cos30(4) = 196.24Ib.ft$$

$$196,24 = 50.3(x)$$

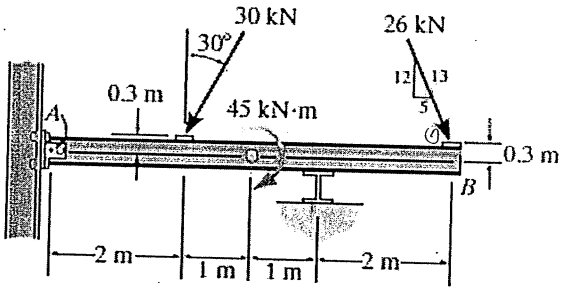
$x = 3.9ft$ عليه بعدها من A هو $6 - x = 2.1ft$

$$196,24 = 42.5(y)$$

$$y = 4.6ft$$

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911372606

مثال: استبدل القوى الاتية عزم الازدواج بقوة مكافئة وعزم ازدواج وحدد موقعها من A



الحل

$$R_x = 26\left(\frac{5}{13}\right) - 30sin30 = -5kN$$

$$R_y = -26\left(\frac{12}{13}\right) - 30cos30 = -50kN$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{50}{5} = 84.3° \quad , \quad R = \sqrt{5^2 + 50^2} = 50.25kN$$

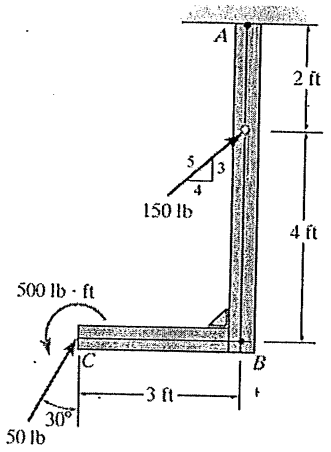
$$\sum M_A = -26\left(\frac{5}{13}\right)(0,3) - 26\left(\frac{12}{13}\right)(6) + 30sin30(0,3) - 30cos30(2) - 45 =$$

$$-239.5kN.m$$

$$-239.5 = -50(x)$$

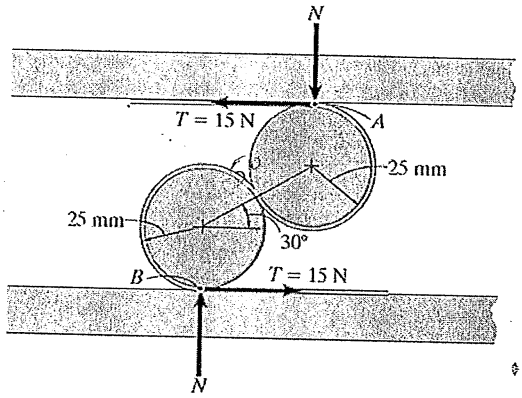
$$x = 4,79m$$

تمارين مراجعة



استبدل القوى الاتية وعزم الازدواج بقوة مكافئة وحدد موقعها على BC من B

الحل($\theta = 42.6°$ ، $d = 0.824ft$ ، $F_R = 197lb$)



في الشكل الموضح جهاز يستخدم للتدوير العجلات

عند سحب السير بقوة $T = 15$ ما هو رد الفعل N

عند القاعدة والقمة لكي يكون العزم على العجلات صفر

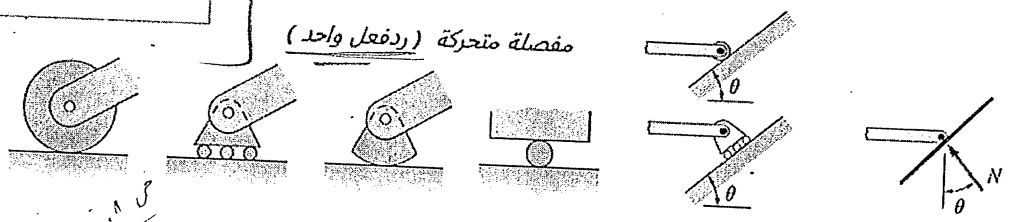
الحل($N = 26N$)

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M = 0$$

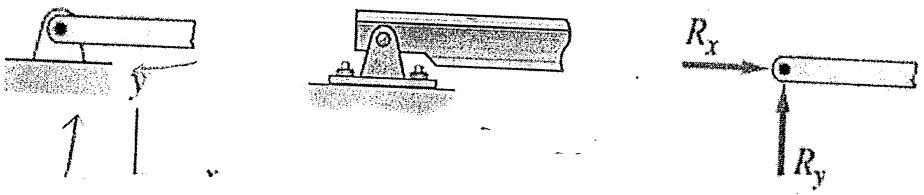
الاتزان وردود الأفعال

رد الفعل دائماً عمودي على نقطة التلامس بين الجسمين

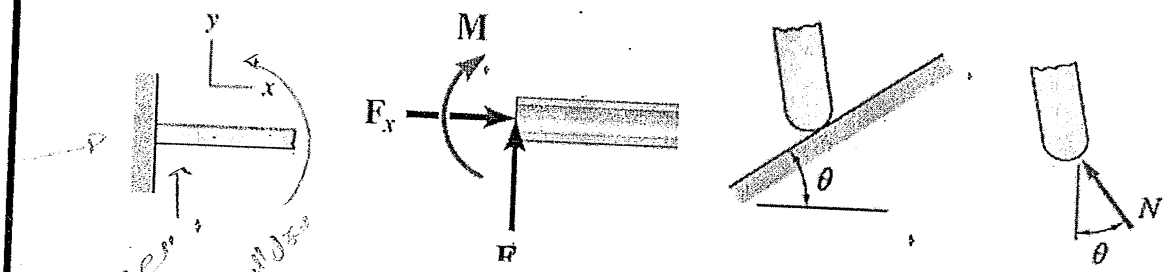
مفصلة متحركة (ردفعل واحد)

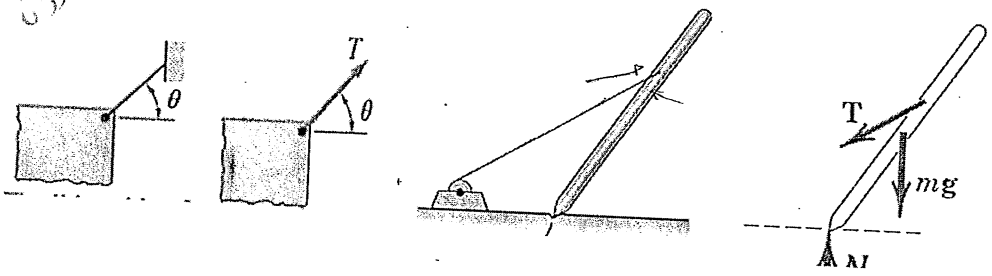


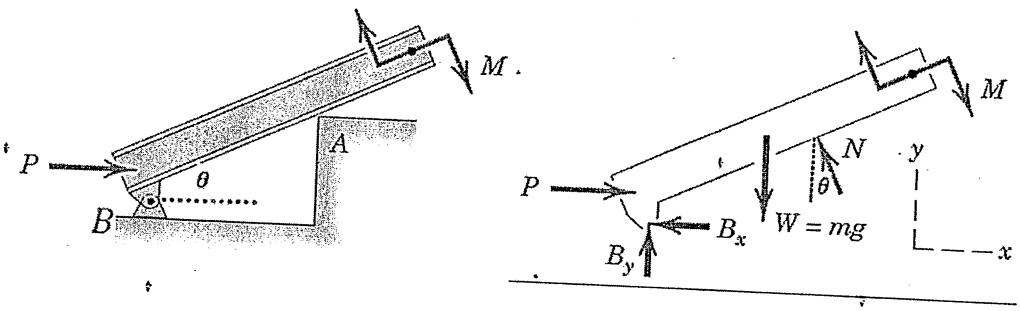
مفصلة ثابتة (ردان للفعل)



دعامة ثابتة (ثلاث ردود افعال)

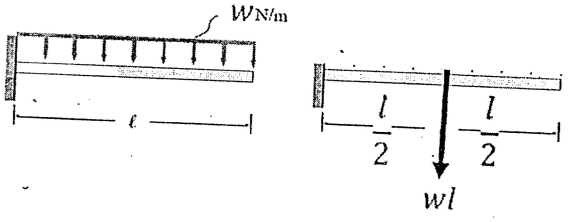


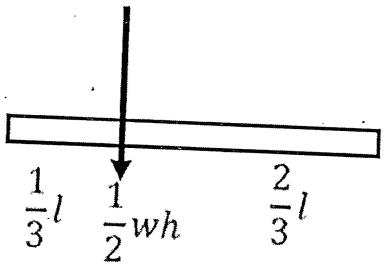


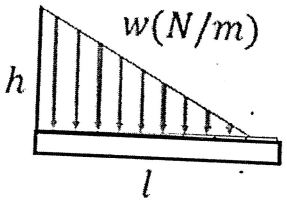


مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

الاحمال الموزعة

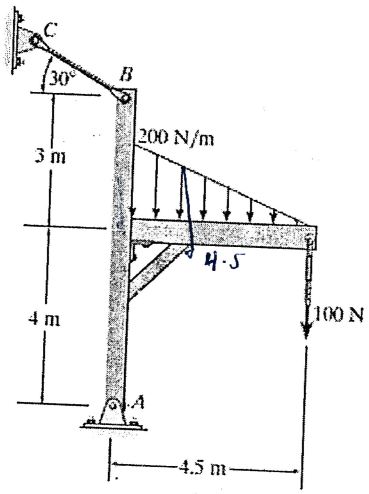






مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

مثال / اوجد رد الفعل عند Aوالشد في الكابل BC



الحل

$\sum F_x = 0$ بذلك $A_x - Tcos30 = 0$

$\sum F_y = 0$ بذلك $A_y + Tsin30 - 100 - 450 = 0$

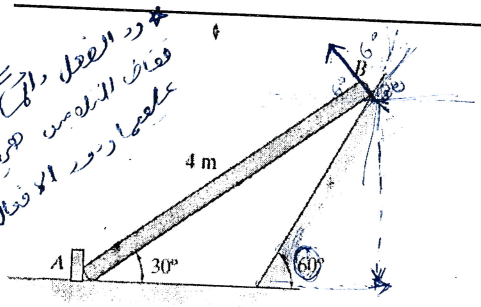
$\sum M_A = 0$

$-100(4{,}5) - 450\left(\frac{4{,}5}{3}\right) + Tcos30(7) = 0$

$A_x = 161N \rightarrow$ | $A_y = 457N \uparrow$ | $T = 185{,}58N$

مثال / اوجد ردود الأفعال عتد الاسطح الناعمة في نقاط التلامس

علما بان كتلة العمود $20kg$

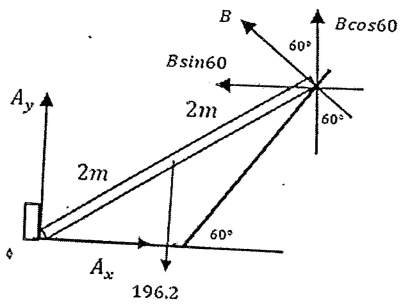


الحل

$\sum M_A = 0$

$Bcos60[4cos30] + Bsin60[4sin30] - 196.2[2cos30] = 0$

$B = 98{,}1N$



$\sum F_x = 0$ اذا $A_x - 98.1sin60 = 0$ إذا $A_x = 84{,}96N$

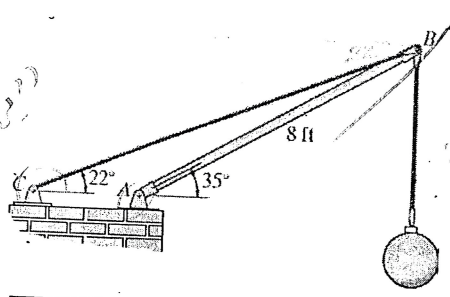
$\sum F_y = 0$

$A_y + 98.1cos60 - 196.2 = 0$ أذا $A_y = 147{,}15N$

تمارين واجب

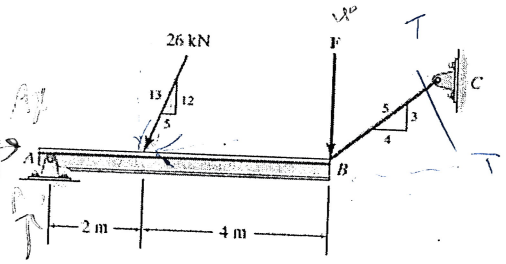
1) اوجد مقدار رد الفعل عند A والشد في الكابل BC وزن الحمولة $500Ib$

الحل ($BC = 1820{,}7Ib$ $A_x = 1688Ib$ ، $A_y = 1182IB$

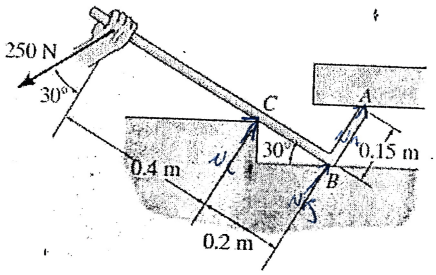


مثال/ اوجد ردود الأفعال عند الركيزة Aوالشد في الحبل BC علما بان $F = 40KN$

الحل($F_{BC} = 80\text{ kN}, A_x = 54\text{ kN}, A_y = 16\text{ kN}$)



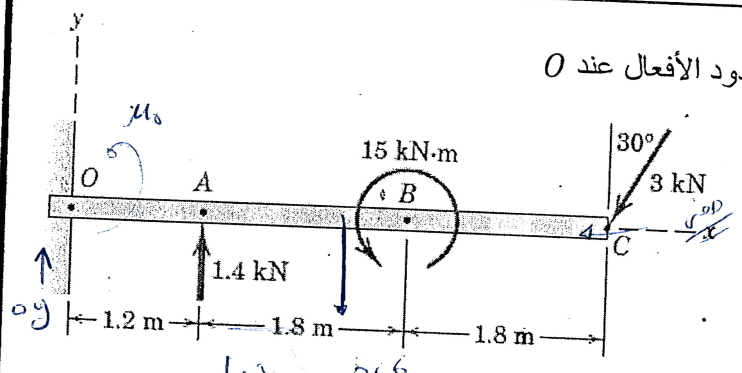
اوجد رد ألفعل عند السطوح الناعمة عند نقاط الإتصال (A,B,C)



$N_B = 327\text{ N}$ $N_C = 433.0\text{ N} = 433\text{ N}$

$N_A = 577.4\text{ N} = 577\text{ N}$

مثال العمود المنتظم وزنه $500kg$ اوجد ردود الأفعال عند O



$O_x = 1500\text{ N}, O_y = 6100\text{ N}$

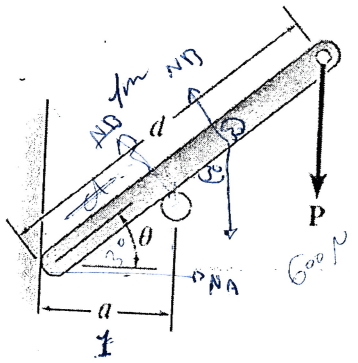
$M_O = 7560\text{ N}\cdot\text{m CCW}$

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

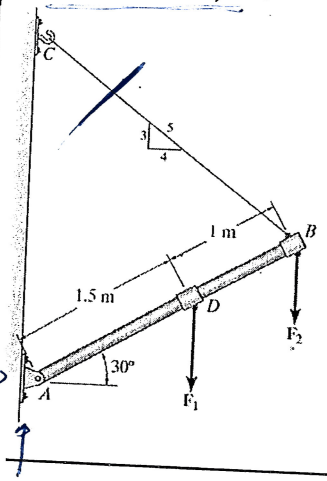
مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإجمال على الرقم 0911370606

تمارين عامة

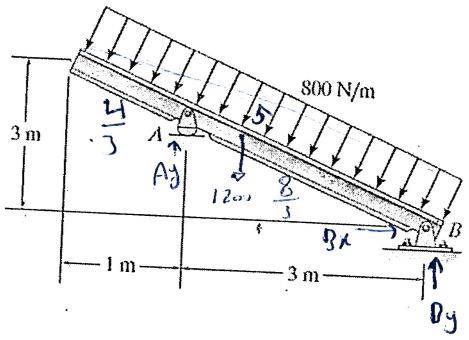
مثال/ في الشكل الموضح اوجد ردود الأفعال والمسافة a من اجل $p = 600N$، $\theta = 30°$، $d = 1m$ والاسطح ناعمة $\{692.82N\ ،\ 346.4N\ ،\ 0.65m\}$



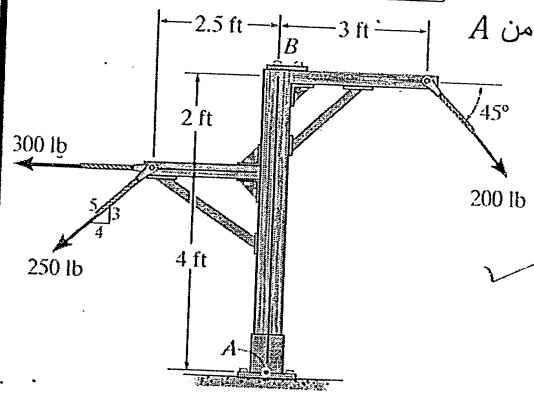
مثال/ العمود محمل بحملين راسيين F_1، F_2 اذا كان الكابل BC به اقصى شد قبل الوقوع $1500N$ اوجد الاحمال F_1، F_2 كذلك اقصى مقدار لرد الفعل عند A اذا كان $F_1 = 2F_2$ $\{F2 = 724\ \text{N}, F1 = 1448\text{N}, FA = 1748.71\text{N}\}$



مثال/ اوجد ردود الافعال $\{Ay = 3333\ \text{N}, By = 133\text{N}, Bx = 2400\text{N}\}$



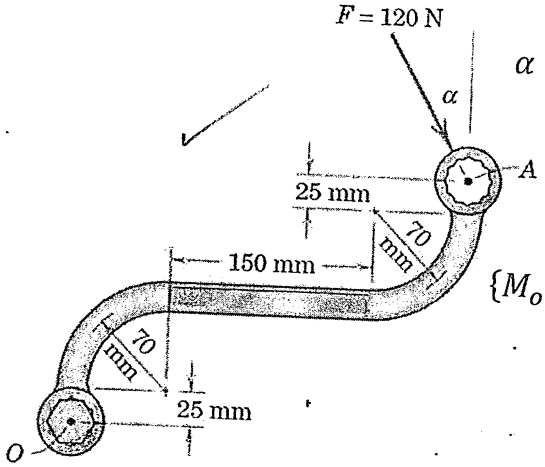
مثال/ استبدل القوى الاتية بقوة مكافئة وحدد موقعها على AB من A



$\{y = 3.07\ \text{N}, \theta = 39.1°, R = 462\text{IbN}\}$

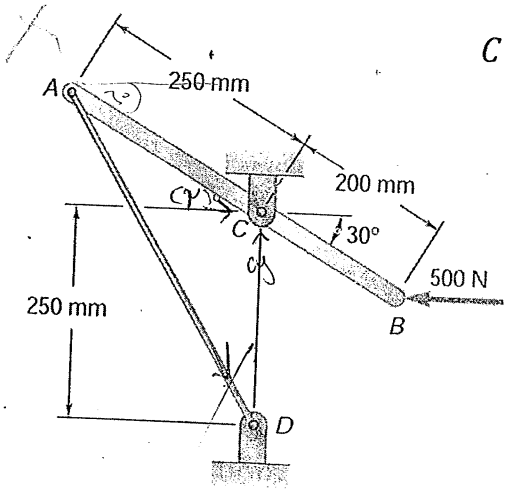
مثال/ اوجد عزم القوة $120N$ حول O من اجل $\alpha = 30°$

ثم اوجد α التي تعطي اكبر عزم عند O ومقدار ذلك العزم



$\{M_o = 41.5\text{N.m}, \alpha = 33.6°, M_{max} = 41.6\ \}$

مثال/ اوجد الشد في الكابل AD ومحصلة رد الفعل عند C

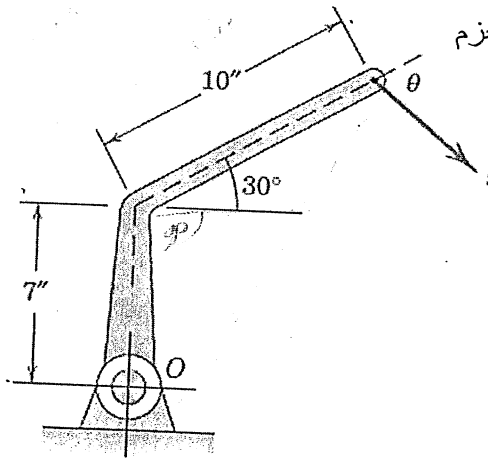


$(T = 400N, R = 458N)$

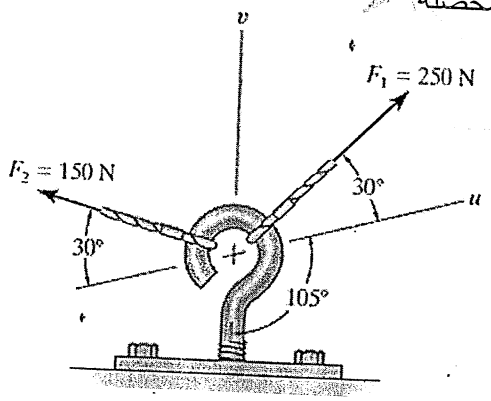
مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإرسال على الرقم 0911370606

مثال/ اوجد θ التي تعطي اكبر عزم عند o واوجد مقدار ذلك العزم

$\theta = 65.8°, M_o = 740 lb.in)$

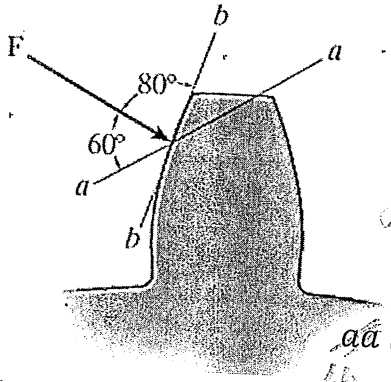


مثال/ اوجد مركبات القوة F_1, F_2 على محوري u, v ثم اوجد المحصلة



مثال/ اذا كانت $F = 20lb$ اوجد مركباتها على aa, bb

$(30.6lb, 26.9lb)$



مثال اذا كانت مركبة القوة Fعلى aa هي $30lb$توجد F والقوة على bb

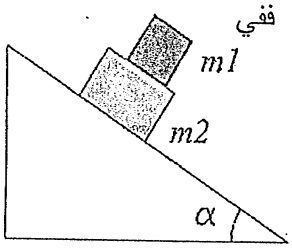
مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

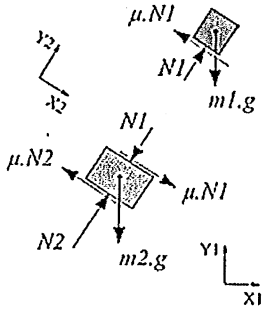
1. الاحتكاك

دائما قوة الاحتكاك عكس اتجاه محاولة الحركة للجسم .

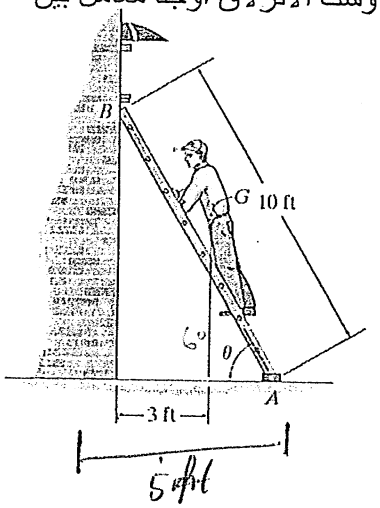
القيمة القصوى للاحتكاك $f_s = \mu_s N$ لا يصل اليها الجسم الا اذا كان على وشك الحركة

ومن المهم جدا معرفة كيفية وضع اتجاه قوة الاحتكاك بعد معرفة اتجاه حركة الجسم ففي الشكل الوضح بفرض ان m_1 تنزلق فوق m_2





امثال/ الرجل وزنه $180Ib$ يصعد السلم . توقف عندما شعر ان السلم على وشك الانزلاق اوجد معامل بين السلم والارضية من اجل $\theta = 60°$ والحائط املس والسلم مهمل الوزن .



الحل:-

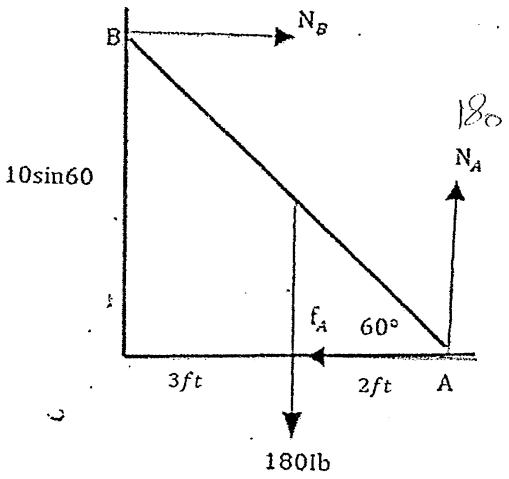
$$F_y = 0$$

$$F_A = 180Ib$$

$$M_B = 0$$

$$180(5) - 180(3) - \mu(180)10sin60 = 0$$

$$\mu = 0.231$$



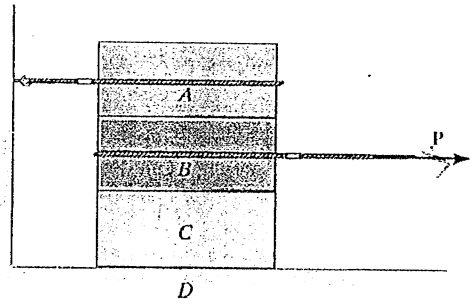
مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإحصال على الرقم 0911370506

مثال/ الكتل $A = 50Ib, B = 25Ib, c = 15Ib$ اوجد اقل قوة افقية P تسبب الحركة

اذا علمت ان معامل الاحتكاك

بين A, B هو 0.3 وبين C, B هو 0.4 وبين C والأرض 0.35

الحل:-

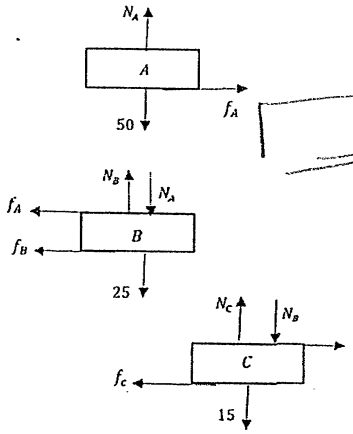


قوة احتكاك c مع الأرض $f_A = 0.35(90) = 31{,}5Ib$

قوة احتكاك B مع c $f_B = 0.4(75) = 30Ib$

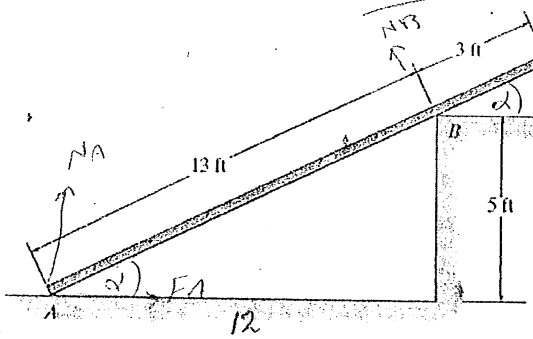
اذا سوف تتحرك B فقط بدون c

$$P - 0{,}4(75) - 0.3(50) = 45N$$



مثال/ العمود وزنه $100Ib$ اوجد معامل الاحتكاك عند A, B لمنع الانزلاق بفرض انهم متساويان

الحل:-



$$M_A = 0$$

$$100\left(8 \times \frac{12}{13}\right) = N_B(13) \quad \text{منها} \quad N_B = 56.8Ib$$

$$N_A + 56.8\left(\frac{12}{13}\right) + \mu\left\{56.8\left(\frac{5}{13}\right)\right\} - 100 = 0$$

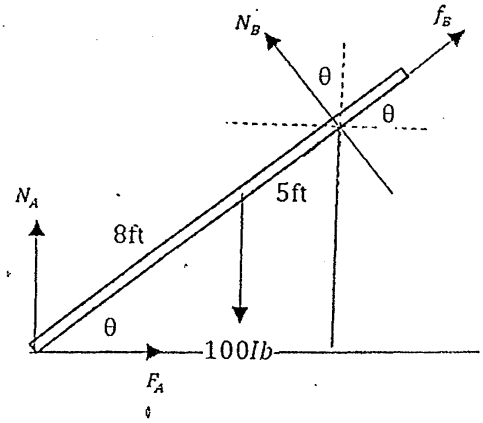
$$F_y = 0 \qquad N_A = 47.57 - 21.85\mu$$

$$F_x = 0$$

$$\mu N_A \mu + \mu\left\{56.8\left(\frac{12}{13}\right)\right\} - 56.8\left(\frac{5}{13}\right) = 0$$

$$\mu\{47.57 - 21.85\mu\} + \mu\left\{56.8\left(\frac{12}{13}\right)\right\} - 56.8\left(\frac{5}{13}\right) - = 0$$

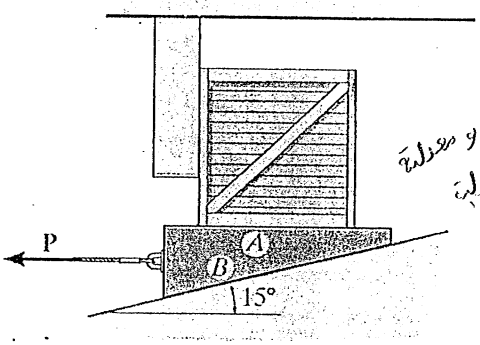
$$21.85\mu^2 - 100\mu + 21.85 = 0 \quad \text{منها} \quad \mu = 0.23$$



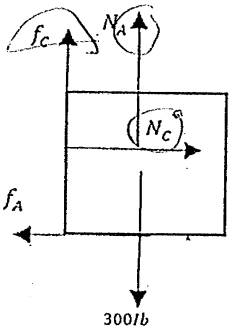
مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإجمالي على الرقم 0911370606

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

مثال/ الصندوق وزنه $300Ib$ اوجد اقل قوة P لإخراج الخابور علماً بان معامل الاحتكاك عند جميع نقاط التلامس 0.3 (مهملا وزن الخابور)



الحل: -



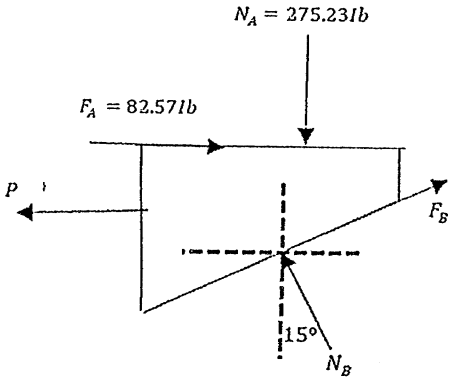
$$F_x = 0$$

$$0.3N_A = N_c$$

$$F_y = 0$$

$$N_A + 0.3N_c = 300$$

$N_A = 275.23Ib$ ، $N_c = 82.57Ib$ بذلك $F_A = 82.57Ib$



$$F_y = 0$$

$$N_B cos15 + 0.3N_B sin15 = 275.23$$

$$N_B = 263.74Ib$$

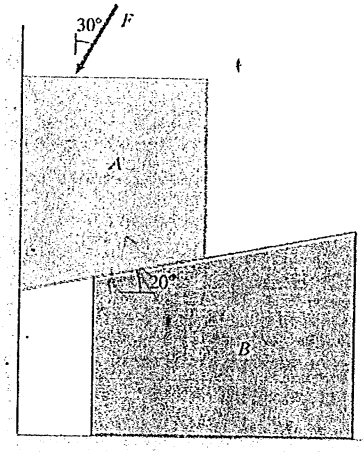
$$F_x = 0$$

$$P = 82.57 + 0.3(263.74)cos15 - 263.74sin15$$

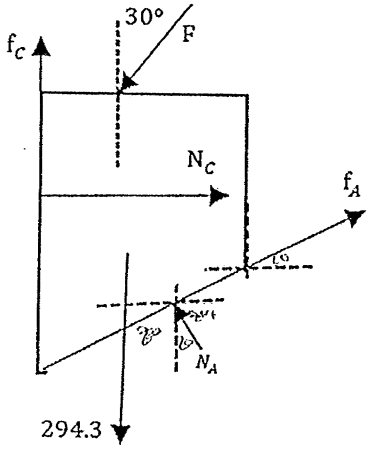
$$P = 90.74Ib$$

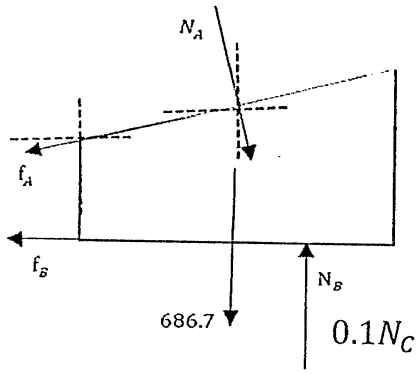
مثال/ في الشكل $m_A = 30kg\ , m_B = 70kg$ معامل الاحتكاك بين جميع نقاط التلامس $\mu_s = 0.1$

ما هي اقصى قوة F يمكن الدفع بها دون ان تسبب انزلاق الكتل



الحل :-





$$F_x = 0$$

$$0.1N_A cos20 - N_A sin20 + N_C - Fsin30 = 0$$

$$N_C = 0.248N_A + Fsin30$$

$$F_y = 0$$

$$0.1N_C + N_A cos20 + 0.1N_A\, sin20 - 294.3 - Fcos30 = 0$$

$$0.1N_C + 0.974N_A - 294.3 - Fcos30 = 0$$

$$0.1\{Fsin30 + 0.248N_A\} + 0.974N_A - 294.3 - Fcos30 = 0$$

$$\boxed{0.816F - 0.998N_A = -294.3}$$

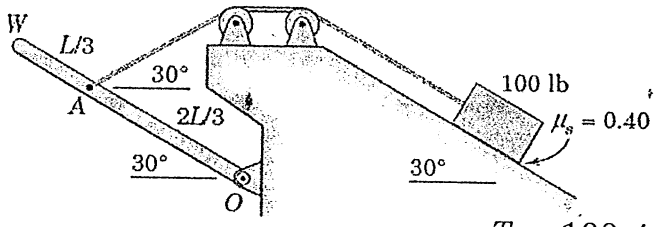
$$F_x = 0$$

$$-0.1N_A cos20 + N_A sin20 - 0.1N_B = 0 \qquad \boxed{0.248N_A - 0.1N_B = 0}$$

$$F_y = 0$$

$$-0.1N_A sin20 - N_A cos20 + N_B = 686.7 \qquad \boxed{-0{,}974N_A + N_B = 686.7}$$

$$N_B 1130.8N \text{ ، } N_A = 456N \text{ ، } F = 197N$$



مثال/ اوجد القيم المحتملة للوزن w للاتزان

الحل:-

وشك هبوط w صعود $100W$

$$T = 100sin30 + 0.4(100cos30) = 84.64Ib$$

$$M_A = 0$$

$$w\left(\left(\frac{L}{2}cos30\right) - Tsin60\left(\frac{2L}{3}\right) = 0\right. \quad \text{بذلك} \quad w\left(\left(\frac{1}{2}\right) = 84.64\left(\frac{2}{3}\right)\right. \quad \text{منها} \quad w = 112.9\text{Ib}$$

وشك صعود w هبوط $100W$

$$T = 100sin30 - 0.4(100cos30) = 15.36Ib$$

$$M_A = 0$$

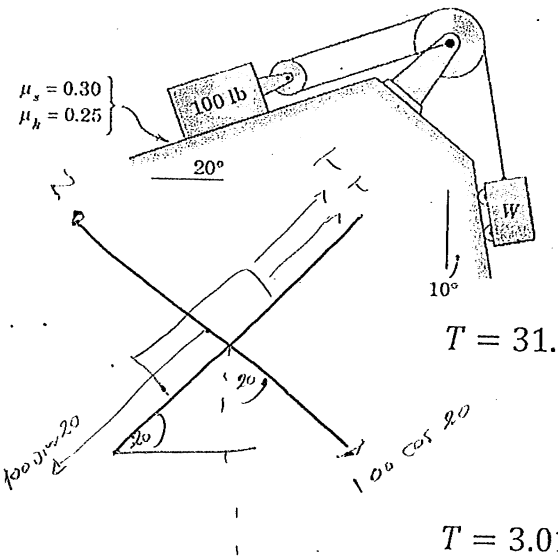
$$w\left(\left(\frac{L}{2}cos30\right) - Tsin60\left(\frac{2L}{3}\right) = 0\right. \quad \text{بذلك} \quad w\left(\left(\frac{1}{2}\right) = 15.36\left(\frac{2}{3}\right)\right. \quad \text{منها} \quad w = 20.5\text{Ib}$$

$$20.5\text{Ib} \le w \le 112.9$$

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الاتصال على الرقم 0911370606

مثال/ اوجد القيم المحتملة للوزن w للاتزان



الحل:-

وشك هبوط w صعود $100W$

$2T = 100sin20 + 0.3(100cos20)$ اذا $T = 31.2Ib$

$wcos10 = 31.2$ اذا $w = 31.7Ib$

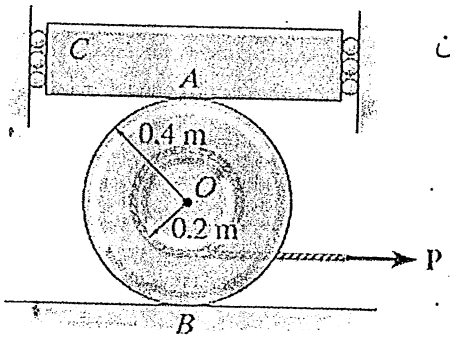
وشك صعود w هبوط $100W$

$2T = 100sin20 - 0.3(100cos20)$ اذا $T = 3.01Ib$

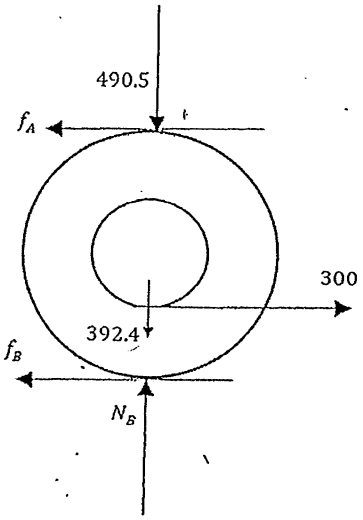
$wcos10 = 3.01$ اذا $w = 3.1Ib$

$3.05\text{lb} \leq w \leq 31.7$ عليه

مثال/ الكتلة C لها كتلة $50kg$ محصورة بين جدارين ناعيمين موضوعة فوق عجلة كتلتها $40kg$ اوجد معاملات الاحتكاك عند A ، B علما بان العجلة تبدأ في الانزلاق عندما تصل القوة المسلطة $p = 300N$



الحل:-



$M_B = 0$

$\mu_A(490.5)(0,8) = 300(0.2)$

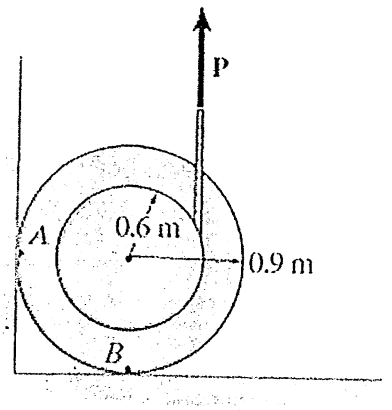
$\mu_A = 0.153$

$M_A = 0$

$\mu_B(490.5 + 392.4)(0,8) = 300(0.6)$

$\mu_B = 0.255$

مثال/ معامل الاحتكاك عند نقاط التلامس 0.3 اوجد اكبر قوة يمكن تسليطها على الأسطوانة $100kg$ دون تن تسبب الحركة



الحل :-

$$F_x = 0$$

$$0.3N_B - N_A = 0$$

$$F_y = 0$$

$$0.3N_A + P + N_B = 981$$

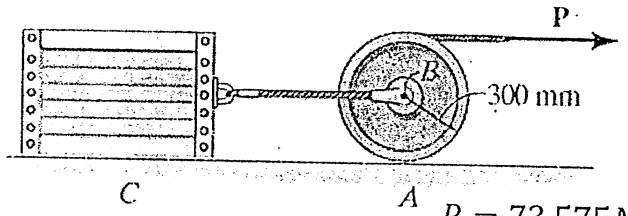
$$M_o = 0$$

$$-0.3N_A(0.9) + P(0.6) - 0.3N_B(0.9) = 0$$

بذلك $N_B = 585.67N$ ، $N_A = 175.7N$

$P = 342.6N$ ،

مثال/ اوجد اقل قوة P تسبب الحركة . الصندوق له كتلة $50kg$ والعجلة $25kg$ ومعامل الاحتكاك بين الصندوق والارضية $\mu = 0.5$ وبين العجلة والارضية $\mu' = 0.3$



الحل:-

$$M_o = 0$$

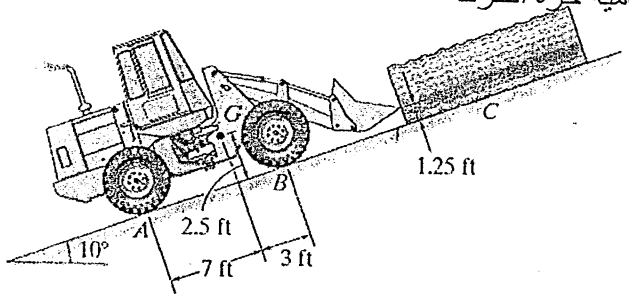
$$0.3(245.25)\ 300 - p(300) = 0$$ منها $P = 73.575N$

$$F_x = 0$$

$$73.575 + 0.3(245.25) = T$$ بذلك $T = 147.15N$

نلاحظ ان الصندوق لن ينزلق $147.15 < 0.5(50 \times 9.81)$ أي $147.15 < 245,25$

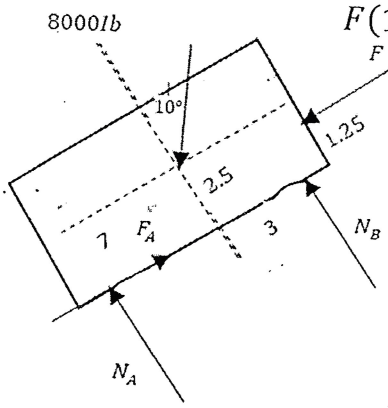
مثال/ الجرار يزن $8000lb$ مركز ثقله عند G اوجد اقصى كتلة C يمكن دفعها . معامل الاحتكاك بين عجلات الجرار الخلفية والسطح 0.7 والعجلات الامامية حرة الحركة والحمولة C والسطح 0.5



مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الإتصال على الرقم 0911370606

الحل:-



$$M_A = 0$$

$$F(1.25) + 8000cos10(3) + 8000sin10(2.5) - 10N_A = 0$$

$$F(1.25) - 10N_A = -27108$$

$$F_x = 0$$

$$0.7N_A - F = 8000sin10$$

بحل المعادلتين $F = 557.12Ib$

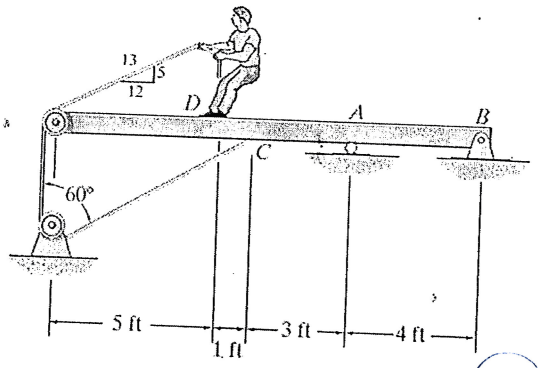
الان بدراسة الحمولة فقط

$$557.12 = wsin10 + 0.5(wcos10)$$ منها $W = 836Ib$

مثال/ الولد يزن $80Ib$ والعمود يزن $100Ib$ ومعامل الاحتكاك بين حذاء الولد والعمود 0.4

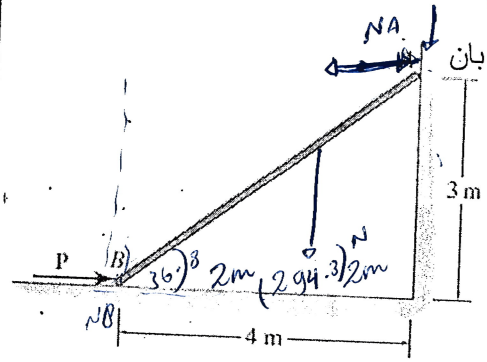
اوجد رد الفعل عند A, B

$A_y = 474Ib\,, B_x = 36Ib\,,\quad B_y = 232Ib$



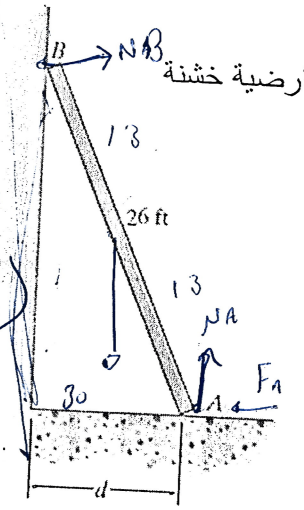
ما هي اقل قوة P لمنع العمود الي كتلته $30kg$ من الانزلاق علما بان

الأرضية ملساء عند B ومعامل احتكاك الحائط 0.2 عند A



$P = 154.89N$

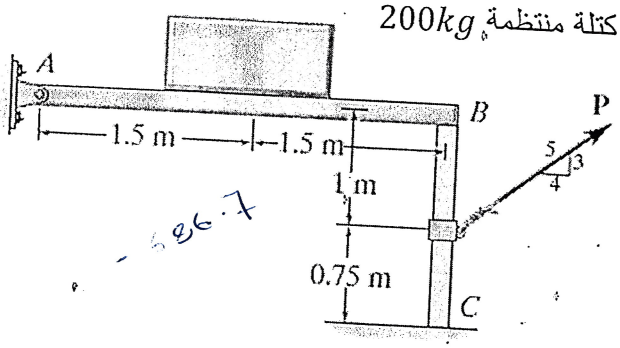
مثال / في الشكل الموضح العمود المنتظم له كتلة $30lb$ يستند على حائط املس وارضية خشنة لها معامل احتكاك 0.3 ماهي اقصى مسافة d بحيث لا ينزلق



$$d = 13.4ft$$

مثال / العارضة AB مهملة الكتلة والسُمك ويحمل كتلة منتظمة $200kg$ وترتكز على عمود له كتلة $20kg$ ومهمل السُمك اوجد اقل قوة P يمكن ان تسحب العمود

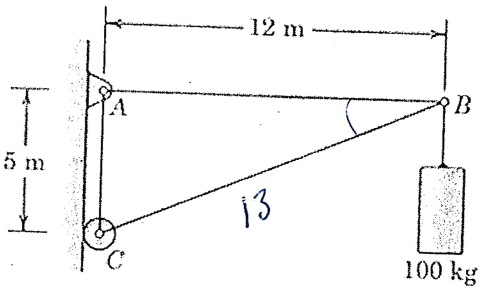
$\mu_C = 0.2$ ، $\mu_B = 0.4$



$$P = 408N$$

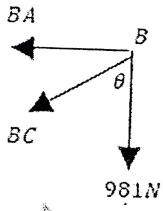
مركز الدليل العلمي
للتسجيل الاتصال على الرقم 0911370606

مثال/ اوجد القوة في كل ضلع للهيكل المفصلي.



الحل: -

العقدة B

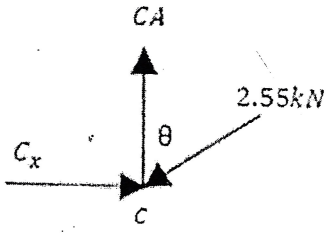


$$\sum F_y = 0$$

$$Bc = 2.55kN(c) \Leftarrow Bc\left[\frac{5}{13}\right] = -981$$

$$BA = 2.55\left[\frac{12}{13}\right] = 2.35kN(T) \Leftarrow \sum F_x = 0$$

العقدة C

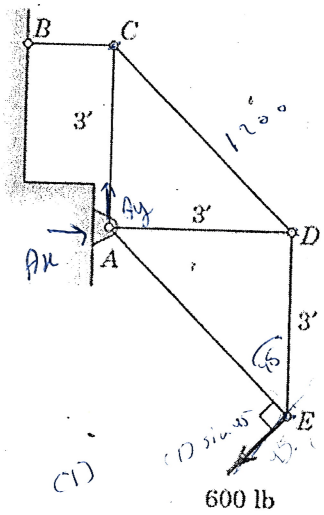


$$CA = 2.55\left[\frac{5}{13}\right] = 0.981kN(T) \Leftarrow \sum F_y = 0$$

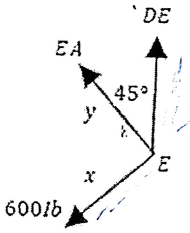
$$C_x = 2.55\left[\frac{12}{13}\right] = 2.35kN \rightarrow \Leftarrow \sum F_x = 0$$

مثال/ اوجد القوة في الاضلاع DE, AD, AC.

الحل: -



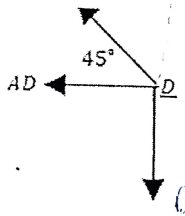
العقدة E



$$DE[sin45] = 600 \Leftarrow \sum F_x = 0$$

$$DE = 600\sqrt{2}Ib(T)$$

العقدة D



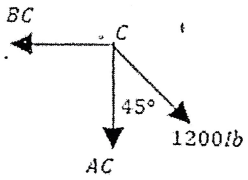
$$DC[sin45] - 600\sqrt{2} = 0 \Leftarrow \sum F_y = 0$$

$$DC = 1200Ib(T)$$

$$-AD - 1200[cos45] = 0 \Leftarrow \sum F_x = 0$$

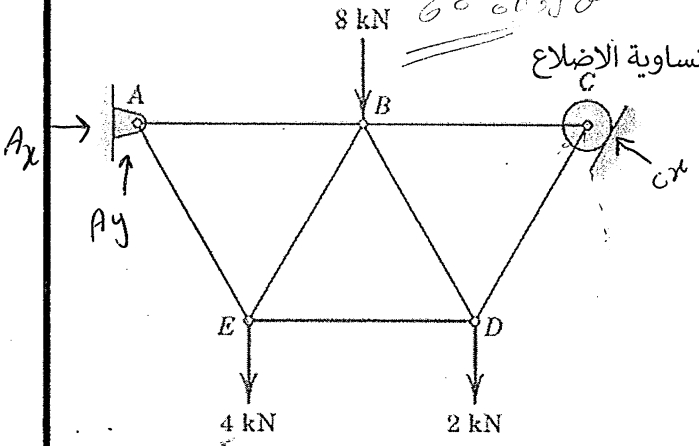
$$AD = 600\sqrt{2}Ib(C)$$

العقدة C



$$AC = 1200cos45 = 600\sqrt{2}Ib(C) \Leftarrow \sum F_y = 0$$

مثال/ اوجد القوة في كل ضلع علماً بان المثلثات متساوية الاضلاع



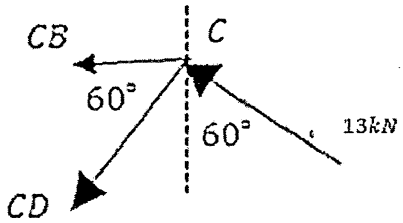
الحل:-

$\sum M_A = 0$ (قبل القص)

$$C(cos60)[2L] = 8[L] + 2\left[\frac{3L}{2}\right] + 4\left[\frac{L}{2}\right]$$

$$C = 13kN \nwarrow$$

العقدة C



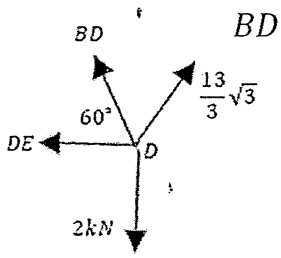
$$\sum F_y = 0 \Leftarrow 13cos60 - CDsin60 = 0$$

$$CD = \frac{13}{3}\sqrt{3}kN(T)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$CB = -13sin60 - \frac{13}{3}\sqrt{3}cos60 = \frac{26\sqrt{3}}{3}kN(C)$$

العقدة D

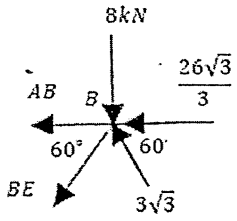


$$\sum F_y = 0 \Leftarrow BDsin60 = 2 - \frac{13}{3}\sqrt{3}SIN60$$ بذلك $BD = 3\sqrt{3}kN(C)$

$$\sum F_x = 0$$

$$DE = \frac{11}{3}\sqrt{3}kN(T) \Leftarrow -DE + 3\sqrt{3}cos60 + \frac{13}{3}\sqrt{3}cos60 = 0$$

العقدة B



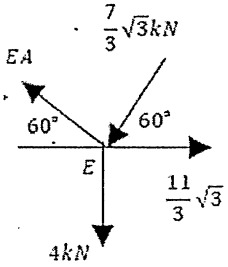
$$\sum F_y = 0$$

$$BE = \frac{7}{3}\sqrt{3}kN(C) \Leftarrow 3\sqrt{3}sin60 - 8 = BEsin60$$

$$\sum F_x = 0$$

$$AB = -\frac{26\sqrt{3}}{3} + \frac{7}{3}\sqrt{3}cos60 - 3\sqrt{3}cos60 = 9\sqrt{3}KN(C)$$

العقدة E

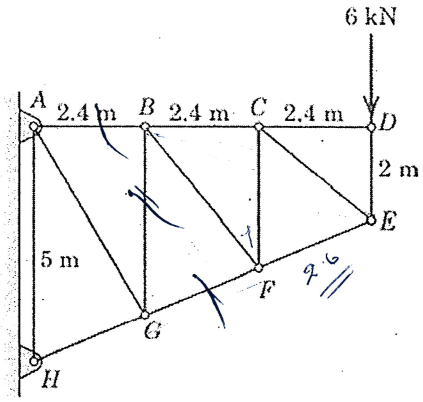


$$\sum F_y = 0 \Leftarrow \frac{7}{3}\sqrt{3}sin60 + 4 = EAsin60$$

$$EA = 5\sqrt{3}kN(T)$$

للتسجيل الإتصال على الرقم 0911337606/06

مثال/ اوجد القوة في GF, BG, AB

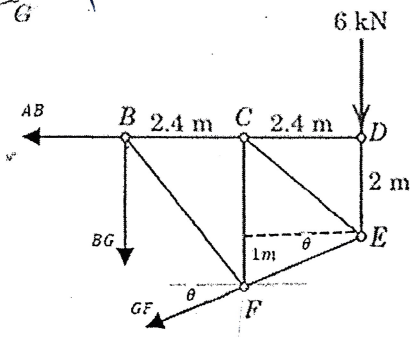


الحل: -

$$\sum M_B = 0$$

$$-6(4.8) - GF\left[\frac{2.4}{2.6}\right](3) - GF\left[\frac{1}{2.6}\right](2.4)$$

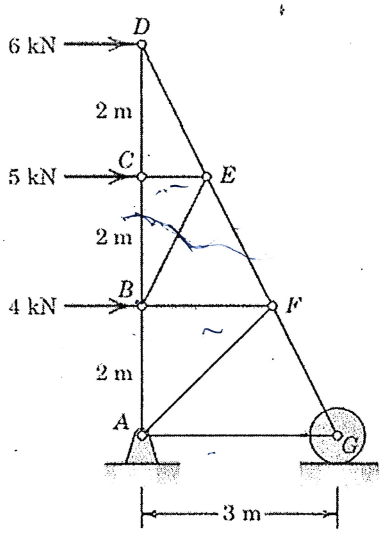
$$GF = 7.8kN(c)$$

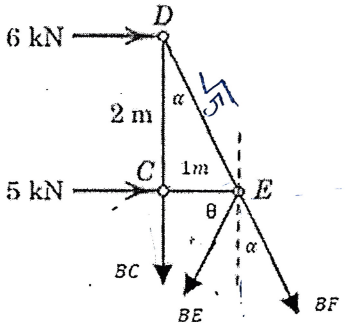


$$AB = 7.8\left[\frac{2.4}{2.6}\right] = 7.2kN(T) \Leftarrow \sum F_x = 0$$

$$BG = 7.8\left[\frac{1}{2.6}\right] - 6 = 3kN(C) \Leftarrow \sum F_y = 0$$

مثال/ اوجد القوة في BE





$$\sum M_E = 0$$

$$BC = 6[2] = 12KN(T)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$BF\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right] - BE\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right] = -11$$

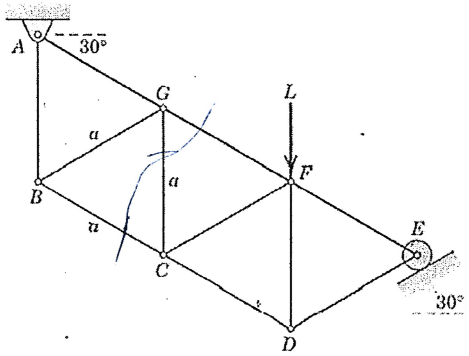
$$\sum F_y = 0$$

$$-BF\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right] - BE\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right] = 12$$

بحل المعادلتين $BE = 5.59\text{kN(T)}$

مثال/ اوجد القوة في BC, CG

علما بانها مثلثات متساوية الاضلاع.



الحل: -

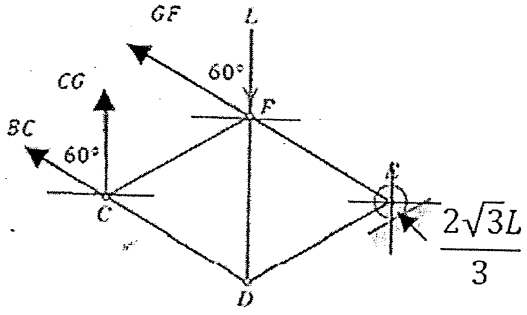
$\sum M_A = 0$ (قبل القص)

$$N_E = \frac{2\sqrt{3}L}{3} \Leftarrow -N_E sin30[3asin30] + N_E cos30[3acos30] - L[2acos30] = 0$$

$$\sum M_C = 0$$

$$GFsin60[a] - L[asin60] + \frac{2\sqrt{3}L}{3}cos30[2asin60] = 0$$

$$GF = -L(C)$$



$$\frac{2\sqrt{3}L}{3}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$Lsin60 - \frac{2\sqrt{3}L}{3}sin30 = BCsin60$$

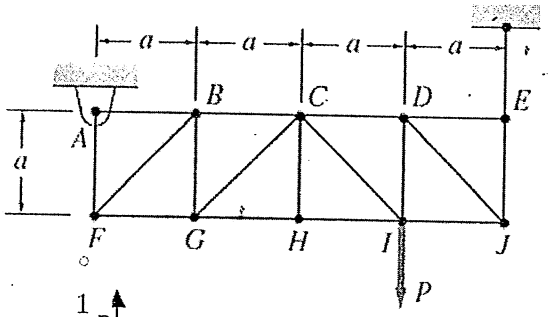
$$BC = \frac{L}{3}(T)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$CG + \frac{L}{3}cos60 - Lcos60 + \frac{2\sqrt{3}L}{3}cos30 - L = 0$$

$$BC = \frac{L}{3}(T)$$

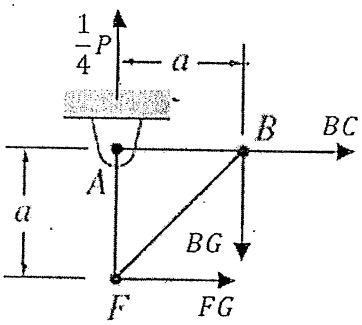
مثال/ اوجد القوة في BG, CI, CD



الحل:-

$\sum M_A = 0$ قبل القطع لإيجاد قوة التعليق عند A

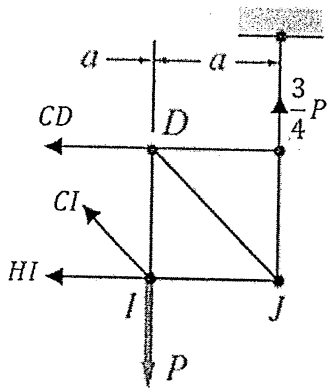
$$E_y = \frac{3}{4}P \Leftarrow E_y[4a] = P[3a]$$



$\sum F_y = 0$ بعد القطع الأول $BG = \frac{1}{4}P(T)$

$\sum M_I = 0$ بعد القطع الثاني

$$CD = \frac{3}{4}P(C)$$



$$\sum F_y = 0$$

$$\frac{3}{4}P - P + CIsin45 = 0$$

$$CI = \frac{P}{2\sqrt{2}}(T)$$

مركز الدليل العلمي
للتسجيل الاتصال على الرقم 0911370606